

Tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F, FFM232

Onsdagen 20 augusti 2014, 14.00-18.00

Examinator: Martin Cederwall

Jour: Martin Cederwall, tel. 031-7723181 eller 0733-500886, besöker tentamenssalarna c:a kl. 15 och 17.

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, Chalmersgodkänd kalkylator samt Olle Branders formelsamling.

Alla svar, utom till uppgift 1, skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Maximal poäng på tentamen är 60. För betyg 3 krävs 24 poäng, för betyg 4 36 poäng, och för betyg 5 48 poäng.

Lycka till!

1. Svara på följande tre delfrågor (endast svar skall ges).

(3 per korrekt besvarad deluppgift, 10 för alla tre.)

a) Vad blir resultatet av integralen $\oint_S \frac{z\hat{z}}{r^3} dS$, där S är en sfär med mittpunkt i origo?

b) Beräkna $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijl}p_k p_l$, där $\vec{p} = \hat{z}$.

c) Vad är värdet av integralen $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, där C är en cirkel i xy -planet med radien a och centrum i origo genomlöst i positiv led, och \vec{F} är fältet från två raka virveltrådar, belägna på linjerna $\vec{r} = (t, 0, t)$ respektive $\vec{r} = (-t + a, -a, t)$, vardera med styrkan j riktad åt det håll som parametern t ökar?

2. En volym begränsas av hyperboloiden $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$ och planerna $z = -a$ och $z = 2a$. Beräkna $\int \vec{A} \cdot d\vec{S}$ över begränsningsytan om

$$\vec{A} = \frac{xz}{x^2 + y^2} \hat{x} + \frac{yz}{x^2 + y^2} \hat{y}.$$

(10 poäng)

3. Ett koordinatsystem med koordinater u och v relateras till Cartesiska koordinater x och y så att både u och v är kvadratiske former i x och y , dvs. linjära funktioner av x^2 , xy och y^2 . Dessutom är koefficienterna för x^2 i u och för y^2 i v båda 1. Om man kräver att uv -systemet skall vara ortogonalt, visa att koefficienterna för $2xy$ i u och v antingen har summan 0 eller produkten 1, och att de möjliga koordinatsystemen är

$$\begin{aligned} u &= x^2 + 2\alpha xy + \alpha^2 y^2, \\ v &= \alpha^2 x^2 - 2\alpha xy + y^2, \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} u &= x^2 + 2\alpha xy - y^2, \\ v &= -x^2 + 2\alpha^{-1} xy + y^2, \end{aligned}$$

där α är konstant. Ge uttrycket för Laplaceoperatorn verkande på ett skalärt fält $\phi(u, v)$ i det första av de två fallen.

(10 poäng)

4. Ett vektorfält ges av $\vec{F} = -\nabla\phi$, där

$$\phi = \phi_0 \frac{z^\alpha}{r^\beta}.$$

Bestäm fältlinjerna till vektorfältet \vec{F} . Skissa fältlinjerna för några värden på konstanterna α och β .
(10 poäng)

5. Den elektrostatiska potentialen innanför en sfär $r = a$ uppfyller Poissons ekvation med en konstant laddningstäthet ρ_0 , och har Dirichlets randvillkor då $r = a$: $\phi(a, \theta, \varphi) = \phi_0 \cos \theta$. Bestäm potentialen innanför sfären.
(10 poäng)

6. Visa att Poissons ekvation i en volym V med villkor på ∂V givna av antingen Dirichlets eller Neumanns randvillkor har en unik lösning (i det senare fallet sånär som på en additiv konstant).
(10 poäng)