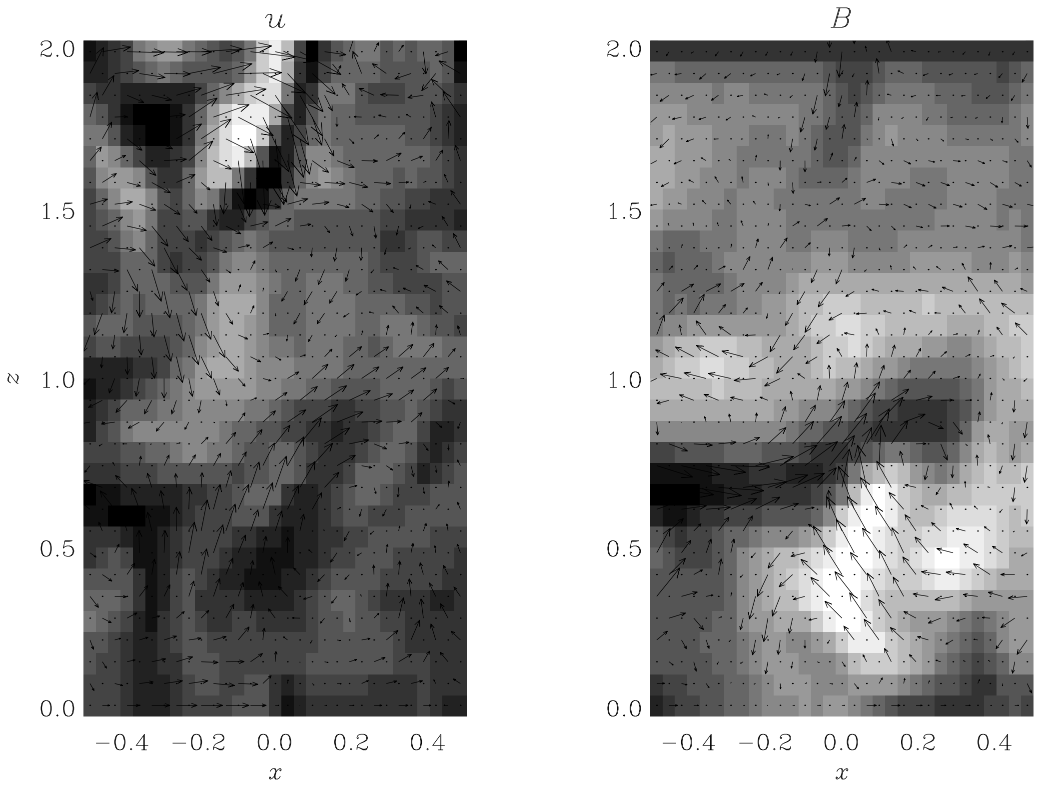
FFM232 Vektorfält och klassisk fysik

Datoruppgift 1: Visualisering av fält

Ulf Torkelsson
Astrofysik
Chalmers & Göteborgs universitet

(Notationsanpassad och lätt modifierad 2010)



1 Inledning

Ett viktigt användningsområde för datorer idag är att visualisera olika fysikaliska förlopp. Detta består ofta i att skapa bilder av två- eller tre-dimensionella fält. Det finns många sofistikerade sätt att göra detta på , särskilt om man vill titta på tidsutvecklingen av tre-dimensionella fält, och speciella programpaket och, i vissa fall, datorer har utvecklats för detta ändamål. Vi skall dock begränsa oss till enklare fält i två dimensioner, för vilka vi kan använda ett enkelt matematikprogram såsom Matlab.

Vi kan särskilja två huvudtyper av fält inom den här kursen, skalära fält och vektorfält. Ett enkelt exempel på ett skalärt fält är trycket i en gas. Skalära fält illustrerar man ofta genom att rita nivåkurvor, det vill säga kurvor längs med vilka fältet antar ett konstant värde. På väderkartor ritar man till exempel ut isobarer för att visa hur trycket varierar. En annan möjlighet är att ge varje punkt en färg, som anger ungefär hur starkt fältet är i just den punkten. Ibland kan man välja att illustrera ett fält med en färgskala och ett annat fält med nivåkurvor.

Vektorfält är något krångligare att illustrera eftersom de skall ha både en storlek och en riktning. Det enklaste sättet att göra detta på med en modern dator är att rita ut pilar. Långa pilar där fältet är starkt och korta pilar där det är svagt. Ett annat sätt är att konstruera fältlinjer. Tangenten till en fältlinje ger då fältets riktning i en punkt, och tätheten av fältlinjerna ger fältets styrka.

