

Tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F, FFM232

Tisdagen 23 oktober 2012, 8.30-12.30

Examinator: Martin Cederwall

Jour: Per Salomonson, tel. 7723231 eller 168437, besöker tentamenssalarna c:a 9.30 och 11.30.

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, typgodkänd kalkylator, lexikon samt Olle Branders formelsamling.

Alla svar, utom till uppgift 1, skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Maximal poäng på tentamen är 60. För betyg 3 krävs 24 poäng, för betyg 4 36 poäng, och för betyg 5 48 poäng.

Rättningsgranskning tisd. 13 november, rum O6102.

Lycka till!

1. Svara på följande tre delfrågor (endast svar skall ges)!

(3 poäng per korrekt besvarad deluppgift, 10 för alla tre.)

a) Beräkna vektorn $A_i = \epsilon_{ijk} \delta_{mn} B_{jm} C_{nk}$, där B_{ij} och C_{ij} är matriselementen för matriserna

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Beräkna $\int_{-\tau}^{\tau} \delta'(t) e^{-\frac{t}{\tau}} dt$.

c) Beräkna linjeintegralen $\int_C x \hat{y} \cdot d\vec{r}$, där C är kurvan $\vec{r} = (a \cos t, b \sin t, c)$, $0 \leq t < 2\pi$. a , b och c är konstanter.

2. Beräkna $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, där

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{cases} F_0 a^2 \frac{\vec{r} - \frac{a}{2} \hat{z}}{|\vec{r} - \frac{a}{2} \hat{z}|^3}, & z > 0 \\ \frac{F_0}{a} (z \hat{z} + a(\hat{x} - \hat{y})), & z < 0 \end{cases}$$

och S är begränsningsytan till volymen $\varrho < a$, $-a < z < a$.

(10 poäng)

3. Härled kontinuitetsekvationen. Var tydlig med vilka eventuella antaganden som används.

(10 poäng)

4. Ett tvådimensionellt kroklinjigt koordinatsystem med koordinater ξ och η ges genom relationerna

$$x = \frac{a \sinh \xi}{\cosh \xi - \cos \eta}$$
$$y = \frac{a \sin \eta}{\cosh \xi - \cos \eta}$$

Visa att systemet är ortogonalt och bestäm dess skalfaktorer. Relationerna ovan innebär (efter utnyttjande av diverse trigonometriska och hyperboliska identiteter) att ekvationerna

$$x^2 + (y - a \cot \eta)^2 = \frac{a^2}{\sin^2 \eta}$$
$$(x - a \coth \xi)^2 + y^2 = \frac{a^2}{\sinh^2 \xi}$$

är uppfyllda. Skissera systemets koordinatlinjer.
(10 poäng)

5. Man vill ta reda på hur värme läcker ut genom en husvägg. Väggen har tjockleken L och värmeledningsförmågan λ . Inomhustemperaturen är T_1 och utomhustemperaturen T_0 . Väggens insida håller samma temperatur som råder inomhus, T_1 . Vid väggens utsida visar det istället sig att värmeströmmen \vec{j} ut ur väggen är proportionell mot skillnaden mellan väggens utsidas temperatur och utomhustemperaturen, så att $\vec{n} \cdot \vec{j} = \alpha(T - T_0)$. Bestäm temperaturfördelningen i väggen. Vilken temperaturen har väggens utsida?

(Det får förutsättas att värmeströmmen är proportionell mot gradienten av temperaturen med proportionalitetskonstant $-\lambda$ och att T uppfyller den tidsberoende värmeledningsekvationen.)

(10 poäng)

6. En punktladdning Q är belägen i $\vec{r} = b\hat{z}$, och man söker potentialen från denna laddning innanför sfären $r = a$ ($a > b$), då randvillkoret är att den elektriska potentialen ϕ är noll på randen $r = a$. Visa att denna potential fås genom att introducera en fiktiv spegelladdning $-\frac{a}{b}Q$ i punkten $\vec{r} = \frac{a^2}{b}\hat{z}$. Ge ett uttryck för den ytladdningsfördelning som induceras på sfären $r = a$, om man antar att $\phi = 0$ även för $r > a$. Kontrollera att den totala inducerade laddningen på sfären är $-Q$.

(10 poäng)