Lösningar till tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F/TM, FFM232/FFM233
Tisdagen 10 januari 2012, 8.30-12.30

---

1. a) 0

   b) $\frac{1}{2}$

   c) $-\hat{x}\,(=-\hat{r})$

2. Fältet har en punktkälla med styrkan $4\pi A$ i $\vec{r}=a\hat{z}$, som ligger innanför ytan. Den enda rymdkällan är för $z<0$, där $\nabla\cdot\vec{F}=C$. Dessutom kan det finnas en ytkälla vid $z=0$. Den bestäms av diskontinuiteten hos fältets normalkomponent, dvs. z-komponent. Endast delen av $\vec{F}$ med koefficienten A bidrager, och ytkällans styrka är
$$\sigma=-\frac{Aa}{(\varrho^2+a^2)^{3/2}}\,.$$
Hela integralen ges av den totala källan innanför sfären. Punktkällan bidrager $4\pi A$. Rymdkällan ger $\frac{1}{2}\frac{4\pi(2a)^3}{3}C$. Ytkällan, slutligen, får integreras över cirkelskivan med radien $2a$, med resultatet $-2\pi A(1-\frac{1}{\sqrt{5}})$. Värdet av integralen är
$$\int\limits_S \vec{F}\cdot d\vec{S}=2\pi A\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+\frac{16}{3}\pi a^3 C\,.$$
Alternativt kan bidraget från "A-termen" räknas ut genom att ta reda på hur stor rymdvinkel den övre halvan av sfären upptar, sett från punktkällan. Genom att lägga en sfär med radien $a\sqrt{5}$ kring rymdkällan, som skär den ursprungliga sfären i xy-planet, ser man att cirkeln i xy-planet svarar mot en vinkel θ_0 med $\cos\theta_0=-\frac{1}{\sqrt{5}}$. Den sökta rymdvinkeln är därför $2\pi\int_o^{\theta_0}\sin\theta d\theta=2\pi(1+\frac{1}{\sqrt{5}})$.

4. $h_u=a\sqrt{u^2+v^2}$
$h_v=a\sqrt{u^2+v^2}$
$h_\varphi=auv$
u-yta: $z=-\frac{x^2+y^2}{2au^2}+\frac{u^2a}{2}$, rotationsparaboloid med öppningen nedåt $z_{\max}=u^2a/2$.
v-yta: $z=\frac{x^2+y^2}{2av^2}-\frac{v^2a}{2}$, rotationsparaboloid med öppningen uppåt $z_{\min}=-v^2a/2$.
φ-yta: $\tan\varphi=\frac{y}{x}$, halvplan från z-axeln.
Laplaceoperatorn ges av
$$\Delta=\frac{1}{a^2(u^2+v^2)}\left(\frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial u}u\frac{\partial}{\partial u}+\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial v}v\frac{\partial}{\partial v}\right)+\frac{1}{u^2v^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\,.$$

5. Värmeledningsekvationen (utan tidsberoende) blir Poissons ekvation, $\Delta T=-\frac{s_0}{\lambda}$. Det enda vinkelberoendet är $\cos\theta$ i randvillkoret, så det är rimligt att "gissa" att inga andra funktioner av θ och φ dyker upp i lösningen. Vi använder separationsmetoden, och ansätter $T=f(r)+g(r)\cos\theta$. Insättning av uttrycket för Laplaceoperatorn i sfäriska koordinater ger
$$\Delta T=\frac{1}{r^2}(r^2f')'+\frac{1}{r^2}(r^2g')'\cos\theta-\frac{2}{r^2}g\cos\theta\,.$$

Ekvationerna för f och g blir

$$\frac{1}{r^2}(r^2 f')' = -\frac{s_0}{\lambda}\,,$$
$$\frac{1}{r^2}(r^2 g')' - \frac{2}{r^2} g = 0\,.$$

Lösningarna är

$$f(r) = A - \frac{s_0}{6\lambda} r^2\,,$$
$$g(r) = Br\,,$$

där vi har slängt bort singulära lösningar. Matchning med randvillkoret ger $A = T_0 + \frac{s_0}{6\lambda}R^2$, $B = \frac{T_0}{3R}$. Temperaturfördelningen är

$$T = \frac{s_0}{6\lambda}(R^2 - r^2) + T_0\left(1 + \frac{r}{3R}\cos\theta\right)\,.$$