Kunskapskontroll 2, Vektorfält och klassisk fysik för F, FFM232
Ett urval av ganska representativa uppgifter på innehållet i läsveckorna 4-6, kapitel 6-9.

Svar publiceras i början av läsvecka 7.

---

1. Skriv ned uttrycken för potentialen och fältstyrkan från en punktkälla i 1, 2 och 3 dimensioner, samt vektorpotentialen och fältstyrkan från en oändlig rak virveltråd.

   Se boken.

2. Skriv ned Greensfunktionerna för Poissons ekvation på $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$, och ange vilka ekvationer de uppfyller.

   Se boken.

3. Ange värdet av tangentlinjeintegralen $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, där $\vec{F} = \frac{\hat{\varphi}}{2\pi\varrho}$ är givet i cylindriska koordinater och den slutna kurvan C parametriseras enligt $(x, y, z) = (\cos 3t, \sin 3t, \cos t)$, $0 \le t < 2\pi$.

   Fältet är det som härrör från en virveltråd med styrkan 1 längs z-axeln. Kurvan omsluter z-axeln 3 varv i positiv riktning, så integralens värde är 3.

4. Vektorfältet $\vec{F}$ ges i cylindriska koordinater av

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{cases} F_0(\frac{a}{\varrho}\hat{\varrho} + \frac{z}{a}\hat{z})\,, & z > 0\,, \\ F_0(\frac{a}{\varrho}\hat{\varrho} - \hat{z})\,, & z < 0\,. \end{cases}$$

   Beräkna normalytintegralen av $\vec{F}$ över sfären med radien a och centrum i origo.

   Det går att beräkna integralen direkt, men en undersökning av fältets källor är enklare. Integralens värde är (via Gauss sats) den totala inneslutna källan. Divergensen av $\vec{F}$ är $\frac{F_0}{a}$ i den övre halvsfären, men dessutom finns det singulära källor. En del känns igen som en linjekälla med täthet $2\pi F_0 a$ längs z-axeln. Dessutom finns en diskontinuitet vid $z = 0$ svarande mot en ytkälla med täthet F_0 på planet $z = 0$. Den totala inneslutna källan är alltså $\frac{2\pi}{3}a^3 \cdot \frac{F_0}{a} + 2a \cdot 2\pi F_0 a + \pi a^2 \cdot F_0 = \frac{17\pi}{3}F_0 a^2$.

5. Visa eller argumentera övertygande för att Poissons ekvation i ett begränsat område V med randen ∂V och Neumanns homogena randvillkor på ∂V kan ha en lösning endast om den totala källan i V är noll. Ge ett fysikaliskt exempel.

   Ett ordentligt bevis kan gå såhär: Enligt Gauss sats är

$$\oint_{\partial V} \nabla\phi \cdot d\vec{S} = \int_V \Delta\phi dV\,.$$

   Vänsterledet är noll enligt randvillkoret, och om $\Delta\phi = -\rho$ fås alltså identiteten

$$\int_V \rho dV = 0\,.$$

   I ord kan detta uttryckas som att allt flöde som skapas i källor inne i volymen måste ta vägen någonstans, medan randvillkoret säger att inget flödar ut. Ett exempel kan vara inkompressibelt vätskeflöde; det går inte att fylla på en redan full behållare.

6. Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} 2^{-x}\delta_{\mathbb{N}}(x)dx$, där $\delta_{\mathbb{N}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(x-n)$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2^{-x}\delta_{\mathbb{N}}(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2\,.$$

7. Vad är fel i följande resonemang?

"Kriteriet för att ett vektorfält $\vec{F}$ skall vara konservativt är att $\nabla \times \vec{F} = 0$. Om vi kontrollerar fältet $\vec{F} = \varrho^{-1}\hat{\varphi}$, givet i cylindriska koordinater, finner vi genom explicit uträkning av rotationen att $\nabla\times\vec{F} = 0$. Därför finns det en potential till $\vec{F}$, sådan att $\vec{F} = -\nabla\phi$, och $\oint_C \vec{F}\cdot\vec{r} = 0$ för varje sluten kurva C. Denna potential ges explicit av $\phi(\vec{r}) = \varphi$, och är alltså helt reguljär."

Felet är att rotationen inte är noll på hela $\mathbb{R}^3$, utan bara utanför z-axeln. I själva verket är rotationen

$$\nabla \times \vec{F} = 2\pi\hat{z}\delta^2(x,y)$$

Den föreslagna potentialen är inte en funktion på $\mathbb{R}^3$, eftersom den inte är periodisk i φ med period 2π.

