

Tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F, FFM232

Måndagen 21 oktober 2013, 8.30-12.30

Examinator: Martin Cederwall

Jour: Tobias Wenger, tel. 0730-38 14 53, besöker tentamenssalarna c:a kl. 9.30 och 11.30.

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, typgodkänd kalkylator, lexikon samt Olle Branders formelsamling.

Alla svar, utom till uppgift 1, skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Maximal poäng på tentamen är 60. För betyg 3 krävs 24 poäng, för betyg 4 36 poäng, och för betyg 5 48 poäng.

Rättningsgranskning tisd. 12 november kl. 12-13, rum O6102.

Lycka till!

1. Svara på följande tre delfrågor (endast svar skall ges)!

(3 per korrekt besvarad deluppgift, 10 för alla tre.)

a) Vad är värdet av integralen $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, där S är en sfär med radien a och mittpunkt i origo, och vektorfältet \vec{F} ges av $\vec{F} = \frac{q}{4\pi} \frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}$, där $\vec{r}_0 = \frac{a}{5}(\hat{x} - 4\hat{y} - 3\hat{z})$?

b) Vad är värdet av integralen $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, där kurvan C parametriseras enligt $(x, y, z) = (1 + 2 \cos 6\tau, 1 + 2 \sin 6\tau, 1 + 4 \sin 12\tau)$, $0 \leq \tau \leq 2\pi$, och vektorfältet \vec{F} ges av $\vec{F} = \frac{y\hat{x} - x\hat{y}}{x^2 + y^2}$?

c) I två dimensioner kan man, förutom skalärprodukten, definiera en "kryssprodukt" av två vektorer där resultatet är en skalär,

$$\vec{a} \star \vec{b} = \epsilon_{ij} a_i b_j.$$

För vilka värden på talen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gäller

$$\nabla(\vec{a} \star \vec{b}) = \alpha \vec{a}(\nabla \star \vec{b}) + \beta(\vec{a} \star \nabla)\vec{b} + \gamma \vec{b}(\nabla \star \vec{a}) + \delta(\vec{b} \star \nabla)\vec{a}?$$

2. En yta S ges i cylindriska koordinater av $\varrho = 4(\frac{a}{2} - z)$, $z \geq 0$, och har normalen riktad så att $\vec{n} \cdot \hat{z} > 0$. Vektorfältet \vec{F} är det resulterande fältet från en punktkälla q i punkten $(0, 0, -2a)$ och en ytkälla med konstant ytkälltäthet $\frac{q}{\pi a^2}$ på cirkelskivan $z = 0$, $\varrho \leq a$. Beräkna normalytintegralen av \vec{F} över S . (10 poäng)

3. Ett skalärt fält är givet i cylindriska koordinater enligt $f(\vec{r}) = \varrho^2 \cos 2\varphi$. Bestäm, beskriv och rita nivåytorna till f och fältlinjerna till $\vec{F} = -\nabla f$. (10 poäng)

4. Visa att ett temperaturfält

$$T(\vec{r}, t) = T_0 \left(\frac{t_0}{t} \right)^{3/2} e^{-\frac{r^2}{4kt}},$$

där t_0 är en konstant med dimension tid, är en lösning till den homogena värmeledningsekvationen

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - k\Delta \right) T(\vec{r}, t) = 0$$

på \mathbb{R}^3 för $t > 0$. Undersök hur temperaturen beter sig för små positiva tider ($t \ll t_0$), och ge ett explicit uttryck för “ $\lim_{t \rightarrow 0^+} T(\vec{r}, t)$ ”.

(10 poäng)

5. På en lång rak tråd finns en elektrisk laddning som är jämnt fördelad längs tråden, med en laddnings-täthet (laddning per längdenhet) λ . Tråden befinner sig i vacuum, men omges av en metalldiameter på radien R , vars symmetriaxel sammanfaller med tråden. Inga andra relevanta objekt befinner sig i närheten. Bestäm den elektriska potentialen och det elektriska fältet för alla radier, dvs. både innanför och utanför cylindern. Bekräfta, genom att betrakta det elektriska fältets beteende vid radien R , att cylinderns laddning per längdenhet är $-\lambda$.

(10 poäng)

6. Maxwells ekvationer i vacuum lyder

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= 0, \\ \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0, \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0, \\ \nabla \times \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= 0.\end{aligned}$$

Det elektromagnetiska fältet innehåller energi och rörelsemängd. Energitätheten är

$$\epsilon = \frac{1}{2} (\epsilon_0 |\vec{E}|^2 + \frac{1}{\mu_0} |\vec{B}|^2)$$

och energiströmmen (som är proportionell mot rörelsemängdstätheten) ges av den s.k. Poynting-vektorn

$$\vec{k} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}.$$

Verifiera att dessa två uttryck är dimensionsmässigt korrekta. Visa att energin för elektromagnetiska fält i vacuum (alltså i frånvaro av laddning och ström) är bevarad, dvs. att ϵ och \vec{k} uppfyller kontinuitetsekvationen.

(10 poäng)