Tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F, FFM232
Tisdagen 14 januari 2014, 8.30-12.30
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Sten Salomonson, tel. 031-7869144 eller 0768-179321, besöker tentamenssalarna c:a kl. 9.30 och 11.30.

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, Chalmersgodkänd kalkylator samt Olle Branders formelsamling.

Alla svar, utom till uppgift 1, skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Maximal poäng på tentamen är 60. För betyg 3 krävs 24 poäng, för betyg 4 36 poäng, och för betyg 5 48 poäng.

Lycka till!

---

1. Svara på följande tre delfrågor (endast svar skall ges).
(3 per korrekt besvarad deluppgift, 10 för alla tre.)

a) Vad är värdet av integralen $\oint_S \frac{z\hat{z}}{r^3} \cdot d\vec{S}$, där S är en sfär med mittpunkt i origo?

b) Matriserna $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ ges av

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Beräkna $\epsilon_{ij}\epsilon_{kl}A_{ik}B_{jl}$, där ϵ är den två-dimensionella Levi–Civita-tensorn.

c) Vad är värdet av integralen $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, där C är en cirkel i xy-planet med radien b och centrum i origo genomlöpt i positiv led, och $\vec{F}$ är fältet från två raka virveltrådar, belägna på linjerna $\vec{r} = (t, 0, t)$ respektive $\vec{r} = (-t, 0, t)$, vardera med styrkan j riktad åt det håll som parametern t ökar (i positiv led relativt $\hat{z}$)?

2. Vektorfältet $\vec{F}$ ges av

$$\vec{F} = -F_0 \frac{a^2}{r^2}\hat{r} + F_0 \left(\frac{z}{a} + 3\frac{z^2}{a^2} \right) \hat{z}\,.$$

Beräkna normalytintegralen $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, där S är den koniska ytan $\varrho = a - z$, $0 \le z \le a$, med normalen riktad så att $\vec{n} \cdot \hat{z} > 0$.
(10 poäng)

3. Ett koordinatsystem med koordinater u_1 och u_2 relateras till Cartesiska koordinater via relationerna

$$u_1 = x\,,$$
$$u_2 = x + y\,.$$

Visa att systemet inte är ortogonalt. Beräkna och rita både $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}$ och ∇u_i.
(10 poäng)

4. Ett kvadrupolfält ges av $\vec{F} = -\nabla\phi$, där

$$\phi = \phi_0 \frac{3\cos^2\theta - 1}{r^3}\,.$$

Bestäm och rita fältlinjerna till vektorfältet $\vec{F}$. (Ev. hjälp: $\frac{d}{du}\log(\sin^2 u \cos u) = \frac{3\cos^2 u - 1}{\sin u \cos u}$.)
(10 poäng)

5. Den elektrostatiska potentialen innanför en sfär $r = a$ uppfyller Poissons ekvation med en punktladdning som källa,

$$\Delta\phi = -\frac{Q}{\varepsilon_0}\delta^3(\vec{r})\,,$$

och uppfyller Dirichlets randvillkor då $r = a$: $\phi(a,\theta,\varphi) = \frac{Q\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 a}$. Bestäm potentialen innanför sfären.
(10 poäng)

6. Den komplexa vågfunktionen ψ för en kvantmekanisk partikel uppfyller Schrödingerekvationen,

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V\psi\,,$$

där $V(\vec{r})$ är en potential (en given reell funktion).

Sannolikhetstätheten för partikeln ges av $\rho = |\psi|^2$, och sannolikhetsströmmen är $\vec{\jmath} = -\frac{i\hbar}{2m}(\bar{\psi}\nabla\psi - \psi\nabla\bar{\psi})$ ($\bar{\psi}$ betecknar komplexkonjugatet av ψ). Visa att sannolikhet är bevarad, dvs. att ρ och $\vec{\jmath}$ uppfyller en kontinuitetsekvation.
(10 poäng)