8. Vektorfältet $\vec{H}$ resulterar från käll- och virvelfördelningarna:
i) Ytkällor, båda med den konstanta ytkälltätheten σ, på cirkelskivorna $x^2+y^2 \leq a^2$, $z=\pm a$;
ii) Virveltrådar, alla tre med styrkan j, riktade i positiv φ-led, belägna på cirklarna $x^2+y^2 = a^2$, $z = 0, \pm a$.
Volymen V är en "tårtbit" som begränsas av ytorna

$$\begin{aligned}
S_1 &: \quad \varphi = -\frac{\pi}{8} \\
S_2 &: \quad \varphi = \frac{\pi}{8} \\
S_3 &: \quad z = 2a \\
S_4 &: \quad z = -2a \\
S_5 &: \quad \varrho = 2a
\end{aligned}$$

Låt $\tilde{S}_k$ vara den del av S_k som utgör rand till V, dvs. $\tilde{S}_k = S_k \cap \partial V$. Bestäm
a) $\int_{\partial V} \vec{H}\cdot d\vec{S}$, och
b) $\int_{\partial \tilde{S}_2} \vec{H}\cdot d\vec{r}$.

Jag rekommenderar starkt att man ritar en bra figur för att få kontroll över situationen.
a) Integralen ges av en inneslutna källan. En åttondel av varje cirkelskiva innesluts, och alltså är

$$\int_{\partial V} \vec{H}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{8}\cdot 2\cdot \pi a^2\sigma = \frac{1}{4}\pi a^2\sigma\,.$$

b) Normalen till S_2 är enligt konventionen riktad utåt, dvs. i $\hat{\varphi}$-led. ∂S_2 omsluter de tre virveltrådarna i positiv led, och därför är

$$\int_{\partial \tilde{S}_2} \vec{H}\cdot d\vec{r} = 3j\,.$$

9. En laddning q befinner sig på avståndet a från en "oändlig" plan metallyta. Bestäm den inducerade laddningsfördelningen på ytan.

Välj ett koordinatsystem så att metallytan befinner sig i xy-planet, och ortvektorn för laddningen är $a\hat{z}$. Potentialen är konstant (och kan väljas till noll) på ytan. Genom spegling fås den elektrostatiska potentialen för $z > 0$:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{|\vec{r} - a\hat{z}|} - \frac{1}{|\vec{r} + a\hat{z}|}\right).$$

För $z < 0$ gäller $\phi = 0$. Det elektriska fältet är

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\vec{r} - a\hat{z}}{|\vec{r} - a\hat{z}|^3} - \frac{\vec{r} + a\hat{z}}{|\vec{r} + a\hat{z}|^3}\right)$$

i den övre halvrymden, och noll i den undre. Ytladdningen ges som vanligt av diskontinuiteten av (ϵ_0 gånger) fältets normalkomponent, dvs.

$$\sigma = -\frac{q}{2\pi}\frac{a}{(\varrho^2 + a^2)^{3/2}}.$$

Den totala inducerade laddningen är $-q$.

10. Lös Laplaces ekvation för ett fält ϕ innanför en cylinder med radien a, då fältets värde på randen är $\phi_0 \cos 2\varphi$.

Problemet är tvådimensionellt. Det enda vinkelberoende som finns i ekvation och randvillkor är just $\cos 2\varphi$, och man kan gissa en ansats $\phi = f(\varrho)\cos 2\varphi$. Insättning i Laplaces ekvation ger (mha. Laplaceoperatorns uttryck i cylindriska koordinater):

$$\frac{1}{\varrho}(\varrho f')' \cos 2\varphi - \frac{4}{\varrho^2} f \cos 2\varphi = 0,$$

och alltså

$$\frac{1}{\varrho}(\varrho f')' - \frac{4}{\varrho^2} f = 0.$$

Denna differentialekvation löses av $f(\varrho) = A\varrho^2 + B\varrho^{-2}$. Här måste B sättas till 0 för att undvika en singularitet på z-axeln. Konstanten A bestäms randvillkoret till ϕ_0/a^2. Lösningen är

$$\phi = \phi_0 \frac{\varrho^2}{a^2} \cos 2\varphi \quad (= \phi_0 \frac{x^2 - y^2}{a^2}).$$

11. Kraftfältet $\vec{F}$ ges av

$$\vec{F}(\vec{r}) = F_0\left(\frac{x-y}{b} - \frac{by}{x^2+y^2}, \frac{y-z}{b} + \frac{bx}{x^2+y^2}, \frac{z-x}{b}\right).$$

Beräkna det arbete som kraften utför på en partikel som transporteras längs kurvan C: $(x, y, z) = \frac{b}{32}(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha, \sin\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha)$ då α går från 0 till 2π.

Kurvan är en cirkel med radien $b/32$ och mittpunkt i origa. Normalen till cirkelskivan som har cirkeln som rand är $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$.

Rotationen av den reguljära delen av $\vec{F}$ är $\frac{F_0}{b}(1, 1, 1)$. Eftersom denna vektor är vinkelrät mot $\vec{n}$ blir bidraget (via Stokes sats) noll.

Den singulära delen beskriver fältet från en virveltråd längs z-axeln med styrkan $2\pi F_0 b$. C omsluter z-axeln en gång i positiv riktning. Integralens värde är $2\pi F_0 b$.