Matematiskt sett så är det lite mer komplicerat att konstruera en fältlinje än en nivåkurva. Låt oss starta med ett vektorfält $\vec{u}(\vec{r})$ som beskriver ett stationärt hastighetsfält i en fluid. Om vi nu släpper en testpartikel i fluiden, så kommer den att följa med i fluidens rörelser, det vill säga den kommer att ha hastigheten $\vec{u}$. Testpartikeln beskriver då en bana som ges av

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{u}. \tag{1}$$

Denna bana är en fältlinje för fluidens hastighetsfält. Vi kan beräkna fler fältlinjer genom att låta vår testpartikel starta vid andra punkter i fluiden.

På samma sätt kan vi låtsas att ett godtyckligt vektorfält $\vec{F}$ är ett hastighetsfält, och därigenom beräkna fältlinjer till fältet. Tiden t i ekvationen ovan motsvaras av en allmän parameter τ, vars syfte är att numrera de olika punkterna längs en fältlinje. Vi skriver då ekvationen för en fältlinje som

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}\tau} = C\vec{F}\left(\vec{r}\left(\tau\right)\right), \tag{2}$$

där C är en konstant som kan väljas fritt.

Anmärkning: Det är viktigt att komma ihåg att för tidsberoende fält så beräknar man fältlinjerna vid en konstant tid t. Parametern τ kan därför inte tolkas som vår vanliga tid. Det gäller också att i ett tidsberoende flöde sammanfaller banan för en testpartikel inte med fältlinjerna för hastighetsfältet.

En speciell typ av skalärt fält är en potential. Potentialen kan visualiseras genom att plotta nivåkurvor, vilka vi i detta fall kallar ekvipotentialkurvor (eller ekvipotentialytor om vi arbetar i tre dimensioner). Ur en potential ϕ kan vi beräkna en fältstyrka $\vec{F} = -\nabla\phi$. Till $\vec{F}$ kan vi sedan konstruera fältlinjer. En figur där vi plottar både ekvipotentialytorna till ϕ och fältlinjerna till $\vec{F}$ kallar vi en fältbild.

2 Uppgifter

2.1 Visualisering av ett skalärt fält

Ett dubbelstjärna består av två stjärnor som roterar kring ett gemensamt masscentrum. Om vi approximerar stjärnorna med två punktmassor, och antar att båda massorna rör sig i cirkulära banor, så kan den effektiva potentialen, det vill säga den kombinerade effekten av gravitationskraften och centrifugalkraften, i ett system i vilket stjärnorna ligger i vila, skrivas

$$\phi\left(\vec{r}\right) = -\frac{Gm_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} - \frac{Gm_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|} - \frac{1}{2}\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)^2, \tag{3}$$

där G är Newtons gravitationskonstant, m_1 och m_2 är massorna för de båda stjärnorna, som ligger i punkterna $\vec{r}_1$ och $\vec{r}_2$ relativt masscentrum, och $\vec{r}$ är ortsvektorn utgående från masscentrum. Stjärnorna roterar runt sitt gemensamma masscentrum med en vinkelhastighet

$$\vec{\omega} = \sqrt{\frac{G\,(m_1 + m_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}}\,\hat{z}, \tag{4}$$

om de rör sig i xy-planet.

Uppgift a: I jämvikt måste stjärnornas ytor sammanfalla med ekvipotentialytor. Vi kan alltså bestämma de möjliga formerna på stjärnorna genom att plotta potentialens nivåkurvor i xy-planet. Vi antar att stjärnorna har massorna 1 solmassa och 0.4 solmassor, samt att deras inbördes avstånd är 700 000 km. Beskriv hur stjärnorna kan se ut. Tänk på att de båda stjärnorna inte alltid måste fylla samma ekvipotentialyta. (Ignorera det faktum att potentialen (3) inte är potentialen från dessa stjärnors utbredda massfördelning, utan från en punktmasseapproximation av den.)

Goda råd: Börja med att räkna ut var stjärnorna kommer att ligga om deras masscentrum skall ligga i koordinatsystemets origo. Era uttryck blir enklast om ni placerar stjärnorna längs en koordinataxel. Skapa sedan en två-dimensionell grid av koordinatpunkter. Ett enkelt sätt är att först skapa två en-dimensionella vektor x och y med x- och y-koordinaterna för punkterna, och sedan skapa en två-dimensionell grid *(X, Y)* med hjälp av kommandot

```
[X,Y] = meshgrid(x,y);
```

Tänk på att potentialen är singulär i de punkter där stjärnorna ligger. Undvik därför att lägga gridpunkterna alltför nära stjärnorna. Pröva er fram! Beräkna sedan potentialen och plotta dess nivåkurvor med kommandot *contour*. Använd samma skala i horisontalled och vertikalled, annars blir bilden deformerad. (I matlab finns visst något som heter data aspect ratio.) Ni kan också plotta ϕ som en yta i ett x, y, ϕ-diagram med *mesh*.

