Kunskapskontroll 1, Vektorfält och klassisk fysik för F, FFM232
Ett urval av ganska representativa uppgifter på innehållet i läsveckorna 1-3, kapitel 1-5, 12.

Svar publiceras i början av läsvecka 4.

---

1. Vid lösande av uppgiften

   "Trycket $p(\vec{r})$ i en kompressibel vätska kan skrivas som $p(\vec{r}) = p_0 - \rho g z + k z^2$ för $z < 0$, där p_0, ρ, g och k är konstanter. En kropp nedsänkt i vatten upptar området V: $4(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{a})^2 + 4(\frac{z}{a})^2 + 32\frac{z}{a} + 48 < 0$, där a är en konstant. Beräkna den totala tryckkraften $\vec{F} = -\int_S p d\vec{S}$ på begränsningsytan till kroppen."

   fås fyra olika svar av olika personer:

   a. $\frac{64}{3}\pi a^3 \rho g \left(1 + \frac{8\rho g}{ka}\right)$

   b. $\frac{32}{3}\pi a^3 \rho g \left(1 + \frac{8ka}{\rho g}\right) \hat{z}$

   c. $-\frac{64}{3}\pi a^3 \rho g \left(1 - \frac{8k}{\rho g}\right) \hat{z}$

   d. $\frac{64}{3}\pi a^3 \rho g \left(1 + \left(\frac{8ka}{\rho g}\right)^2\right) \hat{z}$

   Alla svaren är felaktiga. Vilket av dem kan inte snabbt uteslutas?

2. Cylindriska och sfäriska koordinater relateras enligt

$$\begin{aligned} \varrho &= r \sin\theta \,, \\ \varphi &= \varphi \,, \\ z &= r\cos\theta \,. \end{aligned}$$

   Antag att sfäriska koordinater var det enda system man explicit kände till (och kunde göra allt möjligt med, t.ex. derivera). Hur skulle man då gå tillväga för att bestämma om cylindriska koordinater bildar ett ortogonalt system, och för att finna uttryck för skalfaktorer, gradient och ortvektorn? Gör det. (jfr. uppg. 2.14).

3. Ett koordinatsystem är relaterat till Cartesiska koordinater genom en linjär relation, dvs.

$$x'_i = \sum_{j=1}^{3} M_{ij}(x_j - x_j^{(0)}) \,,$$

   där $x_i^{(0)}$ är konstanter. För vilka matriser $\mathbf{M}$ är basvektorerna i det nya koordinatsystemet ortogonala?

4. Beräkna integralerna $\int_S d\vec{S}$ och $\int_S \vec{r} \cdot d\vec{S}$ då S är en sfär med radien R som har sin mittpunkt i (a, b, c).

5. Beräkna divergensen och rotationen av vektorfältet $\vec{F} = 2\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta}$. Räkna sedan ut $\Delta\vec{F}$.

6. Bestäm fältlinjerna till vektorfältet $\vec{F}(\vec{r}) = x\hat{x} + y^2\hat{y} + z^3\hat{z}$.

7. Bestäm och beskriv nivåytorna till fältet $\phi(\vec{r}) = r^2 \left[\sin^2\theta(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + \frac{1}{4}\cos^2\theta\right]$.

8. Beräkna normalytintegralen av vektorfältet i uppg. 5 över halvsfären $r = a$ med normalen "utåt", både genom direkt beräkning och genom användande av Gauss sats.

9. Beräkna $\epsilon_{ijk} A_i B_{jk}$, där $\vec{A} = (5, 3, 0)$ och B_{ij} är matriselement för matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

10. Vad blir $\Delta\phi$, där

$$\phi(\vec{r}) = \frac{t_{ijk} x_i x_j x_k}{r^3} ,$$

och t_{ijk} är en (konstant) tensor som är symmetrisk under byte av vilka två index som helst, och dessutom uppfyller $t_{ijj} = 0$?

11. Vektorfältet $\vec{F}$ ges av

$$\vec{F}(\vec{r}) = \hat{\varrho} e^{-\frac{\varrho}{a}} \left[\frac{\varrho}{a}(2 - \frac{\varrho}{a}) \cos\varphi - \frac{z^2}{a^2} \right] + \hat{\varphi} \left[\frac{\varrho}{a} - \frac{\varrho^2}{a^2} e^{-\frac{\varrho}{a}} \sin\varphi \right] + 2\hat{z} \frac{z}{a} e^{-\frac{\varrho}{a}} .$$

Beräkna integralen $\int_c \vec{F} \cdot d\vec{r}$, där C är cirkeln $\varrho = a$, $z = 0$, som genomlöps i positiv led.