Lösningar till tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F/TM, FFM232/FFM233
Tisdagen 19 oktober 2010, 8.30-12.30

---

1. a) 3

   b) $\gamma = (4\pi k)^{-3/2}$

   c) 1

2. Eftersom $\vec{r} = (x, y)$ är uttryckt i de nya koordinaterna är det lämpligt att beräkna $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}$:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \eta \qquad \frac{\partial x}{\partial \eta} = \xi$$
$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \xi \qquad \frac{\partial y}{\partial \eta} = -\eta$$

Vi får direkt $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} = 0$, så systemet är ortogonalt. Skalfaktorerna är

$$h_\xi = h_\eta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}\,.$$

Därför fås Laplaceoperatorn som

$$\Delta = \frac{1}{\xi^2 + \eta^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right)$$

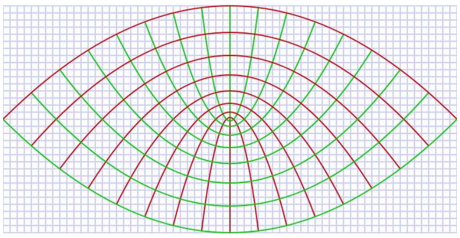
ξ-ytorna parametriseras av η, och fås genom eliminering av ξ i de definierande uttrycken för koordinaterna:

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\eta^2} - \eta^2\right).$$

På samma sätt fås η-ytorna:

$$y = \frac{1}{2}\left(\xi^2 - \frac{x^2}{\xi^2}\right).$$

Samtliga koordinatytor är parabler med fokus i origo.



3. Vi kan använda Gauss sats, men komma ihåg att ta hänsyn till singulära källor i volymen. Man känner direkt igen en linjekälla på z-axeln med styrka $2\pi F_0 a$. Resten av fältet har divergensen F_0/a för $z > 0$ och 0 för $z < 0$. Fältets z-komponent har också en diskontinuitet vid $z = 0$, som indikerar en ytkälla med ytkälltäthet F_0. De inneslutna källorna är

Rymdkällan: $\frac{1}{2}\frac{4\pi a^3}{3} \cdot \frac{F_0}{a} = \frac{2\pi}{3} F_0 a^2$;

Ytkällan: $\pi a^2 \cdot F_0$;

Linjekällan: $2a \cdot 2\pi F_0 a = 4\pi F_0 a^2$.

Totala inneslutna källan är alltså $\frac{17}{3}\pi F_0 a^2$, vilket är integralens värde.

4. Den statiska värmeledningsekvationen är

$$\Delta T = -\frac{s}{\lambda}\,.$$

Värmekälltäthet är effekt/volymsenhet, i SI-enheter $\mathrm{Wm^{-3}}$. Ur värmeledningsekvationen (t.ex.) ses att värmeledningsförmågan har samma dimension som värmekälltäthet/(temperatur/längd^2), dvs enheten $\mathrm{Wm^{-3}K^{-1}m^2}$=$\mathrm{WK^{-1}m^{-1}}$. (Detta kan också fås från relationen mellan värmeströmtäthet, som mäts i $\mathrm{Wm^{-2}}$, och temperaturgradient, som mäts i $\mathrm{Km^{-1}}$.) Konstanten α har samma dimension som värmeströmtäthet/temperatur, dvs. enheten $\mathrm{WK^{-1}m^{-2}}$.

Problemet är sfäriskt symmetriskt, och temperaturen kommer endast att bero på r. Värmeledningsekvationen (Poissons ekvation) för $T(r)$ är $r^{-2}(r^2T')' = -s_0/\lambda$, med lösningen

$$T(r) = A + \frac{B}{r} - \frac{s_0}{6\lambda}r^2\,.$$

Den andra termen svarar mot en punktkälla i origo, så vi sätter $B = 0$. För att använda villkoret på randen behöver vi också värmeströmmen,

$$\vec{\jmath} = -\lambda\nabla T = \frac{s_0}{3}r\hat{r}\,.$$

Insättning i randvillkoret ger $\frac{1}{3}s_0R = \alpha(A - \frac{s_0}{6\lambda}R^2 - T_0)$, dvs. $A = T_0 + \frac{s_0R^2}{6\lambda} + \frac{s_0R}{3\alpha}$. Temperaturfördelningen är

$$T(r) = T_0 + \frac{s_0R}{3\alpha} + \frac{s_0R^2}{6\lambda}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\,.$$

Uttrycket kan kontrolleras m.a.p. dimensionalitet. Vi noterar att skillnaden mellan temperaturen på randen och den i omgivningen är $\frac{s_0R}{3\alpha}$, som $\to 0$ då $\alpha \to \infty$, vilket stämmer intuitivt med att värme då överförs "oändligt väl" över randen. Temperaturskillnaden mellan origo och randen är $\frac{s_0R^2}{6\lambda}$ vilket $\to 0$ då $\lambda \to \infty$, vilket stämmer med att värme då leds "oändligt bra" ut genom bollen, och i gränsen omedelbart jämnas ut inom bollen.

Slutligen är den totala genererade effekten från värmekällan $\frac{4\pi R^3}{3} \cdot s_0$, och den som går ut genom randen $4\pi R^2 \cdot \frac{s_0}{3}$. De är alltså lika (förstås).

5. Neumanns homogena randvillkor säger att $\vec{n} \cdot \nabla\phi = 0$ på randen. Gauss sats ger då att

$$0 = \oint_{\partial V} \nabla\phi \cdot d\vec{S} = \int_V \Delta\phi dV\,.$$

Högerledet är per definition $-\int_V \rho$, dvs. minus den totala källan i V.

Ett fysikaliskt exempel t.ex. kan vara en strömmande vätska. Om det finns källor, dvs. om vätska "skapas" inne i volymen och inte försvinner någon annanstans, måste den läcka ut genom randen, vilket strider mot randvillkoret. Liknande exempel kan göras t.ex. i elektrostatik.

6. Det elektriska fältet är $\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0\hat{x}\cos(k(z - ct))$. Vi ser direkt att den 1:a av Maxwells ekvationer (ME) är uppfylld (högerledet är 0). Om vi använder den 2:a ME har vi

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E} = E_0k\hat{y}\sin(k(z - ct))\,.$$

Denna kan integreras till

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c}\hat{y}\cos(k(z-ct)) + \vec{F}(\vec{r})\,,$$

där $\vec{F}$ är något tidsoberoende fält, som vi struntar i (det har inget med vågrörelsen att göra). Detta magnetiska fält är divergensfritt, så den 3:e ME är uppfylld. Man kan också sätta in i den 4:e ME och se att den är uppfylld.

Vågländgen är $\frac{2\pi}{k}$ och periodtiden $\frac{2\pi}{kc}$.