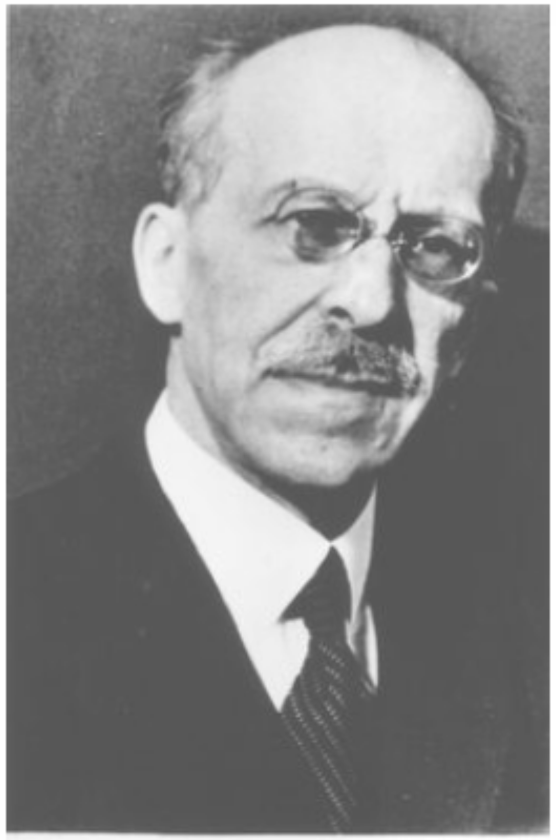
Introduktion till representationsteori
(fortsättning)

Issai Schur



- definition av en rep
- ekvivalenta reps
- reducerbara reps, irreps
- Maschkes teorem
- Shurs lemmor
- fundamentala ortogonalitetsteoremet
- karaktärstabeller
- Clebsch-Gordan serier

Tillbaka till FUNDAMENTALA ORTOGONALITETSTEOREMET !

Det finns (väsentligen) två konventioner vad gäller NOTATION

I ... som jag använde i förra föreläsningen :

$$\sum_{g \in G} D^{(\nu)*}_{js}(g) D^{(\mu)}_{ir}(g) = \frac{[G]}{n_\mu} \delta^{\mu\nu} \delta_{ij} \delta_{rs}$$

II ... också vanlig! :

$$\sum_{g \in G} D^{(i)*}_{\alpha\beta}(g) D^{(j)}_{\gamma\delta}(g) = \frac{[G]}{n_i} \delta_{ij} \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta}$$

$$\mathrm{I} \xrightarrow[\substack{j \to \alpha,\, s \to \beta \\ i \to \gamma,\, r \to \delta \\ \nu \to i,\, \mu \to j}]{} \mathrm{II}$$

Bilda en $[G]$-dim <u>vektor</u>, antag att $D^{(i)}_{\alpha\beta}(g) \in \mathbb{R}$

$$\left(D^{(i)}_{\alpha\beta}(g_1) \; D^{(i)}_{\alpha\beta}(g_2) \; \dots \; D^{(i)}_{\alpha\beta}(g_{[G]}) \right)$$

Om $D^{(i)}(g)$ är en $n_i \times n_i$ matris så finns det n_i^2 vektorer som svarar mot $D^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, m$

\# inekvivalenta irreps

Totalt $n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_m^2 = \sum_{i=1}^{m} n_i^2 \leq [G]$

ty alla är ortogonala mot varandra (kan finnas max $[G]$ sådana vektorer)

KAN VISA: $\sum_{i=1}^{m} n_i^2 = [G]$

Bilda en $[G]$-dim vektor, antag att $D^{(i)}_{\alpha\beta}(g) \in \mathbb{R}$

$$\left(D^{(i)}_{\alpha\beta}(g_1) \; D^{(i)}_{\alpha\beta}(g_2) \; \ldots \; D^{(i)}_{\alpha\beta}(g_{[G]}) \right)$$

Om $D^{(i)}(g)$ är en $n_i \times n_i$ matris så finns det n_i^2 vektorer som svarar mot $D^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, m$

inekvivalenta irreps

Totalt $n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_m^2 = \sum_{i=1}^{m} n_i^2 \leq [G]$

ty alla är ortogonala mot varandra (kan finnas max $[G]$ sådana vektorer)

KAN VISA: $\sum_{i=1}^{m} n_i^2 = [G]$

Fundamentala ortogonalitetsteoremet!

