Lösningsförslag till tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F, FFM232
Måndagen 27 oktober 2014

---

1. a) 0 (nollvektorn)

   b) $\frac{1}{2}(e + \frac{1}{e})$

   c) 0

2. Arbetet ges av tangentlinjeintegralen av $\vec{F}$ längs kurvan. Den första delen av $\vec{F}$ är fältet från en virveltråd på z-axeln med styrka j. Kurvan går en vinkel π runt z-axeln, så bidraget från den första termen är $\frac{1}{2}j$. Den andra termen är reguljär. Man kan använda Stokes sats, men behöver då sluta kurvan. Det kan göras med den raka sträckan på x-axeln mellan $(-a, 0, 0)$ och $(3a, 0, 0)$. På denna extra kurva är $\vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$. Rotationen av den andra (reguljära) delen av $\vec{F}$ är $\frac{j}{\pi a^2}\hat{z}$. Bidraget från den andra delen av $\vec{F}$ till arbetet är då enligt Stokes sats $\frac{j}{\pi a^2} \cdot \frac{1}{2}\pi(2a)^2 = 2j$. Det eftersökta arbetet är $\frac{5}{2}j$.

3. Den stationära temperaturfördelningen uppfyller

$$\Delta T = -\frac{s}{\lambda} = -\frac{P}{\lambda}\delta^3(\vec{r})$$

   Utanför origo gäller alltså Laplaces ekvation, vars sfäriskt symmetriska lösningar ges av $T = A + \frac{B}{r}$. Konstanten B bestäms av punktkällans styrka till $B = \frac{P}{4\pi\lambda}$, och A bestäms sedan av randvillkoret vid $r = a$ till $A = T_0 - \frac{P}{4\pi\lambda a}$. Lösningen är alltså

$$T = T_0 + \frac{P}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

   Skillnaden i energitäthet (jämfört med temperaturen T_0) ges lokalt ges av $c\rho(T - T_0)$, och för att få den totala energiskillnaden skall detta integreras över klotet. Resultatet är

$$E - E_0 = \frac{c\rho a^2 P}{6\lambda}.$$

4. Man kan använda Greensfunktionsmetoden. Ett litet areaelement med polära koordinater ϱ' och φ' på cirkeln har laddningen

$$dq = \sigma dA' = \frac{Q}{2\pi a} d\varrho' d\varphi'.$$

   Dess avstånd från en punkt på z-axeln är $\sqrt{\varrho'^2 + z^2}$. Bidraget till potentialen i $(0, 0, z)$ blir

$$d\phi(0, 0, z) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0\sqrt{\varrho'^2 + z^2}} = \frac{Q d\varrho' d\varphi'}{8\pi^2\epsilon_0 a\sqrt{\varrho'^2 + z^2}}.$$

   Integration över cirkelytan ger

$$\phi(0, 0, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \log\frac{a + \sqrt{a^2 + z^2}}{|z|}.$$

En kontroll kan bestå i att betrakta potentialen då $|z| >> a$. Då är $\log \frac{a+\sqrt{a^2+z^2}}{|z|} = \frac{a}{|z|} + O((\frac{a}{|z|})^2)$, och alltså $\phi \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|z|}$. Eftersom den totala laddningen på cirkelskivan är Q stämmer det överens med resultatet för en punktkälla.

5. Man behöver först etablera någon relation mellan de nya och gamla koordinaterna. Genom att dela vinkeln θ i figuren på hälften och använda att denna bisektris skär den "lutande" sträckan i figuren vinkelrätt, kan man använda likformighet mellan rätvinkliga trianglar för att komma fram till t.ex. $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}}$, dvs. $\cot\frac{\theta}{2} = \sqrt{\xi^2+\eta^2}$. Det nya koordinatsystemet bestäms av relationerna

$$\begin{aligned}
\xi &= \cot\frac{\theta}{2}\cos\varphi\,,\\
\eta &= \cot\frac{\theta}{2}\sin\varphi\,,\\
r &= r\,.
\end{aligned}$$

Ortogonaliteten kan visas genom att beräkna gradienterna av de nya koordinaterna (vilket får göras i sfäriska koordinater). T.ex. får man

$$\nabla\xi = -\frac{1}{2r\sin^2\frac{\theta}{2}}(\hat{\theta}\cos\varphi + \hat{\varphi}\sin\varphi)\,.$$

Skalfaktorer fås enligt $h_\xi = \frac{1}{|\nabla\xi|}$ osv., vilket ger

$$h_\xi = h_\eta = 2r\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{2r}{1+\xi^2+\eta^2}\,.$$

Laplaceoperatorn konstrueras som vanligt, och blir

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{(1+\xi^2+\eta^2)^2}{4r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)\,.$$

6. En våglösning har formen $\Psi = Ae^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$. Direkt insättning i den givna differentialekvationen ger $(i\hbar)(-i\omega) + \frac{\hbar^2}{2m}(i\vec{k})\cdot(i\vec{k}) = 0$, dvs. $\omega = \frac{\hbar}{2m}k^2$.