Tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F, FFM232
Tisdagen 15 januari 2013, 8.30-12.30, M
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Martin Cederwall, tel. 7723181, besöker tentamenssalarna c:a 9.30 och 11.30.

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, typgodkänd kalkylator, lexikon samt Olle Branders formelsamling.

Alla svar, utom till uppgift 1, skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Maximal poäng på tentamen är 60. För betyg 3 krävs 24 poäng, för betyg 4 36 poäng, och för betyg 5 48 poäng.

Lycka till!

---

1. Ange vilka av följande påståenden som är riktiga resp. felaktiga!
(10 poäng. Poängen ges av antal rätta svar minus antal felaktiga, dock minst noll.)

a) Ett kraftfält $\vec{F} = \frac{j}{2\pi\varrho}\hat{\varphi}$ är konservativt, eftersom det har den skalära potentialen $-\frac{j}{2\pi}\varphi$.

b) Maxwells ekvationer i vacuum tillåter våglösningar, vars utbredningshastighet är lägre än ljushastigheten.

c) $\Delta\vec{F} = \nabla(\nabla\cdot\vec{F}) - \nabla\times(\nabla\times\vec{F})$.

d) Ett divergensfritt fält kan skrivas som rotationen av en vektorpotential, som är unikt bestämd modulo en konstant vektor.

e) Vektorfältet $\vec{G}(\vec{r}) = \frac{\gamma}{4\pi r}\hat{r}$ har en punktkälla i origo.

f) Koordinatsystem vars basvektorer inte är ortogonala är inkonsistenta.

g) Om en yta parametriseras som $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ är det skalära ytelementet $dS = \pm\epsilon_{ijk}n^i\frac{\partial x^j}{\partial u}\frac{\partial x^k}{\partial v}du\,dv$, där $\vec{n}$ är en normerad normalvektor.

h) Om det finns en värmekälltäthet måste man ha ett nollskilt högerled i kontinuitetsekvationen för värmeenergitätheten och värmeströmmen, $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{\jmath} = \ldots$

i) Randvillkor för värmeledningsproblem måste antingen vara på Dirichlets eller Neumanns form för att de, tillsammans med värmeledningsekvationen, unikt skall bestämma temperaturfördelningen.

j) Det faktum att Stokes sats gäller för godtyckliga ytor med samma rand kan illustreras genom att använda Gauss sats för volymen som begränsas av två olika sådana ytor.

2. Beräkna $\int_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$, där S är ellipsoiden $x^2 + y^2 + \frac{1}{4}z^2 = a^2$ och $\vec{F}$ är fältet från källfördelningen $\rho(\vec{r}) = \rho_0\big(\pi a^2\delta^2(x,y) - 2a\delta(z)\big)$.
(10 poäng)

3. Faradays lag lyder

$$\int_{\partial S}\vec{E}\cdot d\vec{r} = -\frac{d\Phi}{dt}\,,$$

där Φ är det magnetiska flödet $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ genom ytan S. Visa att Faradays lag, tillsammans med Maxwells ekvation $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ och under antagande om laddningskonservering kräver att den statiska ekvationen $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{\jmath}$ modifieras för tidsberoende fält.
(10 poäng)

4. Det skalära fältet ϕ ges av $\phi(\vec{r}) = r(1 - \cos\theta)$. Bestäm och rita nivåytorna till ϕ och fältlinjerna till $\nabla\phi$.
(10 poäng)

5. En mycket lång cirkulär cylinder med radien R innehåller en värmekälla med den konstanta effekten p per längdenhet, jämnt fördelad över tvärsnittsytan. Cylinderns begränsningsyta hålls vid temperaturen $T = T_0 + \tau \cos 2\varphi$. Bestäm den stationära temperaturfördelningen i cylindern.
(10 poäng)

6. En tunn stav med längden 2ℓ har konstant elektrisk laddning $Q/2\ell$ per längdenhet. Vad blir den elektriska potentialen i de punkter som är belägna i planet som skär staven vinkelrätt i dess mittpunkt?
(10 poäng)