Det följer (bl.a.!) från ortogonalitetsteoremet att antalet irreps är begränsat.

EX IRREPS TILL S_3

KONJUGAT KLASSER	g	"A_1" $D^{(1)}$	"A_2" $D^{(2)}$	"E" $D^{(3)}$
$I \equiv C_1$	$(1)(2)(3)$	1	1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$A \equiv C_2$	(123)	1	1	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$
	(132)	1	1	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$
$C \equiv C_3$	$(13)(2)$	1	-1	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$
	$(12)(3)$	1	-1	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$
	$(1)(23)$	1	-1	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Det följer (bl.a.!) från ortogonalitetsteoremet att antalet irreps är begränsat.

EX IRREPS TILL S_3

KONJUGAT KLASSER	g	"A_1" $D^{(1)}$	"A_2" $D^{(2)}$	"E" $D^{(3)}$
$I \equiv C_1$	$(1)(2)(3)$	1	1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$A \equiv C_2$	(123)	1	1	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$
	(132)	1	1	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$
$C \equiv C_3$	$(13)(2)$	1	-1	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$
	$(12)(3)$	1	-1	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$
	$(1)(23)$	1	-1	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Det följer (bl.a.!) från ortogonalitetsteoremet att antalet irreps är begränsat.

Ex IRREPS TILL S_3

KONJUGAT-KLASSER	g	"A_1" $D^{(1)}$	"A_2" $D^{(2)}$	"E" $D^{(3)}$
$I \equiv C_1$	$(1)(2)(3)$	1	1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$A \equiv C_2$	(123)	1	1	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$
	(132)	1	1	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$
$C \equiv C_3$	$(13)(2)$	1	-1	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$
	$(12)(3)$	1	-1	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$
	$(1)(23)$	1	-1	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Det följer (bl.a. !) från ortogonalitetsteoremet att antalet irreps är begränsat.

EX IRREPS TILL S_3

KONJUGAT-KLASSER	g	"A_1" $D^{(1)}$	"A_2" $D^{(2)}$	"E" $D^{(3)}$
$I \equiv C_1$	(1)(2)(3)	1	1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$A \equiv C_2$	(123)	1	1	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$
	(132)	1	1	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$
$C \equiv C_3$	(13)(2)	1	−1	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$
	(12)(3)	1	−1	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$
	(1)(23)	1	−1	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Det följer (bl.a.!) från ortogonalitetsteoremet att antalet irreps är begränsat.

EX IRREPS TILL S_3

KONJUGATKLASSER	g	"A_1" $D^{(1)}$	"A_2" $D^{(2)}$	"E" $D^{(3)}$
$I \equiv C_1$	$(1)(2)(3)$	1	1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$A \equiv C_2$	(123)	1	1	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$
	(132)	1	1	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$
$C \equiv C_3$	$(13)(2)$	1	-1	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$
	$(12)(3)$	1	-1	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$
	$(1)(23)$	1	-1	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Hur karakterisera en rep? Man kan i princip skriva med alla matriser ... Men, otympligt och basberoende. Hitta basoberoende objekt!

KARAKTÄRER

$$\chi^{(i)}(g) = \mathrm{Tr}\left(D^{(i)}(g)\right) = \sum_{\alpha} D^{(i)}_{\alpha\alpha}(g) \qquad (\square)$$

$D^{(i)}(g)$ = rep av $g \in G$

Konjugerade element har samma karaktärer

$$g_1 = h g_2 h^{-1} \Rightarrow D(g_1) = D(h) D(g_2) \underbrace{D(h^{-1})}_{= D(h)^{-1}}$$

$$\Rightarrow \chi(g_1) = \mathrm{Tr}\left(D(h) D(g_2) D(h^{-1})\right) = \mathrm{Tr}\left(D(h^{-1}) D(h) D(g_2)\right)$$

$$= \mathrm{Tr}\left(D^{-1}(h) D(h) D(g_2)\right) = \chi(g_2)$$

Det följer (bl.a. !) från ortogonalitetsteoremet att antalet irreps är begränsat.

