

Tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F(TM), FFM232(FFM233)

Måndagen 10 januari 2011, 14.00-18.00, M

Examinator: Martin Cederwall

Jour: Martin Cederwall, tel. 7723181.

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, typgodkänd kalkylator, lexikon samt Olle Branders formelsamling.

Alla svar, utom till uppgift 1, skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Maximal poäng på tentamen är 60. För betyg 3 krävs 24 poäng, för betyg 4 36 poäng, och för betyg 5 48 poäng. Lycka till!

1. Svara på följande tre delfrågor (endast svar skall ges)!

(3 per korrekt besvarad deluppgift, 10 för alla tre.)

a) Ange värdet av tangentlinjeintegralen $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, där $\vec{F} = \frac{F_0}{a}(-y, x, 0)$ och den slutna kurvan C parametriseras enligt $(x, y, z) = (b \cos t, c \sin t, 0)$, $0 \leq t < 2\pi$.

b) Matriserna \mathbf{X} , \mathbf{Y} och \mathbf{Z} ges av

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}.$$

Beräkna $\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn}X_{il}Y_{jm}Z_{kn}$.

c) Ange för vilken enhetsvektor \vec{n} riktningsderivatan av funktionen $\psi(\vec{r}) = (1 + \frac{1}{2}x^2 + y^2 + 2z^2)^{-1}$ i riktningen \vec{n} i punkten $\vec{r} = (1, 1, 1)$ är maximal.

2. Kraftfältet \vec{F} ges av

$$\vec{F}(\vec{r}) = F_0 \left(\frac{x-y}{a} - \frac{ay}{x^2+y^2}, \frac{y-z}{a} + \frac{ax}{x^2+y^2}, \frac{z-x}{a} \right).$$

Beräkna det arbete som kraften utför på en partikel som transporteras längs kurvan C : $(x, y, z) = a(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \tau, \sin \tau, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \tau)$ då τ går från 0 till 2π .

(10 poäng)

3. På en sfär med radien a befinner sig en ytladdning $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 \cos \theta$. Bestäm det elektrostatiske fältet för alla punkter på z -axeln. Åskådliggör fältet i någon graf.

(10 poäng)

4. Koordinaterna ξ , η och ζ definieras av

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2), \\y &= \xi\eta, \\z &= \zeta.\end{aligned}$$

Visa att $\xi\eta\zeta$ -systemet är ett ortogonalt högersystem. Beräkna arean av ytan $\xi = \alpha > 0$, $0 < \eta < \beta$, $0 < \zeta < \gamma$, där α , β och γ är konstanter.
(10 poäng)

5. En kropp V hålls värmeisolerad från omgivningen; på randen till kroppen gäller Neumanns homogena randvillkor för temperaturen. Initialt gäller $T = T_0$ i hela kroppen. Vid tiden $t = 0$ slås en värmekälla på med värmekälltätheten $s = P\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0)$, där P är en konstant och \vec{r}_0 ortvektorn för en punkt i kroppen. Denna värmekälla förblir sedan påslagen. Bestäm värdet av $\int_V T(\vec{r}, t)dV$ för alla tider $t > 0$.
(Värmeledningsekvationen lyder $c\rho\frac{\partial T}{\partial t} - \lambda\Delta T = s$, där λ är värmeledningsförmågan, c värmekapacitivitet och ρ densiteten. Dessa förutsätts vara konstanta i kroppen.)
(10 poäng)

6. Schrödingerekvationen för den komplexa vågfunktionen Ψ som kvantmekaniskt beskriver en fri partikel med massan m lyder

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta\right)\Psi = 0 \quad ,$$

där \hbar är Plancks konstant dividerad med 2π . Vilken dispersionsrelation, dvs. relation mellan vinkelfrekvens ω och vågtal $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ för en plan våg leder denna ekvation till?
(10 poäng)