Tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F(TM), FFM232(FFM233)
Tisdagen 19 oktober 2010, 8.30-12.30, M
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Per Salomonson, tel. 7723231.

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, typgodkänd kalkylator, lexikon samt Olle Branders formelsamling.

Alla svar, utom till uppgift 1, skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Maximal poäng på tentamen är 60. För betyg 3 krävs 24 poäng, för betyg 4 36 poäng, och för betyg 5 48 poäng. Lycka till!

---

1. Svara på följande tre delfrågor (endast svar skall ges)!
(3 per korrekt besvarad deluppgift, 10 för alla tre.)

a) Ange värdet av tangentlinjeintegralen $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, där $\vec{F}=\frac{\hat{\varphi}}{2\pi\varrho}$ är givet i cylindriska koordinater och den slutna kurvan C parametriseras enligt $(x,y,z)=(\cos 3t,\sin 3t,\cos t)$, $0\leq t<2\pi$.

b) En sfäriskt symmetrisk, tidsberoende, temperaturfördelning i tre dimensioner är för $t>0$ av formen

$$T(r,t)=\gamma t^{-3/2}e^{-\frac{r^2}{4kt}}\,,$$

där γ och k är konstanter. (Den uppfyller värmeledningsekvationen $(\frac{\partial}{\partial t}-k\Delta)T=0$, men det är inte direkt relevant för uppgiften.) Vilket värde skall γ ha för att temperaturen för mycket små tider (dvs. då $t\rightarrow 0^+$) skall närma sig $\delta^3(\vec{r})$?
(En eventuellt användbar integral är $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-s^2}ds=\sqrt{\pi}$.)

c) $\vec{a}$, $\vec{b}$ och $\vec{c}$ är basvektorer i ett ortonormerat högersystem. Beräkna $\epsilon_{ijk}a_ib_jc_k$.

2. Paraboliska koordinater ξ, η definieras av

$$x=\xi\eta\,,$$
$$y=\frac{1}{2}(\xi^2-\eta^2)\,.$$

Visa att systemet är ortogonalt och att koordinatytorna är parabler. Härled ett uttryck för Laplaceoperatorn på ett skalärt fält i dessa koordinater.
(10 poäng)

3. Vektorfältet $\vec{F}$ ges i cylindriska koordinater av

$$\vec{F}(\vec{r})=\begin{cases}F_0(\frac{a}{\varrho}\hat{\varrho}+\frac{z}{a}\hat{z})\,, & z>0\,,\\ F_0(\frac{a}{\varrho}\hat{\varrho}-\hat{z})\,, & z<0\,.\end{cases}$$

Beräkna normalytintegralen av $\vec{F}$ över sfären med radien a och centrum i origo.
(10 poäng)

4. I en boll $r < R$ med värmeledningsförmåga λ finns en värmekälla med konstant värmekälltäthet s_0. Utanför bollen är temperaturen T_0, och överföringen av värmeenergi från bollen till omgivningen modelleras enligt ekvationen (randvillkoret) $\hat{r} \cdot \vec{\jmath} = \alpha(T - T_0)$, där α är en konstant och $\vec{\jmath}$ är värmeströmmen, som ges av $\vec{\jmath} = -\lambda \nabla T$. Värmeöverföringen per yt- och tidsenhet ut från bollen är alltså proportionell mot skillnaden mellan temperaturerna på randen och i omgivningen, med proportionalitetskonstant α.

   Vilka dimensionaliteter har s_0, α och λ (det går bra att ange SI-enheter)?

   Bestäm den statiska temperaturfördelningen i bollen. Kontrollera rimligheten av ditt svar, speciellt i gränserna $\alpha \to \infty$ och $\lambda \to \infty$. Kontrollera uttryckligen att värmeeffekten ut genom ytan $r = R$ är lika stor som den totala utvecklade värmeeffekten inne i bollen.

   (Värmeledningsekvationen kan skrivas

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \Delta T = s \,,$$

   där c är värmekapacitiviteten, ρ densiteten, λ värmeledningsförmågan och s värmekälltätheten.)
   (10 poäng)

5. Visa eller argumentera övertygande för att Poissons ekvation i ett begränsat område V med randen ∂V och Neumanns homogena randvillkor på ∂V bara kan ha en lösning om den totala källan i V är noll. Ge ett fysikaliskt exempel.
   (10 poäng)

6. Ett elektriskt fält kan, i ett område utan laddningar och strömmar, skrivas

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \hat{x} \cos(k(z - ct)) \,,$$

   där E_0 och k är konstanter och c ljushastigheten. Vad är våglängden och periodtiden för denna vågrörelse? Bestäm det magnetiska fältet (eventuella möjliga tidsoberoende delar kan sättas till noll).
   (Maxwells ekvationer lyder:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \,, \\
\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \,, \\
\nabla \cdot \vec{B} &= 0 \,, \\
\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \mu_0 \vec{\jmath} \,. \,)
\end{aligned}$$

   (10 poäng)