Tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F(TM), FFM232(FFM233)
Måndagen 17 oktober 2011, 14.00-18.00, M
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Martin Cederwall, tel. 7723181.

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, typgodkänd kalkylator, lexikon samt Olle Branders formelsamling.

Alla svar, utom till uppgift 1, skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Maximal poäng på tentamen är 60. För betyg 3 krävs 24 poäng, för betyg 4 36 poäng, och för betyg 5 48 poäng. Lycka till!

---

1. Svara på följande tre delfrågor (endast svar skall ges)!
(3 per korrekt besvarad deluppgift, 10 för alla tre.)

a) Ange värdet av tangentlinjeintegralen $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, där $\vec{F} = F_0 a(y\hat{x} - x\hat{y})/(x^2+y^2)$ och den slutna kurvan C parametriseras enligt $(x,y,z) = b(\cos t, \sin t, 0)$, $0 \leq t < 2\pi$.

b) Beräkna $(\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{ik}\delta_{jl})M_{ij}M_{kl}$, där M_{ij} är elementen i matrisen

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Ange för vilken enhetsvektor $\vec{n}$ riktningsderivatan av funktionen $\phi(\vec{r}) = \frac{\cos\theta}{r^2}$ i riktningen $\vec{n}$ i punkten $(x,y,z) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ är maximal. (Svaret kan ges i termer av Cartesiska eller sfäriska basvektorer i punkten ifråga, det spelar ingen roll.)

2. Vektorfältet $\vec{F}$ ges av

$$\vec{F}(\vec{r}) = F_0 a^3 \left(\frac{2\cos\theta}{r^3}\hat{r} + \frac{\sin\theta}{r^3}\hat{\theta}\right) + F_1 a^2 \frac{\vec{r} - 2a\hat{x}}{|\vec{r} - 2a\hat{x}|^3}\,.$$

Beräkna normalytintegralen av $\vec{F}$ över en begränsningsytan till en kub med sidlängden $3a$ och sidorna parallella med koordinataxlarna, vars mittpunkt är belägen i $(x,y,z) = (\frac{5a}{2}, 0, 0)$.
(10 poäng)

3. Visa att det tvådimensionella koordinatsystemet med koordinater τ, φ, som definieras av

$$x = a\cosh\tau\cos\varphi$$
$$y = a\cosh\tau\sin\varphi$$

är ortogonalt i det område där det är giltigt. Vilka kurvor i planet beskrivs av $\tau =$ konstant resp. $\varphi =$ konstant? Bestäm systemets skalfaktorer.
(10 poäng)

4. Visa att temperaturfördelningen

$$T(\vec{r}, t) = T_0 \sin \frac{\pi x}{L} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

för ett visst värde på konstanten τ (vilket?) är en lösning till värmeledningsekvationen i en cylinder med tvärsnittsarean A och längden L (x-koordinaten går längs med cylindern), med Dirichlets homogena randvillkor vid $x = 0$ och $x = L$ samt Neumanns homogena randvillkor på den övriga begränsningsytan. Beräkna värmeenergin i kroppen som funktion av tiden. Hur överensstämmer tidsberoendet med principen om energins bevarande?
(Värmeledningsekvationen lyder

$$\frac{\partial T}{\partial t} - k\Delta T = 0\,,$$

där $k = \frac{\lambda}{c\rho}$, λ är värmeledningsförmågan, c värmekapacitiviteten och ρ densiteten.)
(10 poäng)

5. Bestäm den elektrostatiska potentialen mellan två mycket långa koncentriska metallcylindrar med radier a och b ($b > a$). Den inre cylindern är jordad (potentialen är noll) och den yttre hålls vid potentialen V. Hur stora ytladdningar ansamlas vid de två begränsningsytorna? (Potentialen kan betraktas som konstant för $\varrho < a$ och $\varrho > b$.) Hur stor är kapacitansen per längdenhet hos denna kondensator (kapacitansen definieras som laddning genom potentialskillnad)?
(10 poäng)

6. Man vill lösa den partiella differentialekvationen

$$\Delta\phi = \gamma\left(\delta^3(\vec{r} - \frac{a}{2}\hat{z}) - \delta^3(\vec{r} + \frac{a}{2}\hat{z})\right)\,,$$

i området $r \leq a$, med Neumanns homogena randvillkor på sfären $r = a$. γ är en konstant. Har ekvationen någon lösning? Argumentera övertygande i fysikaliska och/eller matematiska termer. Rita gärna.
(10 poäng)