Uppgift b: För att se hur en testpartikel skulle röra sig relativt stjärnorna kan vi beräkna fältstyrkan $\vec{F} = -\nabla\phi$, och plotta den över ekvipotentialytorna.

Goda råd: Gradienten beräknas med kommandot *gradient* och vektorerna kan ritas ut med kommandot *quiver*, till exempel

```
[FX,FY] = gradient(-phi);
quiver(X,Y,FX,FY);
```

2.2 Visualisering av ett vektorfält

Hastighetsfältet för en fluid i ett plan är

$$\vec{u}(\vec{r}) = \left(\frac{Jy}{2x_0^2} - \frac{Jy}{(x+x_0)^2 + y^2} - \frac{Jy}{(x-x_0)^2 + y^2}\right)\hat{x} - \left(\frac{Jx}{2x_0^2} - \frac{J\,(x+x_0)}{(x+x_0)^2 + y^2} - \frac{J\,(x-x_0)}{(x-x_0)^2 + y^2}\right)\hat{y}. \tag{5}$$

Detta betyder att fluiden roterar med vinkelhastigheten $-\vec{\omega}_0 = -\frac{J}{2x_0^2}\hat{z}$ kring origo, och dessutom innehåller två virvlar med styrka J som ligger stilla i punkterna $(-x_0, 0)$ och $(x_0, 0)$. (Ett sådant hastighetsfält är faktiskt konsistent med Navier-Stokes ekvationer. Alternativt kan man läggga en extra vinkelhastighet $\vec{\omega}_0$ till alltsammmans, då har man två virvlar som dansar runt varandra med vinkelhastighet $-\vec{\omega}_0$, i en i övrigt stillastående fluid.)

Uppgift a: Plotta några representativa fältlinjer för ett lämpligt val av J och x_0.

Ett annat möjligt hastighetsfält för fluiden är

$$\vec{u}(\vec{r}) = \left(-\frac{Jy}{(x+x_0)^2 + y^2} + \frac{Jy}{(x-x_0)^2 + y^2} \right) \hat{x} + \left(-\frac{J}{2x_0} + \frac{J\,(x+x_0)}{(x+x_0)^2 + y^2} - \frac{J\,(x-x_0)}{(x-x_0)^2 + y^2} \right) \hat{y}. \tag{6}$$

Jämfört med första strömningsbilden har alltså rotationen $\vec{\omega}_0$ ersatts av en konstant hastighet $-\vec{u}_0 = -\frac{J}{2x_0}\hat{y}$, och den ena vivelns rotationsriktning har bytts. (Detta hastighetsfält är också konsistent med Navier-Stokes ekvationer. Alternativt kan man lägga en konstant hastighet $\vec{u}_0$ till alltsammans, och då har man två virvlar som roterar åt motsatta håll, och som påverkar varandra så att de förflyttar sig med hastighet $\vec{u}_0$ genom fluiden, trots att fluiden långt från virvlarna är stilla.)

Uppgift b: Plotta några representativa fältlinjer för ett lämpligt val av J och x_0.

Goda råd: Skriv upp differentialekvationerna för en fältlinje, och lägg dem i en .m-fil, som en funktion. Denna funktion kan du sedan använda som input till en rutin för att lösa differentialekvationer i Matlab. Eftersom ekvationerna ofta blir styva, så är det bäst att använda en rutin för styva ekvationer, som *ode15s*:

```
[t,x] = ode15s('vortex',[0 500],[.1; -.05]);
```

där *vortex* är definierad i en separat fil, tex för uppgift a:

```
function deriv = vortex(t,x)

J = 10;
x0 = 5;

deriv = [J*x(2)*(1/(2*x0^2)-1/((x(1)-x0)^2+x(2)^2) - 1/((x(1)+x0)^2+x(2)^2)); ...
-J*(x(1)/(2*x0^2)-(x(1)-x0)/((x(1)-x0)^2+x(2)^2)-(x(1)+x0)/((x(1)+x0)^2+x(2)^2))];
```

Det går inte att i förväg säga vilket intervall ni behöver använda för t, så ni får pröva er fram.

3 Om rapporten

1. Rapporten skall skrivas i TeX/LaTeX. Arbetar man i par lämnas en gemensam rapport in.
2. Rapporten skall inte omfatta mer än fyra sidor inklusive era figurer.
3. Beskriv i rapporten hur ni går tillväga och vilka ekvationer ni använder, men ni behöver inte redovisa era Matlab-program.
4. Tänk på att ge så mycket detaljer så att någon annan kan upprepa era beräkningar. Glöm inte enheter.
5. Redovisa era resultat i grafisk form när det är lämpligt.
6. Diskutera och tolka era resultat.