Lösningar till tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F/TM, FFM232/FFM233
Torsdagen 26 augusti 2010, 14.00-18.00

---

1. a) $-j$

   b) $\alpha = \gamma = 0$, β godtyckligt.

   c) 0

2. Man kan göra på flera sätt. Det kanske enklaste är att tänka sig sfären delad i två. Kraften från gasen på halvsfären S är

$$\vec{F}_{\text{gas}} = \int\limits_S p\hat{r}dS = \ldots = \pi a^2 p\hat{z} \quad ,$$

där halvsfären begränsas av xy-planet. Kraften från spänningen t i ballongen är $\vec{F}_{\text{ballong}} = -2\pi a t\hat{z}$. Kraftjämvikt ger $t = \frac{1}{2}pa$.

3. Ytan är mantelytan för en kon med spetsen i $(0, 0, a)$. Fältet skrivs om:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= F_0 a^2 \frac{x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + F_0 a \frac{x\hat{x} + y\hat{y}}{x^2 + y^2} + \frac{2F_0}{a^2}(x + y)z\hat{z} + \frac{3F_0}{a}(x\hat{x} - y\hat{y} + z\hat{z}) \\ &= \frac{F_0 a^2 \hat{r}}{r^2} + \frac{F_0 a\hat{\varrho}}{\varrho} + \frac{2F_0}{a^2}(x + y)z\hat{z} + \frac{3F_0}{a}(x\hat{x} - y\hat{y} + z\hat{z}) \quad .\end{aligned}$$

Den första termen känns igen som en punktkälla i origo med styrkan $4\pi F_o a^2$ och den andra som en linjekälla längs z-axeln med styrkan $2\pi F_0 a$. Eftersom ytan tar upp rymdvinkeln 2π sedd från origo är punktkällans bidrag $2\pi F_0 a^2$. Ytan har höjden a, så linjekällans bidrag är $2\pi F_0 a^2$. De resterande termerna kan t.ex. hanteras med Gauss sats. Deras divergens är $\frac{2F_0}{a^2}(x+y) + \frac{3F_0}{a}$. Vi kan sluta ytan med en cirkelskiva på $z = 0$. Där är z-komponenten av detta fält noll, så vi får inget bidrag från bottenytan, utan endast från volymintegralen. Termen $\frac{2F_0}{a^2}(x + y)$ är udda under $(x, y, z) \to (-x, -y, z)$, så dess bidrag är noll. Termen $\frac{3F_0}{a}$ ger volymintegralen $\frac{1}{3}\pi a^2 \cdot a \cdot \frac{3F_0}{a} = \pi F_0 a^2$. Den totala sökta integralen är $5\pi F_0 a^2$.

4. Det gäller att lösa Laplaces ekvation $\Delta T = 0$ i cylindern, med randvillkoret $T(a, \varphi, z) = T_0 + T_1 cos3\varphi$. Problemet är tvådimensionellt. Det är rimligt att göra en ansats för temperaturfältet av formen $T = A\varrho^p + B\varrho^q \cos 3\varphi$. Med hjälp av uttrycket för Laplaceoperatorn i cylindriska koordinater fås $\Delta\varrho^p = p^2\varrho^{p-2}$ och $\Delta\varrho^q \cos 3\varphi = (q^2-9)\varrho^{q-2} \cos 3\varphi$. Negativa värden på p och q utesluts, och man måste alltså ha $p = 0$, $q = 3$. Konstanterna A och B bestäms av randvillkoren, och lösningen blir $T = T_0 + T_1 \frac{\varrho^3}{a^3} \cos 3\varphi$.

6. Låt oss kalla $\delta h/h$ för α. Med z-axeln vertikal och x-axeln åt höger i figuren är deformationstensorn diagonal med $E_{33} = -\alpha$, $E_{11} = 0$ och $E_{22} = \beta$ tills vidare okänd. Spåret av deformationstensorn är $E_{ii} = \beta - \alpha$. Spänningstensorn har en komponent $P_{33} = -p$. Det finns också en tryckspänning i sidled, $P_{11} = -q$, vars storlek vi ännu inte vet; den är precis så stor som behövs för att hålla bredden på rätblocket oförändrad. Dessutom är $P_{22} = 0$. Sambandet mellan spänning och deformation ger nu

$$\begin{bmatrix} -q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} = \lambda(\beta - \alpha) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 2\mu \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix} \quad ,$$

vilket efter en kort räkning ger

$$\alpha = \frac{\lambda + 2\mu}{4\mu(\lambda + \mu)} \quad .$$

(Detta kan jämföras med vad som fås om inget håller emot i sidled; då är

$$\alpha = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} p$$

vilket är större än vårt resultat. Det är rimligt att deformationen blir mindre när väggarna håller emot.)