EX IRREPS TILL S_3

KONJUGAT-KLASSER	g	"A_1" $D^{(1)}$	"A_2" $D^{(2)}$	"E" $D^{(3)}$	$\chi^{(1)}$	$\chi^{(2)}$	$\chi^{(3)}$
$I \equiv C_1$	(1)(2)(3)	1	1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	1	1	2
$A \equiv C_2$	(123)	1	1	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$	1	1	−1
	(132)	1	1	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$	1	1	−1
$C \equiv C_3$	(13)(2)	1	−1	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$	1	−1	0
	(12)(3)	1	−1	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$	1	−1	0
	(1)(23)	1	−1	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	1	−1	0

Ortogonalitetsteoremet

⇓

\# konjugat klasser

$$\sum_{k=1}^{s} p_k \chi^{(i)}(C_k)^* \chi^{(j)}(C_k) = [G]\,\delta_{ij}$$

\# element i C_k

ORTOGONALITET HOS KARAKTÄRER

Tänk på karaktärerna i en irrep som en s-dim. vektor

$$\left(\chi^{(i)}(C_1), \chi^{(i)}(C_2), \ldots, \chi^{(i)}(C_s)\right)$$

Alla dessa vektorer är ortogonala ⇒ MAX s stycken (inekvivalenta) irreps

KAN VISA : # irreps = # konjugatklasser (= s)

Antag nu att vi har en reducibel rep D av $G \ni g$

$D(g) = D^{(a)}(g) \oplus D^{(b)}(g) \oplus \ldots$

$g \in C_k$ $\quad \chi(C_k) = \chi^{(a)}(C_k) + \chi^{(b)}(C_k) + \ldots$

$= c_1 \chi^{(1)}(C_k) + c_2 \chi^{(2)}(C_k) + \ldots$

ex. $D^{(a)} = D^{(b)} = D^{(1)}$, $c_1 = 2$, etc.

$\Rightarrow \chi(C_k) = \sum_\mu c_\mu \underbrace{\chi^{(\mu)}(C_k)}_{\equiv \chi_k^{(\mu)}}$

element i C_k

$\Rightarrow \sum_k p_k \chi^{(\nu)}(C_k)^* \chi(C_k) = \sum_k \sum_\mu p_k \chi^{(\nu)}(C_k)^* c_\mu \chi^{(\mu)}(C_k)$

index för irrep

ortogonalitet för karaktärer

$= [G] \sum_\mu \delta_{\mu\nu} c_\mu = [G] c_\nu$

"Master formula"

$$\Rightarrow \boxed{c_\nu = \frac{1}{[G]} \sum_k p_k \chi^{(\nu)}(C_k)^* \chi(C_k)}$$

multipliciteten av $D^{(\nu)}$ i D

Vad är detta bra för? Diskussion...!

EX S_3

Låt oss konstruera en 3D rep av S_3! Kalla den "D"!

$$C_1: \quad e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C_2: \quad (123) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (132) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_3: \quad (13)(2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (12)(3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1)(23) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

S_3 har 3 irreps: $D^{(1)}, D^{(2)}, D^{(3)}$.

