Tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F/TM, FFM232/FFM233
Fredagen 15 januari 2010, 8.30-12.30
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Martin Cederwall, tel. 7723231

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, typgodkänd kalkylator, lexikon samt Olle Branders formelsamling.

Alla svar, utom till uppgift 1, skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Maximal poäng på tentamen är 60. För betyg 3 krävs 24 poäng, för betyg 4 36 poäng, och för betyg 5 48 poäng. Lycka till!

---

1. Svara på följande tre delfrågor (endast svar skall ges)!
(3 per korrekt besvarad deluppgift, 10 för alla tre.)

   a) Vad är värdet av integralen $\int_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$, där S är en sfär med radien a och mittpunkt i origo, och vektorfältet $\vec{F}$ ges av $\vec{F} = \frac{q}{4\pi}\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}$, där $\vec{r}_0 = \frac{3a}{5}(\hat{x}+\hat{y}-\hat{z})$?

   b) Den antisymmetriska tensorn A_{ij} konstrueras från en vektor $\vec{a}$ enligt $A_{ij} = k\epsilon_{ijk}a_k$, där k är en konstant. För vilka värden på k gäller $A_{ij}A_{ij} = |\vec{a}|^2$?

   c) Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} 2^{-x}\delta_{\mathbb{N}}(x)dx$, där $\delta_{\mathbb{N}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\delta(x-n)$.

2. Härled kontinuitetsekvationen för massflöde utgående från massans bevarande. Eventuellt använda integralsatser behöver inte bevisas.
(10 poäng)

3. Vektorfältet $\vec{F}$ ges i cylindriska koordinater av

$$\vec{F} = F_0\left[\left(\frac{\varrho}{a}+\frac{a}{\varrho}\right)(\hat{\varrho}+\hat{\varphi})+\frac{z}{a}\hat{z}\right] \quad .$$

   Bestäm normalytintegralen $\int_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$, där ytan S ges av ekvationen $\varrho^2+z^2+2az=3a^2$.
(10 poäng)

4. Temperaturfördelningen på ytan av en sfär med radie a ges av $T = T_0 + T_1\cos\theta$. Bestäm den statiska temperaturfördelningen innanför sfären. Det finns inga värmekällor i området $r < a$.
(10 poäng)

5. Vad är fel i följande resonemang?

   "Kriteriet för att ett vektorfält $\vec{F}$ skall vara konservativt är att $\nabla \times \vec{F} = 0$. Om vi kontrollerar fältet $\vec{F} = \varrho^{-1}\hat{\varphi}$, givet i cylindriska koordinater, finner vi genom explicit uträkning av rotationen att $\nabla \times \vec{F} = 0$. Därför finns det en potential till $\vec{F}$, sådan att $\vec{F} = -\nabla\phi$, och $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{r} = 0$ för varje sluten kurva C."
   (10 poäng)

6. Ett homogent rätblock av ett elastiskt material passar precis in i en motsvarande hålighet i ett annat material, som i praktiken kan betraktas som odeformerbart (se figuren). Det finns ingen friktion i kontaktytorna mellan rätblocket och det omgivande materialet. Bestäm den relativa längdförändringen $\delta h/h$ då den fria änden av rätblocket belastas med trycket p i termer av p och Lamés materialkonstanter λ och μ. (Relationen mellan spänningstensorn P_{ij} och deformationstensorn E_{ij} är $P_{ij} = \lambda\delta_{ij}E_{kk} + 2\mu E_{ij}$.)
   (10 poäng)