Lösningar till tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F, FFM232
Tisdagen 23 oktober 2012, 8.30-12.30

Granskning tisdag 13 november 12-13, rum O6102.

---

1. a) $-2\delta_{i2}$

   b) $\frac{1}{\tau}$ (Detta var det ursprungligen givna svaret. Jag har dock fått påpekat för mig att det bygger på att $\tau > 0$. Om $\tau < 0$ är resultatet $-\frac{1}{\tau}$.)

   c) πab

2. Fältet $F_0 a^2 \frac{\vec{r}-\frac{a}{2}\hat{z}}{|\vec{r}-\frac{a}{2}\hat{z}|^3}$ representerar en punktkälla med $q = 4\pi F_0 a^2$ belägen i $(0,0,\frac{a}{2})$. Den bidrager till integralen med $4\pi F_0 a^2$.

   Fältet $\frac{F_0}{a}(z\hat{z} + a(\hat{x}-\hat{y}))$ har en rymdkälla med $\rho = \frac{F_0}{a}$ för $z < 0$. Rymdkällans bidrag till integralen är $\frac{F_0}{a} \cdot \pi a^2 \cdot a = \pi F_0 a^2$.

   Dessutom är fältet diskontinuerligt över xy-planet. Diskontinuiteten i dess z-komponent, dvs. ytladdningen, är

$$F_0 a^2 (-\frac{a}{2}) \frac{1}{(\varrho^2 + \frac{a^2}{4})^{3/2}} .$$

   Integreras detta över cirkelskivan $\varrho < a$ fås den total laddningen på ytan. Resultatet, och ytladdningens bidrag till integralen, är $-2\pi F_0 a^2 (1 - \frac{1}{\sqrt{5}})$.

   Integralens totala värde är alltså $\pi F_0 a^2 (3 + \frac{2}{\sqrt{5}})$.

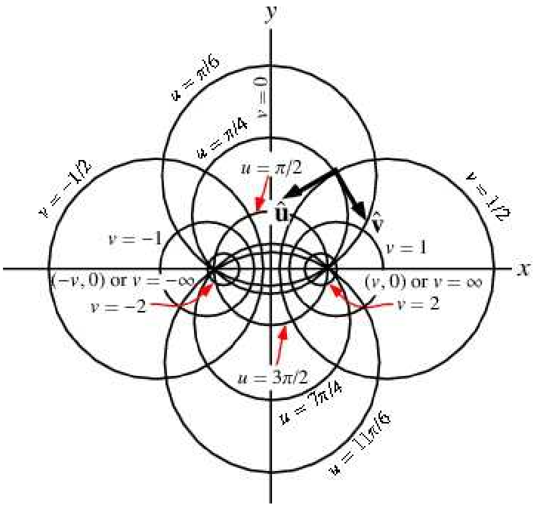
4. Bilda $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi}$ och $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta}$:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} = \frac{a}{(\cosh\xi - \cos\eta)^2}(1 - \cosh\xi\cos\eta, -\sinh\xi\sin\eta)$$
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} = \frac{a}{(\cosh\xi - \cos\eta)^2}(-\sinh\xi\sin\eta, \cosh\xi\cos\eta - 1)$$

   Uppenbarligen är $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} = 0$, så systemet är ortogonalt. Skalfaktorerna är

$$h_\xi = h_\eta = \frac{a}{\cosh\xi - \cos\eta} .$$

   Med hjälp av de givna relationerna ser man att både ξ och η-linjerna är cirklar. De skär varandra vinkelrätt. Varje ξ-linje ("η-yta") går genom punkterna $(\pm a, 0)$. De små cirklarna runt dessa punkter är "ξ-ytor" för mycket stora positiva och negativa ξ.



(Bilden är lånad från http://mathworld.wolfram.com)

5. Problemet är endimensionellt. Låt en x-koordinat vara 0 vid innerväggen och L vid ytterväggen. Lösningen till den stationära värmeledningsekvationen är att temperaturen varierar linjärt i x, och med villkoret att $T(0) = T_1$ fås $T(x) = T_1 - kx$. Värmeströmmen blir då $j = \lambda k$. Villkoret vid $x = L$ lyder alltså $\lambda k = \alpha(T_1 - kL - T_0)$, så k tar värdet $k = \frac{\alpha(T_1 - T_0)}{\lambda + \alpha L}$. Vid ytterväggen är temperaturen

$$T(L) = \frac{\lambda T_1 + \alpha L T_0}{\lambda + \alpha L} = \frac{T_1 + \frac{\alpha L}{\lambda} T_0}{1 + \frac{\alpha L}{\lambda}}$$

(det ser ut som ett viktat medelvärde av T_1 och T_0).

Dimensionskontroll: Eftersom $\vec{j} = -\lambda \nabla T$ och $\vec{n} \cdot \vec{j} = \alpha(T - T_0)$, har λ och αL samma dimension.

Rimlighetskontroll: Det räcker att undersöka beroendet av den dimensionslösa parametern $\frac{\alpha L}{\lambda}$. Ett stort värde svarar mot att värmeutstrålningen är stor (även för relativt små temperaturskillnader), eller ekvivalent att värmeledningsförmågan är liten. Randvillkoret ser ut att effektivt bli Dirichlet, och mycket riktigt är $T(L) \approx T_0$. I det motsatta fallet är värmeutstrålningen liten (enligt det dimensionslösa måttet), randvillkoret blir nästan Neumann, och temperaturen vid ytterväggen är $T(L) \approx T_1$.

6. Med lägen och laddningar enligt uppgiftstexten, och sedan avstånden uttryckts med cosinusteoremet, är potentialen

$$\phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2br\cos\theta}} - \frac{a}{b} \frac{1}{\sqrt{r^2 + \frac{a^4}{b^2} - 2\frac{a^2}{b} r\cos\theta}} \right] .$$

För att ta reda på ytladdningen behöver vi den radiella komponenten av det elektriska fältet, som är

$$E_r(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{r - b\cos\theta}{(r^2 + b^2 - 2br\cos\theta)^{3/2}} - \frac{a}{b} \frac{r - \frac{a^2}{b}\cos\theta}{(r^2 + \frac{a^4}{b^2} - 2\frac{a^2}{b} r\cos\theta)^{3/2}} \right] .$$

Vid radien $r = a$ blir den

$$E_r|_{r=a} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a^2 - b^2}{a(a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta)^{3/2}} .$$

Ytladdningsfördelningen σ är $-\epsilon_0$ gånger detta. Den totala laddningen Q' på ytan $r = a$ fås genom integration över sfären:

$$Q' = \int_{r=a} \sigma dS = -\frac{Q}{4\pi}\frac{a^2 - b^2}{a} 2\pi a^2 \int_0^\pi \frac{\sin\theta\, d\theta}{(a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta)^{3/2}} = \ldots = -Q\,.$$