FFM232 Vektorfält och klassisk fysik

Datoruppgift 2. Värmeledning

Ulf Torkelsson
Astrofysik
Chalmers & Göteborgs universitet

(Notationsanpassad och mycket lätt modifierad 2010)

1 Inledning

I den här laborationen skall vi studera värmeledningen genom en husvägg. Den fysikaliska processen beskrivs av värmeledningsekvationen

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\nabla^2 T, \tag{1}$$

där T beskriver temperaturen som en funktion läget och tiden, och $k = \lambda/(c\rho)$, där λ är värmeledningsförmågan, c värmekapacitiviten och ρ materialets densitet. För att ge en entydig lösning måste värmeledningsekvationen kompletteras med begynnelse- och rand-villkor för temperaturen, det vill säga vi måste beskriva temperaturfördelningen i väggen vid starttidpunkten, och ge villkor för temperaturen eller temperaturgradienten på väggens inner- och yttersidor vid varje tidpunkt.

2 Numerisk behandling av värmeledningsekvationen

Det finns analytiska tekniker för att lösa den tidsberoende värmeledningsekvationen, men dessa kräver metoder som ingår i Fourier-analyskursen, och faller därmed utanför ramen för vår kurs. Däremot kan vi konstruera en enkel numerisk metod för att lösa värmeledningsekvationen. Låt oss till att börja med anta att väggen har en oändlig utsträckning, men endast en ändlig tjocklek d, så att vi bara behöver studera temperaturvariationer genom väggen. Värmeledningsekvationen reduceras då till den endimensionella ekvationen

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \tag{2}$$

där x är avståndet från väggens innersida. Vi delar nu in väggen i m punkter, så att den första och sista punkten ligger på väggens inner- respektive yttersida, och övriga punkter ligger på ett avstånd $\delta x = d/(m-1)$ från varandra. $\nabla^2 T$ i punkten x_i kan då skrivas

$$\frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\delta x^2}. \tag{3}$$

På samma sätt kan vi approximera tidsderivatan i punkten i med

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{T_i(t+\delta t) - T_i(t)}{\delta t}. \tag{4}$$

Detta ger oss differensekvationen

$$\frac{T_i(t+\delta t) - T_i(t)}{\delta t} = k\frac{T_{i+1}(t) - 2T_i(t) + T_{i-1}(t)}{\delta x^2}. \tag{5}$$

Vi kan nu lösa ut $T_i(t+\delta t)$:

$$T_i(t+\delta t) = T_i(t) + \delta t k\frac{T_{i+1}(t) - 2T_i(t) + T_{i-1}(t)}{\delta x^2}. \tag{6}$$

Detta ger oss en enkel metod för att lösa värmeledningsekvationen.

Vad som nu återstår att göra är att bestämma storleken på tidssteget δt. Om δt blir för stor blir nämligen vår algoritm instabil. För stabilitet krävs ett tidssteg

$$\delta t = K\frac{\delta x^2}{k}, \tag{7}$$

där K skall vara av storleksordningen 0.5. Det syns tydligt om algoritmen blir instabil, eftersom i så fall kommer temperaturen snabbt att bli orimligt hög i någon punkt. Vårt uttryck för δt visar också på begränsningen med vår metod. Tidssteget kommer att bli väldigt kort om vi behöver ett kort avstånd mellan våra punkter. Därför används mer sofistikerade metoder i professionella beräkningar.

3 Uppgifter

Uppgift 1: Skriv ett Matlab-program för att studera hur temperaturfördelningen genom en betongvägg utvecklas med tiden. Vi antar att betongväggen är 30 cm tjock, och att vid starttidpunkten ($t = 0$) håller hela väggen temperaturen $0\,^{\circ}$C, utom väggens innersida som håller temperaturen $22\,^{\circ}$C. Väggens inner- och yttersidor antar vi håller konstant temperatur. Erforderliga materialkonstanter kan hittas i t.ex. Physics Handbook. Ange i rapporten vilka numeriska värden ni använder. Tänk också på att ge en explicit skala på tidsaxeln så man kan se hur snabbt tidsförloppet är. Bestäm dessutom analytiskt den stationära temperaturfördelningen i väggen.

