Lösningar till tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F/TM, FFM232/FFM233
Torsdagen 25 augusti 2011, 14.00-18.00

---

1. a) 0

   b) $(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d})-(\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c})$

   c) $\frac{1}{\sqrt{91}}(1,3,9)$

2. Kurvan kan parametriseras som $(x,y)=a(\cosh t,\sinh t)$. (Det finns förstås andra sätt, t.ex. kan y användas som parameter.) Då har man

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{-\infty}^{\infty} F_0\frac{1}{\cosh^3 t}(0,1)\cdot a(\sinh t,\cosh t)dt=F_0 a\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{\cosh^2 t}=2F_0 a\,.$$

3. Fältet kan delas upp i två delar, $\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2$, där

$$\vec{F}_1=\frac{F_0 a^2\hat{r}}{r^2}\,,\qquad \vec{F}_2=-\frac{F_0 z\hat{z}}{a}\,.$$

   Ytan S är en kon med spetsen i $(0,0,4a)$, som är avhuggen (öppen nedåt) vid xy-planet. $\vec{F}_1$ är fältet från en punktkälla i origo med styrkan $4\pi F_0 a^2$. Ytan upptager rymdvinkeln 2π, så bidraget till ytintegralen blir $2\pi F_0 a^2$. För $\vec{F}_2$ kan man använda Gauss sats. Slut med bottenytan, där fältet är noll. $\nabla\cdot\vec{F}_2=-\frac{F_0}{a}$, och bidraget blir detta gånger den inneslutna volymen, dvs. $-\frac{F_0}{a}\frac{1}{3}\pi(4a)^2 4a=-\frac{64\pi}{3}F_0 a^2$. Sammantaget blir hela den sökta integralen $-\frac{58\pi}{3}F_0 a^2$. Hade man valt normalen "inåt" hade man fått motsatt tecken.

4. Räkningen går bra att göra i Cartesiska koordinater, men är kanske litet enklare i sfäriska, där

$$\phi=\frac{qa^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{xy}{r^5}=\frac{qa^2}{8\pi\epsilon_0}\frac{\sin^2\theta\sin 2\varphi}{r^3}\,.$$

5. Lösningen till värmeledningsekvationen är att temperaturen varierar linjärt i väggen mellan de två randvillkoren. Dess gradient är då $\nabla T=-\frac{\Delta T}{d}\hat{n}$, där d är väggens tjocklek och enhetsvektorn $\vec{n}$ pekar "utåt". Värmeströmmen är $\vec{\jmath}=-\lambda\nabla T=\frac{\lambda\Delta T}{d}\hat{n}$, där λ betecknar värmeledningsförmågan i väggen. Med totala ytan A har man alltså effekten

$$P=\frac{A\lambda\Delta T}{d}\approx\frac{8\times 0.15\times 20}{0.1}\mathrm{m}^2\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{Km}}K\frac{1}{\mathrm{m}}\approx 240\mathrm{W}.$$