Kunskapskontroll 2, Vektorfält och klassisk fysik för F, FFM232
Ett urval av ganska representativa uppgifter på innehållet i läsveckorna 4-6, kapitel 6-9.

Svar publiceras i början av läsvecka 7.

---

1. Skriv ned uttrycken för potentialen och fältstyrkan från en punktkälla i 1, 2 och 3 dimensioner, samt vektorpotentialen och fältstyrkan från en oändlig rak virveltråd.

2. Skriv ned Greensfunktionerna för Poissons ekvation på $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$, och ange vilka ekvationer de uppfyller.

3. Ange värdet av tangentlinjeintegralen $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, där $\vec{F} = \frac{\hat{\varphi}}{2\pi\varrho}$ är givet i cylindriska koordinater och den slutna kurvan C parametriseras enligt $(x, y, z) = (\cos 3t, \sin 3t, \cos t)$, $0 \leq t < 2\pi$.

4. Vektorfältet $\vec{F}$ ges i cylindriska koordinater av
$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{cases} F_0(\frac{a}{\varrho}\hat{\varrho} + \frac{z}{a}\hat{z}), & z > 0, \\ F_0(\frac{a}{\varrho}\hat{\varrho} - \hat{z}), & z < 0. \end{cases}$$
Beräkna normalytintegralen av $\vec{F}$ över sfären med radien a och centrum i origo.

5. Visa eller argumentera övertygande för att Poissons ekvation i ett begränsat område V med randen ∂V och Neumanns homogena randvillkor på ∂V kan ha en lösning endast om den totala källan i V är noll. Ge ett fysikaliskt exempel.

6. Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} 2^{-x}\delta_{\mathbb{N}}(x)dx$, där $\delta_{\mathbb{N}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(x - n)$.

7. Vad är fel i följande resonemang?
"Kriteriet för att ett vektorfält $\vec{F}$ skall vara konservativt är att $\nabla \times \vec{F} = 0$. Om vi kontrollerar fältet $\vec{F} = \varrho^{-1}\hat{\varphi}$, givet i cylindriska koordinater, finner vi genom explicit uträkning av rotationen att $\nabla \times \vec{F} = 0$. Därför finns det en potential till $\vec{F}$, sådan att $\vec{F} = -\nabla\phi$, och $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{r} = 0$ för varje sluten kurva C. Denna potential ges explicit av $\phi(\vec{r}) = \varphi$, och är alltså helt reguljär."

8. Vektorfältet $\vec{H}$ resulterar från käll- och virvelfördelningarna:
i) Ytkällor, båda med den konstanta ytkälltätheten σ, på cirkelskivorna $x^2 + y^2 \leq a^2$, $z = \pm a$;
ii) Virveltrådar, alla tre med styrkan j, riktade i positiv φ-led, belägna på cirklarna $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0, \pm a$.
Volymen V är en "tårtbit" som begränsas av ytorna
$$\begin{aligned} S_1 &: \quad \varphi = -\frac{\pi}{8} \\ S_2 &: \quad \varphi = \frac{\pi}{8} \\ S_3 &: \quad z = 2a \\ S_4 &: \quad z = -2a \\ S_5 &: \quad \varrho = 2a \end{aligned}$$

Låt $\tilde{S}_k$ vara den del av S_k som utgör rand till V, dvs. $\tilde{S}_k = S_k \cap \partial V$. Bestäm
a) $\int_{\partial V} \vec{H} \cdot d\vec{S}$, och
b) $\int_{\partial \tilde{S}_2} \vec{H} \cdot d\vec{r}$.

9. En laddning q befinner sig på avståndet a från en “oändlig” plan metallyta. Bestäm den inducerade laddningsfördelningen på ytan.

10. Lös Laplaces ekvation för ett fält ϕ innanför en cylinder med radien a, då fältets värde på randen är $\phi_0 \cos 2\varphi$.

11. Kraftfältet $\vec{F}$ ges av

$$\vec{F}(\vec{r}) = F_0 \left(\frac{x-y}{b} - \frac{by}{x^2+y^2}, \frac{y-z}{b} + \frac{bx}{x^2+y^2}, \frac{z-x}{b} \right).$$

Beräkna det arbete som kraften utför på en partikel som transporteras längs kurvan C: $(x, y, z) = \frac{b}{32}(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha, \sin\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha)$ då α går från 0 till 2π.