Det följer att

$$D = c_1 D^{(1)} \oplus c_2 D^{(2)} \oplus c_3 D^{(3)}$$

Vad är multiplicitetenna c_1, c_2, c_3?

föregående slide

Använd ✡ och definitionen av karaktär!

använd
"Master formula"!

$$c_1 = \frac{1}{[G]}\left(\rho_1 \chi^{(1)}(C_1)^* \chi(C_1) + \rho_2 \chi^{(1)}(C_2)^* \chi(C_2) + \rho_3 \chi^{(1)}(C_3)^* \chi(C_3)\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(1 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot 1\right) = 1$$

$c_2 = \{\text{KOLLA!}\} = 0$

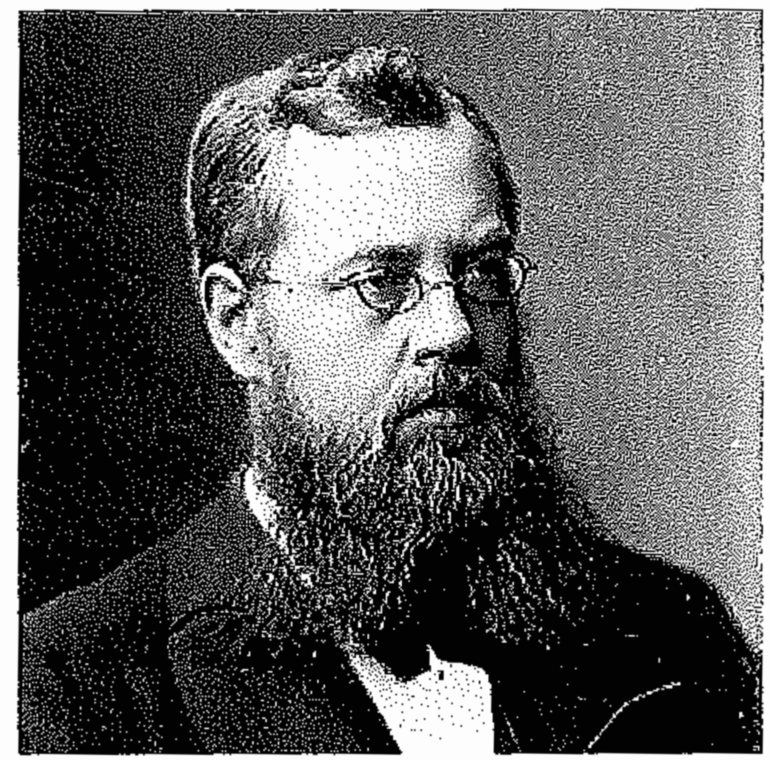
$c_3 = \{\text{KOLLA!}\} = 1$

$\Rightarrow D = D^{(1)} \oplus D^{(3)}$

Kontinuerliga grupper & Lie algebror

- definition av Liegrupp
- definierande reps
- SO(2), U(1)
- SO(3), SU(2),…, SU(N)
- Lie algebror

- tillämpningar: spinn & kvarkar



Sophus Lie, 1842-1899

Introduktion till kontinuerliga grupper via ett exempel…

ROTATIONER I ETT PLAN

$$C_n = \{ \underbrace{\varphi_1 = \tfrac{2\pi}{n}\text{-rotation}}_{g_1}, \underbrace{\varphi_2 = \tfrac{4\pi}{n}\text{-rotation}}_{g_2}, \ldots, \underbrace{\varphi_{n-1} = \tfrac{2\pi(n-1)}{n}\text{-rotation}}_{g_{n-1}}, \underbrace{\varphi_n = e}_{g_n} \}$$

$$= \{ g_1, g_2, \ldots, g_n \} \longrightarrow \{ g_\varphi \} = SO(2)$$

kontinuerlig vinkel $\varphi \in [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}$

begränsat intervall

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}}_{} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$R(\varphi)$ DEFINIERANDE REP AV g_φ

(vi IDENTIFIERAR gruppen med sin definierande rep)

Introduktion till kontinuerliga grupper via ett exempel…

ROTATIONER I ETT PLAN

$$C_n = \{\underbrace{\varphi_1 = \tfrac{2\pi}{n}\text{-rotation}}_{g_1}, \underbrace{\varphi_2 = \tfrac{4\pi}{n}\text{-rotation}}_{g_2}, \ldots, \underbrace{\varphi_{n-1} = \tfrac{2\pi(n-1)}{n}\text{-rotation}}_{g_{n-1}}, \underbrace{\varphi_n = e}_{g_n}\}$$

$$= \{g_1, g_2, \ldots, g_n\} \longrightarrow \{g_\varphi\} = SO(2)$$

↖ kontinuerlig vinkel $\varphi \in [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}$

begränsat intervall

⇒ KOMPAKT LIEGRUPP

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$R(\varphi)$ DEFINIERANDE REP AV g_φ

