Lösningar till tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F, FFM232
Tisdagen 21 augusti 2012, 14-18

---

1. a) $-\pi F_0 b$

   b) $\frac{\log 2}{\pi}$

   c) $\alpha = -1$

2. a) Integralen ges av en inneslutna källan. En åttondel av varje cirkelskiva innesluts, och alltså är

$$\int_{\partial V} \vec{H} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{8} \cdot 2 \cdot \pi a^2 \sigma = \frac{1}{4} \pi a^2 \sigma \,.$$

   b) Normalen till S_2 är enligt konventionen riktad utåt, dvs. i $\hat{\varphi}$-led. ∂S_2 omsluter de tre virveltrådarna i positiv led, och därför är

$$\int_{\partial \tilde{S}_2} \vec{H} \cdot d\vec{r} = 3j \,.$$

3. Fältet fås som

$$\vec{F} = -\nabla \phi = \left(\hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \gamma \frac{\cos^2\theta - \frac{1}{3}}{r^3} = \gamma \frac{\hat{r}(3\cos^2\theta - 1) + \hat{\theta} \sin 2\theta}{r^4} \,.$$

Fältlinjer fås genom att lösa ekvationen $\frac{d\vec{r}}{d\tau} = f(\vec{r})\vec{F}(\vec{r})$. Vi observerar att $\frac{d\vec{r}}{d\tau} = \hat{r}\frac{dr}{d\tau} + \hat{\theta} r \frac{d\theta}{d\tau}$, så ekvationerna blir

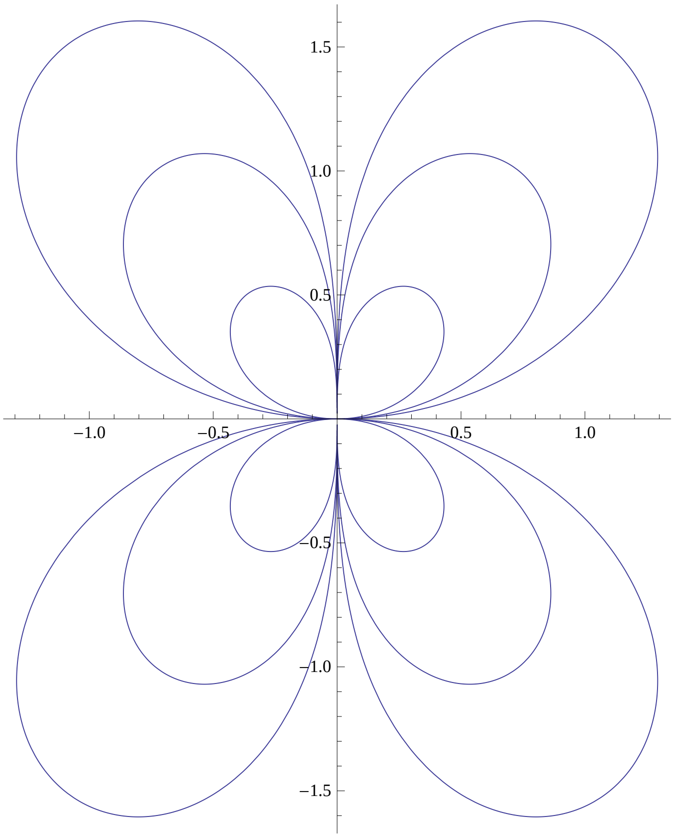
$$\frac{dr}{d\tau} = \gamma f \frac{3\cos^2\theta - 1}{r^4} \,,$$
$$\frac{d\theta}{d\tau} = \gamma f \frac{\sin 2\theta}{r^5} \,.$$

Om vi vill identifiera parametern τ med θ måste vi uppenbarligen välja $f = \frac{r^3}{\gamma \sin 2\theta}$. Insättning i den första ekvationen (alternativt dividerar man ekvationerna med varandra) ger

$$\frac{dr}{r} = \frac{3\cos^2\theta - 1}{\sin 2\theta} d\theta \,,$$

vilket kan integreras till $\log r = \frac{1}{2} \log(\text{const.} \times \sin^2\theta \cos\theta)$, dvs.

$$r = c \sin\theta \sqrt{|\cos\theta|} \,.$$



(Detta är ett fält från en kvadrupol i origo.)

4. Låt planet vara xy-planet, och låt laddningen ligga på positiva z-axeln. Randvillkoret på planet är att potentialen är konstant, dvs. fältets tangentiella komponent är noll. Fältet fås genom spegling:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\vec{r}-d\hat{z}}{|\vec{r}-d\hat{z}|^3} - \frac{\vec{r}+d\hat{z}}{|\vec{r}+d\hat{z}|^3}\right), & z > 0\,, \\ 0\,, & z < 0\,. \end{cases}$$

Vid $z = 0^+$ är

$$\vec{E}(x, y, 0^+) = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0}\frac{d}{(\varrho^2 + d^2)^{3/2}}\hat{z}\,,$$

och ytladdningen, som ges av $\epsilon_0(E_z(x, y, 0^+) - E_z(x, y, 0^-))$ blir

$$\sigma = -\frac{Q}{2\pi}\frac{d}{(\varrho^2 + d^2)^{3/2}}\,.$$

Integreras denna över xy-planet fås den totala laddningen $-Q$.

5. Den stationära värmeledningsekvationen lyder $\Delta T = -\frac{s}{\lambda}$. Här är s värmekälltäthet (energi/volymsenhet), som i detta fall är $s = \frac{\epsilon}{A}\delta(x)$. Den endimensionella värmeledningsekvationen blir

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\frac{\epsilon}{A\lambda}\delta(x)\,.$$

Lösningen är

$$T(x) = \begin{cases} T_0 + \frac{\epsilon}{2A\lambda}(x+a)\,, & -a < x < 0\,, \\ T_0 - \frac{\epsilon}{2A\lambda}(x-a)\,, & 0 < x < a\,, \end{cases}$$

[Dimensionskontroll.] Rimlighet kan t.ex. kollas genom att undersöka hur $T(0)$ beror på de olika parametrarna.

6. Man kan använda den Gauss-analoga satsen $\int_{\partial V} p\, d\vec{S} = \int_V \nabla p\, dV$, där p är trycket, och kraften på ett ytelement är $d\vec{F} = p\, d\vec{S}$.