Kunskapskontroll 1, Vektorfält och klassisk fysik för F, FFM232
Ett urval av ganska representativa uppgifter på innehållet i läsveckorna 1-3, kapitel 1-5, 12.

Svar publiceras i början av läsvecka 4.

---

1. Vid lösande av uppgiften

   "Trycket $p(\vec{r})$ i en kompressibel vätska kan skrivas som $p(\vec{r}) = p_0 - \rho g z + k z^2$ för $z < 0$, där p_0, ρ, g och k är konstanter. En kropp nedsänkt i vatten upptar området V: $4(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{a})^2 + 4(\frac{z}{a})^2 + 32\frac{z}{a} + 48 < 0$, där a är en konstant. Beräkna den totala tryckkraften $\vec{F} = -\int_S p d\vec{S}$ på begränsningsytan till kroppen."

   fås fyra olika svar av olika personer:

   a. $\frac{64}{3}\pi a^3 \rho g \left(1 + \frac{8\rho g}{ka}\right)$

   b. $\frac{32}{3}\pi a^3 \rho g \left(1 + \frac{8ka}{\rho g}\right)\hat{z}$

   c. $-\frac{64}{3}\pi a^3 \rho g \left(1 - \frac{8k}{\rho g}\right)\hat{z}$

   d. $\frac{64}{3}\pi a^3 \rho g \left(1 + \left(\frac{8ka}{\rho g}\right)^2\right)\hat{z}$

   Alla svaren är felaktiga. Vilket av dem kan inte snabbt uteslutas?

   Alternativ a. är inte en vektor. Alternativ c. har dimensionsfel ($\frac{k}{\rho g}$ är inte dimensionslös). Beroendet av ρ och k bör vara sådant att det, liksom i trycket, finns en term som är linjär i ρ och en som är linjär i k, vilket utesluter alternativ d.

2. Cylindriska och sfäriska koordinater relateras enligt

$$\begin{aligned} \varrho &= r\sin\theta\,, \\ \varphi &= \varphi\,, \\ z &= r\cos\theta\,. \end{aligned}$$

   Antag att sfäriska koordinater var det enda system man explicit kände till (och kunde göra allt möjligt med, t.ex. derivera). Hur skulle man då gå tillväga för att bestämma om cylindriska koordinater bildar ett ortogonalt system, och för att finna uttryck för skalfaktorer, gradient och ortvektorn? Gör det. (jfr. uppg. 2.14).

   Man kan beräkna gradienten av koordinaterna i sfäriska koordinater. Då får man

$$\begin{aligned} \nabla\varrho &= \hat{r}\sin\theta + \hat{\theta}\cos\theta\,, \\ \nabla\varphi &= \hat{\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\,, \\ \nabla z &= \hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta\,. \end{aligned}$$

   Dessa är ortogonala genom användande av ortogonaliteten hos de sfäriska basvektorerna, och man får skalfaktorerna enligt $h_i = |\nabla u_i|^{-1}$: $h_\varrho = 1$, $h_\varphi = r\sin\theta = \varrho$, $h_z = 1$. Därav följer direkt uttrycket för gradienten av ett skalärt fält. Från $\hat{\varrho} = \hat{r}\sin\theta + \hat{\theta}\cos\theta$, $\hat{z} = \hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta$ fås $\varrho\hat{\varrho} + z\hat{z} = r\hat{r} = \vec{r}$.

3. Ett koordinatsystem är relaterat till Cartesiska koordinater genom en linjär relation, dvs.

$$x'_i = \sum_{j=1}^{3} M_{ij}(x_j - x_j^{(0)}) \,,$$

där $x_i^{(0)}$ är konstanter. För vilka matriser $\mathbf{M}$ är basvektorerna i det nya koordinatsystemet ortogonala?

De mest allmänna sådana systemen är de där x'_i är ett system där koordinaterna är några konstanter gånger de som fås genom en ortogonal rotation av de ursprungliga, alltså

$$x'_i = \sum_{j=1}^{3} c_i P_{ij}(x_j - x_j^{(0)}) \,,$$

där $\mathbf{P}$ är en ortogonal matris.

4. Beräkna integralerna $\int_S d\vec{S}$ och $\int_S \vec{r} \cdot d\vec{S}$ då S är en sfär med radien R som har sin mittpunkt i (a, b, c).

Den första integralen blir noll m.h.a. en Gauss-analog sats. Den andra blir $3V = 4\pi R^3$ enligt Gauss sats.

5. Beräkna divergensen och rotationen av vektorfältet $\vec{F} = 2\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta}$. Räkna sedan ut $\Delta\vec{F}$.

Insättning i uttrycken för sfäriska koordinater ger $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{6\cos\theta}{r}$ och $\nabla \times \vec{F} = \frac{2\sin\theta}{r}\hat{\varphi}$. Sedan kan man använda $\Delta\vec{F} = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \ldots = -\frac{10\cos\theta}{r^2}\hat{r} - \frac{6\sin\theta}{r^2}\hat{\theta}$.