(vi IDENTIFIERAR gruppen med sin definierande rep)

Exempel på LIEGRUPP: $R(\varphi)$ deriverbar

(Sophus Lie, norsk matematiker 1842–99)

$R(\varphi)$ reellvärd $\Longrightarrow$ $SO(2, \mathbb{R})$

speciell — ortogonal

$\det R(\varphi) = 1$ — $R(\varphi) R^T(\varphi) = \mathbb{1}$

$R(\varphi)$ reellvärd $\Rightarrow$ $SO(2,\mathbb{R})$

Speciell $\det R(\varphi)=1$ ortogonal $R(\varphi)R^T(\varphi)=\mathbb{1}$

Låt oss betrakta en komplexvärd definierande rep

$z = x+iy = re^{i\theta}$, $z^* = x-iy = re^{-i\theta}$

$x = \frac{1}{2}(z+z^*)$, $y = \frac{1}{2}(z-z^*)$

$$\begin{pmatrix} z \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} re^{i\theta} \\ re^{-i\theta} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{vinkeln } \varphi]{\text{rotera med}} \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} re^{i\theta} \\ re^{-i\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r'e^{i\theta'} \\ r'e^{-i\theta'} \end{pmatrix}$$

$\theta \to \theta + \varphi = \theta'$

REDUCERBAR !

TVÅ IRREPS : $e^{i\varphi}$, $e^{-i\varphi}$

Unitära 1-dim definierande reps : $U(1)$

Vilken som helst av $D^{(m)}(\varphi) = e^{-im\varphi}$, $m \in \mathbb{Z}$ är en OK definierande rep till $U(1)$ (periodicitet för $\varphi \to \varphi + 2\pi$)

Tillbaks till $SO(2,\mathbb{R})$

$$\overset{\varphi \ll 1}{R(\varphi) \approx \mathbb{1} - i\varphi X + \cancel{\mathcal{O}(\varphi^2)}}$$

$$-iX = \left.\frac{dR(\varphi)}{d\varphi}\right|_{\varphi=0} \Rightarrow X = \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

X kallas (infinitesimal) GENERATOR

$\Downarrow$

exponentiera!

$$R(\varphi) = e^{-i\varphi X} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\varphi)^n}{n!} X^n$$

$$\overset{X^2=1}{=} \mathbb{1}\cos\varphi - iX\sin\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Kan vi använda *"Masterformeln"* (kanske den viktigaste formeln i representationsteori för en fysiker!) för att bestämma vilka komplexa irreps (= definierande reps till U(1)) som bygger upp den definierande rep:en för SO(2)?

Låt D vara en reducibel rep till en *ändlig* grupp G, med $D^{(\nu)}$ inekvivalenta irreps. Då gäller:

$$D = \bigoplus a_\nu D^{(\nu)}$$

$$\leadsto \quad a_\nu = \frac{1}{[G]} \sum_k r_k \chi^{(\nu)*}(C_k)\, \chi(C_k)$$

$$= \frac{1}{[G]} \sum_g \underbrace{\chi^{(\nu)*}(g)}_{= \chi^{(\nu)}(g^{-1})} \chi(g)$$

Kan vi använda *"Masterformeln"* (kanske den viktigaste formeln i representationsteori för en fysiker!) för att bestämma vilka komplexa irreps (= definierande reps till U(1)) som bygger upp den definierande rep:en för SO(2)?

