Lösningsförslag till tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F, FFM232
Måndagen 5 januari 2015

---

1. a) 0

   b) Nj

   c) 4π

2. Ytan är en del av en cirkulär kon, som har spetsen i $(0,0,3b)$ och skär xy-planet i en cirkel med radie b. Sett från punktkällan uppfyller ytan hela rymdvinkeln 4π utom en öppning nedåt med öppningsvinkeln 2α, där $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, dvs. $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Ytans rymdvinkel sedd från punktkällan är

$$\Omega = 2\pi \int_0^{\frac{5\pi}{6}} \sin\theta\, d\theta = 2\pi(1 + \frac{\sqrt{3}}{2})\,.$$

   Bidraget till integralen från punktkällan är $\frac{Q}{2}(1 + \frac{\sqrt{3}}{2})$.

   Den andra delen består av ett konstant fält som ger bidrag 0, samt en del som har divergensen $\nabla \cdot \vec{F}_2 = \frac{Q}{\pi b^3}$. Den är också noll på cirkelskivan i xy-planet, som man kan sluta ytan med. Gauss sats ger bidraget från $\vec{F}_2$, som blir $\frac{1}{3}\pi b^2 \cdot 3b \cdot \frac{Q}{\pi b^3} = Q$.

   Den eftersökta ytintegralen har värdet $\frac{Q}{2}(3 + \frac{\sqrt{3}}{2})$.

3. Den stationära temperaturfördelningen uppfyller

$$\Delta T = -\frac{s}{\lambda} = -\frac{P}{\lambda}\delta^2(x,y)\,.$$

   Utanför z-aseln gäller alltså Laplaces ekvation, vars cylindriskt symmeriska och z-oberoende lösningar ges av $T = A + B\log\varrho$. Konstanten B bestäms av linjekällans styrka till $B = -\frac{P}{2\pi\lambda}$, och A bestäms sedan av randvillkoret vid $\varrho = a$ till $A = T_0 + \frac{P}{2\pi\lambda}\log a$. Lösningen är alltså

$$T = T_0 - \frac{P}{2\pi\lambda}\log\frac{\varrho}{a}\,.$$

   Skillnaden i energitäthet (jämfört med temperaturen T_0) ges lokalt ges av $c\rho(T - T_0)$, och för att få den totala energiskillnaden per längdenhet av cylindern skall detta integreras över cirkeln. Resultatet är

$$E - E_0 = -c\rho\frac{P}{2\pi\lambda}2\pi\int_0^a d\varrho\,\varrho\log\frac{\varrho}{a} = -\frac{c\rho P a^2}{\lambda}\int_0^1 dx\,x\log x = \frac{c\rho P a^2}{4\lambda}\,.$$

   Från värmeledningsekvationen kan man utläsa att $c\rho/\lambda$ har dimension tid/(längd)^2. P har per definition dimensionen energi/(längd$\times$tid), så svarets dimension är energi/längd, som det skall vara.

4. Man kan använda Greensfunktionsmetoden. Ett litet areaelement med polära koordinater ϱ' och φ' på cirkeln har laddningen

$$dq = \sigma dA' = \frac{Q}{\pi a^2}\varrho' d\varrho' d\varphi'\,.$$

Dess avstånd från en punkt på z-axeln är $\sqrt{\varrho'^2 + z^2}$. Bidraget till potentialen i $(0, 0, z)$ blir

$$d\phi(0, 0, z) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{\varrho'^2 + z^2}} = \frac{Q\varrho' d\varrho' d\varphi'}{4\pi^2 \epsilon_0 a^2 \sqrt{\varrho'^2 + z^2}} \,.$$

Integration över cirkelytan ger

$$\phi(0, 0, z) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a^2}(\sqrt{z^2 + a^2} - |z|) \,.$$

En kontroll kan bestå i att betrakta potentialen då $|z| >> a$. Då är $\sqrt{z^2 + a^2} - |z| = |z|(\sqrt{1 + \frac{a^2}{|z|^2}} - 1) = |z|(\frac{a^2}{2|z|^2} + O(\frac{a^4}{|z|^4}))$, och alltså $\phi \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |z|}$. Eftersom den totala laddningen på cirkelskivan är Q stämmer det överens med resultatet för en punktkälla. En annan kontroll fås vid $z = 0$, där minus z-derivatan av $\epsilon_0 \phi$ har en diskontinuitet $\frac{Q}{\pi a^2}$, vilket stämmer med ytkälltätheten.

5. Differentiering ger

$$dy = \frac{d\theta}{2\cos^2\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2}} = \frac{d\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{d\theta}{\sin\theta} \,,$$

vilket leder till

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2 = \sin^2\theta(dy^2 + d\varphi^2) \,.$$

Man har också $e^y = \tan\frac{\theta}{2}$, varför $\cosh y = \frac{1}{2}(\tan\frac{\theta}{2} + \cot\frac{\theta}{2}) = \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{\sin\theta}$, så

$$ds^2 = \frac{dy^2 + d\varphi^2}{\cosh^2 y} \,.$$

Konformiteten följer av skalfaktorerna för y och φ är lika. Laplaceoperatorn blir

$$\Delta = \cosh^2 y \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right) \,.$$

6. Se kompendiet.