6. Bestäm fältlinjerna till vektorfältet $\vec{F}(\vec{r}) = x\hat{x} + y^2\hat{y} + z^3\hat{z}$.

Villkoret att fältlinjernas tangenter skall vara parallella med vektorfältet ger

$$\frac{dx}{dt} = C(t)x \,,$$
$$\frac{dy}{dt} = C(t)y^2 \,,$$
$$\frac{dz}{dt} = C(t)z^3 \,.$$

Genom att (t.ex.) välja $C(t) = 1$ fås tre separabla differentialekvationer.

7. Bestäm och beskriv nivåytorna till fältet $\phi(\vec{r}) = r^2\left[\sin^2\theta(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + \frac{1}{4}\cos^2\theta\right]$.

I Cartesiska koordinater är $\phi = x^2 - y^2 + \frac{1}{4}z^2$. Ytorna $\phi = \phi_0$ är enmantlade hyperboloider för $\phi_0 > 0$, en kon för $\phi_0 = 0$ och tvåmantlade hyperboloider för $\phi_0 < 0$.

8. Beräkna normalytintegralen av vektorfältet i uppg. 5 över halvsfären $r = a$, $z > 0$, med normalen "utåt", både genom direkt beräkning och genom användande av Gauss sats.

På halvsfären har man $\vec{F} \cdot d\vec{S} = (2\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta}) \cdot a^2 \sin\theta\hat{r}d\theta d\varphi = 2a^2\sin\theta\cos\theta d\theta d\varphi$. Integration (till $\theta = \frac{\pi}{2}$) ger resultatet $2\pi a^2$. Att använda Gauss sats är en dålig idé. Ytan är inte sluten, och man måste alltså sluta den. Dessutom behöver man beräkna volymintegralen av $\nabla\cdot\vec{F}$. Om man väljer att sluta med en cirkelskiva blir volymintegralen $3\pi a^2$, från vilket skall subtraheras πa^2, som är ytintegralen över cirkelskivan (den är lätt eftersom den bara ger arean).

9. Beräkna $\epsilon_{ijk} A_i B_{jk}$, där $\vec{A} = (5, 3, 0)$ och B_{ij} är matriselement för matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Den första matrisen i summan är symmetrisk och ger inte något bidrag. Den andra är antisymmetrisk, och ger bidrag endast då j och k är 1 och 3 eller 3 och 1. Därför är $i = 2$, och $\epsilon_{ijk} A_i B_{jk} = \epsilon_{213} A_2 B_{13} + \epsilon_{231} A_2 B_{31} = -6$.

10. Vad blir $\Delta\phi$, där

$$\phi(\vec{r}) = \frac{t_{ijk} x_i x_j x_k}{r^3},$$

och t_{ijk} är en (konstant) tensor som är symmetrisk under byte av vilka två index som helst, och dessutom uppfyller $t_{ijj} = 0$?

Använd $\Delta = \partial_i \partial_i$ och $r^2 = x_i x_i$, som ger $\partial_i r = \frac{x_i}{r}$. Då blir gradienten av ϕ

$$\partial_i \phi = \frac{3 t_{ijk} x_j x_k}{r^3} - \frac{3 x_i t_{jkl} x_j x_k x_l}{r^5}.$$

En derivering till (här behöver man använda $t_{ijj} = 0$) ger

$$\partial_i \partial_i \phi = -12 \frac{t_{ijk} x_i x_j x_k}{r^5} = -12 \frac{\phi}{r^2}.$$

11. Vektorfältet $\vec{F}$ ges av

$$\vec{F}(\vec{r}) = \hat{\varrho} e^{-\frac{\varrho}{a}} \left[\frac{\varrho}{a}(2 - \frac{\varrho}{a}) \cos\varphi - \frac{z^2}{a^2} \right] + \hat{\varphi} \left[\frac{\varrho}{a} - \frac{\varrho^2}{a^2} e^{-\frac{\varrho}{a}} \sin\varphi \right] + 2\hat{z} \frac{z}{a} e^{-\frac{\varrho}{a}}.$$

Beräkna integralen $\int_c \vec{F} \cdot d\vec{r}$, där C är cirkeln $\varrho = a$, $z = 0$, som genomlöps i positiv led.

Om man funderar på att använda Stokes sats, kan man testa med att beräkna rotationen av fältet. Man ser då att man får noll, bortsett från bidraget från $\hat{\varphi}\frac{\varrho}{a}$, vars rotation är $\frac{2}{a}\hat{z}$. Bidraget från den termen (de andra ger alltså noll i integralen) kan berk̈nas direkt eller med Stokes, och resultatet är $2\pi a$.