Lösningar till tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F/TM, FFM232/FFM233
Måndagen 10 januari 2011, 14.00-18.00

---

1. a) $\frac{2\pi bc}{a}F_0$

   b) 14

   c) $-\frac{1}{\sqrt{21}}(1,2,4)$

2. Vektorfältet kan skrivas
$$\vec{F} = \frac{F_0}{a}\vec{r} - \frac{F_0}{a}(y,z,x) + F_0 a\frac{\hat{\varphi}}{\varrho}\,.$$
Den första delen är reguljär och rotationsfri. Den andra delen har rotationen $\frac{F_0}{a}(1,1,1)$, och den tredje är fältet från en virveltråd längs z-axeln med styrka $2\pi F_0$.

   Kurvan är en cirkel med radien a centrerad i origo. Normalvektorn till cirkelytan den begränsar är $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$. Stokes sats ger att bidraget från den första delen försvinner (eftersom rotationen är noll), och att bidraget från den andra delen också försvinner (eftersom dess rotation är vinkelrät mot normalvektorn). Eftersom kurvan omsluter z-axeln ett varv i positiv led ger den sista delen bidraget $2\pi F_0 a$, vilket är det sökta arbetet.

3. Man kan använda en Greensfunktionsmetod. Avståndet från en punkt $(0,0,z)$ till en punkt på källan med sfärisk koordinat θ' är $\sqrt{z^2+a^2-2az\cos\theta'}$. P.g.a. rotationssymmetri är $E_x = E_y = 0$ på z-axeln. Potentialen ges av
$$\phi(0,0,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}a^2\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} d\theta' \sin\theta' \frac{\sigma_0 + \sigma_1\cos\theta'}{\sqrt{z^2+a^2-2az\cos\theta'}}\,.$$
Beräkning av integralen ger
$$\epsilon_o\phi = \begin{cases} \frac{a^2\sigma_0}{z} + \frac{a^3\sigma_1}{3z^2}\,, & z > a\,; \\ a\sigma_0 + \frac{\sigma_1 z}{3}\,, & -a < z < a\,; \\ -\frac{a^2\sigma_0}{z} - \frac{a^3\sigma_1}{3z^2}\,, & z < -a\,. \end{cases}$$
Derivering ger z-komponenten av det elektriska fältet. Man kan kontrollera att diskontinuiteterna på ytan stämmer med ytladdningen.

   De två bidragen (med σ_0 och σ_1) skisseras lämpligen var för sig. Termerna med σ_0 behöver inte räknas ut såhär, utan kan skrivas ned direkt om man vill, eftersom man har sfärisk symmetri.

4. Vi har
$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi} = (\xi,\eta,0)\,, \quad \frac{\partial\vec{r}}{\partial\eta} = (-\eta,\xi,0)\,, \quad \frac{\partial\vec{r}}{\partial\zeta} = (0,0,1)\,.$$
Dessa är ömsesidigt ortogonala. Dessutom är $\frac{\partial\vec{r}}{\partial\zeta}\cdot(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\eta}) > 0$, så det är ett högersystem. Skalfaktorerna är $h_\xi = h_\eta = \sqrt{\xi^2+\eta^2}$, $h_\zeta = 1$. Ytan, vars area söks, är en koordinatyta. Den beräknas då genom integralen
$$A = \int_0^{\beta} d\eta \int_0^{\gamma} d\zeta h_\eta h_\zeta = \gamma\int_0^{\beta}\sqrt{\alpha^2+\eta^2} = \ldots = \frac{\alpha\beta\gamma}{2}\left[\sqrt{1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}} + \frac{\alpha}{\beta}\log\left(\frac{\beta}{\alpha}+\sqrt{1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}}\right)\right]\,.$$

5. Neumanns homogena randvillkor säger att $\hat{n} \cdot \nabla T = 0$ på randen. Värmeströmmen över randen är alltså noll, och all värmeenergi som "skapas" i V stannar därför kvar i V.

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V T dV = \int\limits_V \frac{\partial T}{\partial t} dV = \frac{1}{c\rho}\int\limits_V s dV + \frac{\lambda}{c\rho}\int\limits_V \Delta T dV\,.$$

Den sista integralen ger noll m.h.a. Gauss sats och randvillkoret: $\int\limits_V \Delta T dV = \int\limits_{\partial V} \hat{n} \cdot \nabla T dS = 0$, varför

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V T dV = \frac{1}{c\rho}\int\limits_V P\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0) dV = \frac{P}{c\rho}\,,$$

som integreras till

$$\int\limits_V T dV = T_0 V + \frac{Pt}{c\rho}\,.$$

6. Om man sätter in en planvåg $\psi = A\exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t))$ i ekvationen får man $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$.