Lösningsförslag till tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F, FFM232
Onsdagen 20 sugusti 2014, 14.00-18.00

---

1. a) 0 (nollvektorn)

   b) 2

   c) j

2. Man kan gå tillväga på olika sätt.

   1) Beräkning med Gauss sats. Vektorfältet $\vec{A} = \frac{z}{\varrho}\hat{\varrho}$ är divergensfritt utanför z-axeln. Dock har det (jämför fältet från en linjekälla med konstant källtäthet) en linekälla på z-axeln med täthet $2\pi z$. Den totala inneslutna källan fås genom att integrera denna linjekälltäthet från $z = -a$ till $z = 2a$, med resultatet $3\pi a^2$, vilket är integralens värde.

   2) Direkt beräkning av integralen fungerar också, t.ex. med z och φ som parametrar.

3. Vi har alltså att undersöka koordinatsystem som beskrivs av

$$u = x^2 + 2\alpha xy + ay^2\,,$$
$$v = bx^2x^2 + 2\beta xy + y^2\,.$$

Om systemet är ortogonalt skall ∇u och ∇v vara ortogonala. Direkt beräkning ger:

$$\frac{1}{2}\nabla u = (x + \alpha y, \alpha x + ay)\,,$$
$$\frac{1}{2}\nabla v = (bx + \beta y, \beta x + y)\,,$$

och alltså

$$\frac{1}{4}\nabla u \cdot \nabla v = \ldots = (b + \alpha\beta)x^2 + (\beta + \alpha b + \alpha + a\beta)xy + (a + \alpha\beta)y^2\,.$$

Detta skall vara 0 överallt. Koefficienterna för x^2 och y^2 ger $a = b = -\alpha\beta$. Insättning i koefficienten för xy ger sedan

$$0 = \beta - \alpha^2\beta + \alpha - \alpha\beta^2 = (\alpha + \beta)(1 - \alpha\beta)\,.$$

De två klasserna av system som ges i uppgiften fås då den ena eller andra av faktorerna är 0.

I det första fallet har vi alltså

$$u = (x + \alpha y)^2\,,$$
$$v = (\alpha x - y)^2\,.$$

Detta ger skalfaktorer enligt

$$\frac{1}{h_u^2} = |\nabla u|^2 = 4(1 + \alpha^2)(x + \alpha y)^2 = 4(1 + \alpha^2)u\,,$$
$$\frac{1}{h_v^2} = |\nabla v|^2 = 4(1 + \alpha^2)(\alpha x - y)^2 = 4(1 + \alpha^2)v\,.$$

Laplaceoperatorn blir

$$\Delta = \frac{1}{h_u h_v}\left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{h_v}{h_u}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{h_u}{h_v}\frac{\partial}{\partial v}\right] = 4(1+\alpha^2)\sqrt{uv}\left[\frac{\partial}{\partial u}\sqrt{\frac{u}{v}}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\sqrt{\frac{v}{u}}\frac{\partial}{\partial v}\right].$$

4. Potentialen kan skrivas $\phi = r^{\alpha-\beta}\cos^\alpha\theta$, och vektorfältet blir

$$\vec{F} = -\nabla\phi = \hat{r}(\alpha-\beta)r^{\alpha-\beta-1}\cos^\alpha\theta - \hat{\theta}\alpha r^{\alpha-\beta-1}\sin\theta\cos^{\alpha-1}\theta\,.$$

Ekvationen för fältlinjerna är $\frac{d\vec{r}}{dt} = C(t)\vec{F}(\vec{r}(t))$, där $\frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{r}\frac{dr}{dt} + \hat{\theta}r\frac{d\theta}{dt}$ (det är klart att fältlinjerna kommer att ha φ =konstant. Genom att dividera komponenterna i r och θ-led fås differentialekvationen

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = \frac{\beta-\alpha}{\alpha}cot\theta\,.$$

Detta är en separabel differentialekvation med lösningarna

$$r(\theta) = C\sin^{\frac{\beta}{\alpha}-1}\theta\,.$$

(Detta skall också ritas för några värden på $\frac{\beta}{\alpha}$.)

5. Vi har att lösa ekvationen $\Delta\phi = -\rho_0$, med randvillkoret $\phi(a,\theta,\varphi) = \phi_0\cos\theta$. Vi kan dela upp problemet i två delar genom $\phi = \phi_p + \phi_h$, där $\Delta\phi_p = -\rho_0$, $\phi_p(a,\theta,\varphi) = 0$ och $\Delta\phi_h = 0$, $\phi_h(a,\theta,\varphi) = \phi_0\cos\theta$. Det är rimligt att tro att phi_p endast har vinkelberoendet 1, och att ϕ_h endast har vinkelberoendet $\cos\theta$. Med denna ansats kan man använda uttrycket för Laplaceoperatorn i sfäriska koordinater, och lösa för det radiella beroendet. Singulära lösningar kan inte accepteras (de skulle svara mot källor eller dipoler i origo). Resultatet är $\phi_p = \frac{1}{6}\rho_0(a^2-r^2)$, $\phi_h = \phi_0\frac{r}{a}\cos\theta$.

6. Se kompendiet.