Lösningsförslag till tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F, FFM232
Onsdagen 21 augusti 2013, 14.00-18.00

---

1. a) 0

   b) -12π

   c) $1, 1, -1, -1$

2. Ytan S är mantelytan till en kon, som är unionen av alla raka sträckor mellan spetsen i punkten $(0, 0, \frac{a}{2}$ och punkter på cirkeln i xy-planet med radie $2a$ och centrum i origo.

   Ytkällan, med total laddning q är placerad så att flödet från den är symmetrisk om man vänder den upp och ned ($z \to -z$), och därför bidrager den med $\frac{q}{2}$. För att beräkna punktkällans bidrag räcker det att veta vilken rymdvinkel ytan upptar. Det är samma rymdvinkel som en sfärisk kalott som begränsas av cirkeln $\theta = \frac{\pi}{4}$, varför

   $$\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \sin\theta = 2\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) .$$

   Integralens värde blir

   $$\frac{q}{2} + \frac{q}{4\pi} 2\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = q\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

3. Funktionen f kan enklast skrivas som $f = x^2 - y^2$. Nivåytorna är hyperboliska cylindrar $y = \pm\sqrt{x^2 - f}$. Vektorfältet är $\vec{F} = 2(x\hat{x} - y\hat{y})$. Standardräkning för fältlinjer ger vid handen att de är hyperblerna $xy =$ konst., $z = z_0$.

   Undersökningen kan också göras i cylindriska koordinater.

4. Direkt insättning ger

   $$\begin{aligned}
   \frac{\partial}{\partial t} T(\vec{r}, t) &= T_0 t_0^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{3}{2} t^{-\frac{5}{2}} e^{-\frac{r^2}{4kt}} + t^{-\frac{3}{2}} \frac{r^2}{4kt^2} e^{-\frac{r^2}{4kt}}\right) \\
   &= T_0 t_0^{\frac{3}{2}} t^{-\frac{5}{2}} e^{-\frac{r^2}{4kt}} \left(-\frac{3}{2} + \frac{r^2}{4kt}\right) , \\
   \Delta T(\vec{r}, t) &= T_0 t_0^{\frac{3}{2}} t^{-\frac{3}{2}} \partial_i \left(\frac{x_i}{2kt} e^{-\frac{r^2}{4kt}}\right) \\
   &= T_0 t_0^{\frac{3}{2}} t^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2kt} - \frac{r^2}{(2kt)^2}\right) \\
   &= T_0 t_0^{\frac{3}{2}} t^{-\frac{5}{2}} k^{-1} e^{-\frac{r^2}{4kt}} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{4kt}\right) .
   \end{aligned}$$

   Integralen av $T(\vec{r}, t)$ över hela $\mathbb{R}^3$ är $(4\pi k t_0)^{3/2}$, oberoende av t. Samtidigt är $\lim_{t\to 0^+} T(\vec{r}, t) = 0$ för alla $\vec{r} \neq 0$. Därför är $T(\vec{r}, 0^+) = (4\pi k t_0)^{3/2} \delta^3(\vec{r})$.

5. I områdena $0 < \varrho < a$ och $a < \varrho$ gäller Laplaces ekvation för den elektrostatiska potentialen, som alltså har formen

$$\phi = A \log \frac{\varrho}{\varrho_0} + B$$

i vart och ett av områdena (sålänge $A \neq 0$ är konstanten B onödig, samma sak ryms i ϱ_0). På cylindern skall ϕ vara konstant, och vi kan välja den till noll. Värdet på A för det inre området bestäms av närvaron av linjekällan till $-\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}$. Potentialen skall vara kontinuerlig på cylinderna. Hela lösningen är då:

$$\phi = \begin{cases} -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{\varrho}{R} \,, & 0 < \varrho < a \,, \\ 0 \,, & a < \varrho \,. \end{cases}$$

Det elektriska fältet $\vec{E} = -\nabla\phi$ är

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \varrho} \hat{\varrho} \,, & 0 < \varrho < a \,, \\ 0 \,, & a < \varrho \,. \end{cases}$$

Dess diskontinuitet vid $\varrho = R$ är

$$(E_\varrho)_+ - (E_\varrho)_- = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$$

Ytladdningens storlek är ϵ_0 gånger detta, vilket ger en laddning $-\lambda$ per längdenhet på cylindern.

6. För att kontrollera dimensionerna kan man t.ex. luta sig på dimensionerna hos Lorentzkraften "$F = qE + \ldots$".

Kontrollen av kontinuitetsekvationen kan göras genom direkt insättning av uttrycken för täthet och ström i den. Man använder då lämpligen $\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B})$.