Lösningar till tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F/TM, FFM232/FFM233
Fredagen 20 oktober 2010, 8.30-12.30

---

1. a) 0

   b) $k = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

   c) 2

3. Ekvationen för ytan kan skrivas $\varrho^2 + (z+a)^2 = (2a)^2$, och beskriver en sfär med radien $2a$ och centrum i $(0,0,-1)$. Fältet är singulärt på z-axeln, där termen $F_0\frac{a}{\varrho}\hat{\varrho}$ beskriver en linjekälla med styrkan $2\pi a F_0$, och termen $F_0\frac{a}{\varrho}\hat{\varphi}$ en virveltråd med styrkan $2\pi a F_0$. Virveltråden ger inget bidrag till integralen, och bidraget från linjekällan är enligt Gauss sats den totala inneslutna källan, $2\pi a F_0 \cdot 4a = 8\pi F_0 a^2$. Divergensen av resten av fältet är $\frac{3F_0}{a}$. Gauss sats ger bidraget från den reguljära delen av fältet $\frac{3F_0}{a} \cdot \frac{4\pi(2a)^3}{3} = 32\pi F_0 a^2$. Värdet av integralen blir $40\pi F_0 a^2$.

4. Det gäller att lösa Laplaces ekvation $\Delta T = 0$ i sfären, med randvillkoret $T(a,\theta,\varphi) = T_0 + T_1 cos\theta$. Det är rimligt att göra en ansats för temperaturfältet av formen $T = Ar^p + Br^q\cos\theta$. Med hjälp av uttrycket för Laplaceoperatorn i sfäriska koordinater fås $\Delta r^p = p(p+1)r^{p-2}$ och $Deltar^q\cos\theta = [q(q+1)-2]r^{q-2}\cos\theta$. Negativa värden på p och q utesluts, och man måste alltså ha $p=0$, $q=1$. Konstanterna A och B bestäms av randvillkoren, och lösningen blir $T = T_0 + T_1\frac{r}{a}\cos\theta$.

5. Rotationen av fältet är noll utom på z-axeln. Det är inte sant att fältet är rotationsfritt, utan $\nabla\times\vec{F} = 2\pi\delta^2(\vec{\varrho})$. Det finns därför ingen potential. (Om man ändå envisas och försöker hitta en potential blir det t.ex. $\phi = -\varphi$. Men detta är inte en (enkelvärd) funktion på $\mathbb{R}^3$.)

6. Låt oss kalla $\delta h/h$ fär α. Med z-axeln vertikal i figuren är deformationstensorn $E_{33} = -\alpha$ och alla andra komponenter noll (speciellt är $E_{11} = E_{22} = 0$ eftersom kroppen inte kan utvidgas i sidled). Spåret av deformationstensorn är $E_{ii} = -\alpha$. Spänningstensorn har en komponent $P_{33} = -p$. Dessutom finns det tryckspänningar i sidled, $P_{11} = P_{22} = -q$, vars storlek vi ännu inte vet; de är precis så stora som behövs för att hålla bredden på rätblocket oförändrad. Sambandet mellan spänning och deformation ger nu
$$\begin{bmatrix} -q & 0 & 0 \\ 0 & -q & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} = \lambda(-\alpha)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 2\mu\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix} \quad ,$$
dvs. $-q = -\lambda\alpha$, $-p = -\lambda\alpha - 2\mu\lambda\alpha$. Resultatet är
$$\alpha = \frac{p}{(\lambda+2\mu)} \quad .$$
(Detta kan jämföras med vad som fås om inget håller emot i sidled; då är
$$\alpha = \frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)}p$$
(se föreläsningsanteckningar). Detta är en faktor
$$\frac{(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)}{\mu(3\lambda+2\mu)} = \frac{(1+\frac{\lambda}{\mu})(1+\frac{\lambda}{2\mu})}{1+\frac{3\lambda}{2\mu}} = 1 + \frac{\frac{\lambda^2}{2\mu^2}}{1+\frac{3\lambda}{2\mu}} > 1$$
gånger vårt resultat. Det är rimligt att deformationen blir mindre när väggarna håller emot.)