Goda råd: Börja med att bestämma hur många punkter du skall använda, 20 till 30 stycken torde räcka. Den första punkten kommer då att ligga på väggens innersida och den sista punkten på väggens yttersida. Skapa sedan två vektorer *T1* och *T2*, som båda har lika många element som antalet punkter i väggen. *T1* skall få lagra temperaturen vid den gamla tidpunkten, medan *T2* kommer att innehålla temperaturen vid den nya tidpunkten, vilken beräknas ur Ekv. (6). Alltså måste du sätta *T1* till väggens temperaturfördelning vid $t = 0$. Detta är enkelt att göra om du använder funktionen *zeros(m)*, som ger dig en flyttalsvektor med m element, som alla är 0, och sedan kan du bara ändra på temperaturen i den första punkten. Beräkna sedan övriga konstanter som du behöver. Konstruera sedan en loop för att beräkna *T2* ur *T1* enligt Ekv. (6), men ta inte med de första och sista punkterna i *T2*, ty dessa representerar randvillkoren. Upprepa sedan beräkningen av *T2* så många gånger som behövs för att du skall kunna följa temperaturutvecklingen. Tänk på att i slutet av varje steg, när hela *T2* är beräknad måste du tilldela *T1* det värde som *T2* har.

Vi har nu löst värmeledningsekvationen med randvillkoret att temperaturen är konstant på väggens inner- och yttersidor. Detta är ett exempel på ett Dirichlet-villkor. I ett värmeledningsproblem betyder detta att väggen hela tiden tar emot eller avger precis så mycket värme som krävs för att den skall behålla samma temperatur. En annan möjlighet är att väggens inner- och yttersidor är isolerade på ett sådant sätt att de inte kan ta emot eller avge någon värme till omgivningen. Det betyder att värmeströmmen, $-\lambda\nabla T$ är 0 på väggens sidor, alltså måste ∇T försvinna där. Sådana randvillkor kallar vi för Neumann-villkor.

Uppgift 2: Antag att vi vid $t = 0$ har följande temperaturfördelning i väggen

$$T\left(x\right) = T_0 \frac{x\left(d - x\right)}{d^2}, \tag{8}$$

där $0 \leq x \leq d$, och att $T_0 = 100\,^{\circ}$C. Vidare antar vi att ingen värme passerar genom väggens begränsningsytor. Följ temperaturprofilens utveckling med tiden. Bestäm dessutom analytiskt den stationära temperaturfördelningen i väggen.

Goda råd: Man kan approximativt uppfylla randvillkoret att $\partial_x T = 0$ på ränderna genom att sätta *T1(1) = T1(2)* och *T1(m) = T1(m-1)*. Strängt taget så betyder det att derivatan blir 0 någonstans mellan de båda första respektive de båda sista punkterna, men detta räcker för våra syften. Som överkurs går det att generalisera den här metoden så att derivatan blir 0 precis på randen.

Uppgift 3: Man kan också blanda de båda formerna av randvillkor. Antag att vår vägg på insidan håller temperaturen $22\,^{\circ}$C, medan yttersidan är isolerad, så att ingen värme passerar igenom den. Följ utvecklingen av temperaturfördelningen i väggen om det inre av väggen från början håller $0\,^{\circ}$C. Bestäm dessutom analytiskt den stationära temperaturfördelningen i väggen.

Uppgift 4: Modifiera nu värmeledningsekvationen, och algoritmen i Ekv. (6), så att ni kan ta med att det finns en värmekälltäthet s i väggen. Lös den nya ekvationen för fallet att ni har en konstant värmekälltäthet på $1\,\mathrm{kW\,m^{-3}}$. Antag att hela väggen från början har temperaturen $0\,°\mathrm{C}$, att väggens båda sidor håller denna temperatur hela tiden. Bestäm dessutom analytiskt den stationära temperaturfördelningen i väggen.

Goda råd: Tänk på enheten för s, och jämför med hur vi gör i föreläsningsanteckningarna.

4 Om rapporten

1. Rapporten skall skrivas i TeX/LaTeX. Arbetar man i par lämnas en gemensam rapport in.
2. Rapporten skall inte omfatta mer än fyra sidor inklusive era figurer.
3. Beskriv kortfattat i rapporten hur ni går tillväga och vilka ekvationer ni använder. Redovisa inte era Matlab-program.
4. Tänk på att ge så mycket detaljer att någon annan kan upprepa era beräkningar. Och glöm inte enheter, tex val av tidsenhet i graferna.
5. Redovisa era resultat i grafisk form när det är lämpligt.
6. Diskutera och tolka era resultat.