Lösningar till tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F/TM, FFM232/FFM233
Måndagen 17 oktober 2011, 14.00-18.00

---

1. a) $-2\pi F_0 a$

   b) $-a^2 - c^2$

   c) $\hat{z}\,(= -\hat{\theta})$

2. Dela upp fältet som $\vec{F} = \vec{F}_0 + \vec{F}_1$, där $\vec{F}_0$ är den del som innehåller konstanten F_0. En uträkning av $\nabla \cdot \vec{F}_0$ i sfäriska koordinater visar att detta är 0, utom möjligen i origo, där $\vec{F}_0$ är singulärt (det är fältet från en punktdipol). Origo ligger dock utanför kuben, varför Gauss sats ger att bidraget från $\vec{F}_0$ till integralen är 0. $\vec{F}_1$ känns igen som fältet från en punktkälla med styrkan $4\pi F_1 a^2$, belägen i $(2a, 0, 0)$. Denna punktkälla ligger inne i kuben, och bidraget till integralen är $4\pi F_1 a^2$, vilket alltså är integralens värde.

3. Koordinatsystemet kan fås från polära koordinater, med $\varrho = a\cosh\tau$. (Det gäller alltså bara i området $\varrho \geq a$, och $0 \leq \tau < \infty$.) Därför är $\hat{\tau} = \hat{\varrho} \perp \hat{\varphi}$, och systemet är ortogonalt. Man har $\frac{\partial\varrho}{\partial\tau} = a\sinh\tau$, så $h_\tau = |\frac{\partial\vec{r}}{\partial\tau}| = a\sinh\tau$ och $h_\varphi = \varrho = a\cosh\tau$. Kurvorna med konstant τ är cirklar med centrum i origo och radie $\geq a$. Kurvorna med konstant φ är radiella strålar från radien a till oändligheten.

4. Insättning av temperaturfördelningen i värmeledningsekvationen ger

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - k\Delta\right) T = \left(-\frac{1}{\tau} + k\frac{\pi^2}{L^2}\right) T = 0\,,$$

   vilket ger $\tau = \frac{L^2}{k\pi^2} = \frac{c\rho L^2}{\pi^2\lambda}$. Det är lämpligt att kontrollera att detta har dimensionen tid. Värmeenergitätheten är $\epsilon = c\rho T$ (plus en konstant, om man vill). Totala värmeenergin i kroppen vid tiden t är

$$E = \int_V dV\,\epsilon = c\rho T_0 e^{-\frac{t}{\tau}} A \int_0^L dx \sin\frac{\pi x}{L} = \frac{2}{\pi} ALc\rho T_0 e^{-\frac{t}{\tau}}\,.$$

   Den minskar alltså med tiden. Det är helt ok, då värme kommer att flöda ut genom begränsningsytorna vid cylinderns ändar. (Man kan kontrollera att flödet ut är lika med minus tidsderivatan av energin i kroppen, men det följer direkt av värmeledningsekvationen, som är härledd just från kontinuitetsekvationen.)

5. Mellan cylindrarna skall potentialen uppfylla Laplaces ekvation. Det finns inget vinkelberoende i problemet, och därför skall lösningen vara av formen $\phi = A + B\log\varrho$. Insättning av randvärdena ger

$$\phi = V\frac{\log\frac{\varrho}{a}}{\log\frac{b}{a}}\,,$$

   och följaktligen är det elektriska fältet

$$\vec{E} = -\frac{V}{\log\frac{b}{a}}\frac{\hat{\varrho}}{\varrho}\,.$$

Ytladdningarna bestäms som ϵ_0 gånger diskontinuiteten i det elektriska fältets normalkomponent (det kan tas till 0 för $\varrho < a$ och $\varrho > b$). Man får en ytladdningstäthet

$$\sigma_{(a)} = -\frac{\epsilon_0 V}{a \log \frac{b}{a}}$$

på den inre ytan, och

$$\sigma_{(b)} = \frac{\epsilon_0 V}{b \log \frac{b}{a}}$$

på den yttre. Laddningarna per längdenhet blir $k_{(a)} = -2\pi\epsilon_0 V / \log \frac{b}{a}$ respektive $k_{(b)} = 2\pi\epsilon_0 V / \log \frac{b}{a}$. Kapacitansen per längdenhet är då $2\pi\epsilon_0 / \log \frac{b}{a}$. Man bör kontrollera dimensionen hos uttrycket, vilket kanske enklast görs genom att jämföra med den första av Maxwells ekvationer.

6. Det avgörande här är att de två punktkällorna är lika stora fast med motsatta tecken, så att den totala källan innanför sfären är noll. Det finns inget som hindrar en lösning, trots att inget flöde kan ske genom begränsningsytan, då det som "flödar ut ur" den ena punktkällan kan "flöda in i" den andra...