Låt D vara en reducibel rep till en *ändlig* grupp G, med $D^{(\nu)}$ inekvivalenta irreps. Då gäller:

$$D = \bigoplus a_\nu D^{(\nu)}$$

$$\sim \quad a_\nu = \frac{1}{[G]} \sum_k n_k \, \chi^{(\nu)*}(C_k)\, \chi(C_k)$$

$$= \frac{1}{[G]} \sum_g \underbrace{\chi^{(\nu)*}(g)}_{= \chi^{(\nu)}(g^{-1})} \chi(g)$$

Men hur funkar detta för en *kontinuerlig grupp*?!

$$D = \oplus a_\nu D^{(\nu)}$$

$$\sim \quad a_\nu = \frac{1}{[G]} \sum_k r_k \chi^{(\nu)*}(C_k)\, \chi(C_k)$$

$$= \frac{1}{[G]} \sum_g \chi^{(\nu)*}(g)\, \chi(g)$$

[0, Λ] parameter interval Λ

$$= \chi^{(\nu)}(g^{-1}) \quad \nu\text{:e irrep}$$

steg 1 *(allmänt)*:

[0, Λ] parameter interval Λ

$$\frac{1}{[G]} \sum_g \ldots = \frac{1}{\Lambda} \int_0 d\lambda \ldots$$

steg 2 *(specifikt:* sönderläggning av def rep för SO(2) i def reps för U(1)):

$$a_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi\, \chi^{(\nu)}(e^{i\nu\varphi})\, \chi(R(\varphi))$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{i\nu\varphi} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi\, (e^{i(\nu+1)\varphi} + e^{i(\nu-1)\varphi})$$

$$= \delta_{\nu 1} + \delta_{\nu(-1)}$$

$$D = \oplus\, a_\nu D^{(\nu)}$$

$$\sim\; a_\nu = \frac{1}{[G]} \sum_k r_k \chi^{(\nu)*}(C_k)\chi(C_k)$$

$$= \frac{1}{[G]} \sum_g \chi^{(\nu)*}(g)\chi(g)$$

$[0,\Lambda]$ parameter intervall Λ

$$= \chi^{(\nu)}(g^{-1})$$

ν:e irrep

$$D^{(\nu)}(g_\varphi^{-1}) = (D^{(\nu)}(g_\varphi))^{-1} = e^{i\nu\varphi}$$

steg 1 *(allmänt)*:

$[0,\Lambda]$ parameter intervall Λ

$$\frac{1}{[G]}\sum_g \ldots = \frac{1}{\Lambda}\int_0^\Lambda d\lambda \ldots$$

steg 2 *(specifikt:* sönderläggning av def rep för SO(2) i def reps för U(1)):

$$a_\nu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi\, \underbrace{\chi^{(\nu)}(e^{i\nu\varphi})}_{e^{i\nu\varphi}}\chi(R(\varphi))$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{i\nu\varphi}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi\, (e^{i(\nu+1)\varphi} + e^{i(\nu-1)\varphi})$$

$$= \delta_{\nu 1} + \delta_{\nu(-1)}$$

$$D = \bigoplus a_\nu D^{(\nu)}$$

$$\sim \quad a_\nu = \frac{1}{[G]} \sum_k r_k \chi^{(\nu)*}(C_k)\, \chi(C_k)$$

$$= \frac{1}{[G]} \sum_g \chi^{(\nu)*}(g)\, \chi(g)$$

[0, Λ] parameter intervall Λ

$$= \chi^{(\nu)}(g^{-1})$$

ν:e irrep

$$R(g_\varphi) \equiv R(\varphi)$$

steg 1 *(allmänt)*:

[0, Λ] parameter intervall Λ

$$\frac{1}{[G]} \sum_g \dots = \frac{1}{\Lambda} \int_0 d\lambda \dots$$

steg 2 *(specifikt:* sönderläggning av def rep för SO(2) i def reps för U(1)):

$$a_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi\, \chi^{(\nu)}(e^{i\nu\varphi})\, \underbrace{\chi(R(\varphi))}_{2\cos(\varphi)}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{i\nu\varphi} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \left(e^{i(\nu+1)\varphi} + e^{i(\nu-1)\varphi} \right)$$

$$= \delta_{\nu 1} + \delta_{\nu(-1)}$$

Låt oss nu ta steget och undersöka gruppen av alla rotationer i det tre-dimensionella rummet

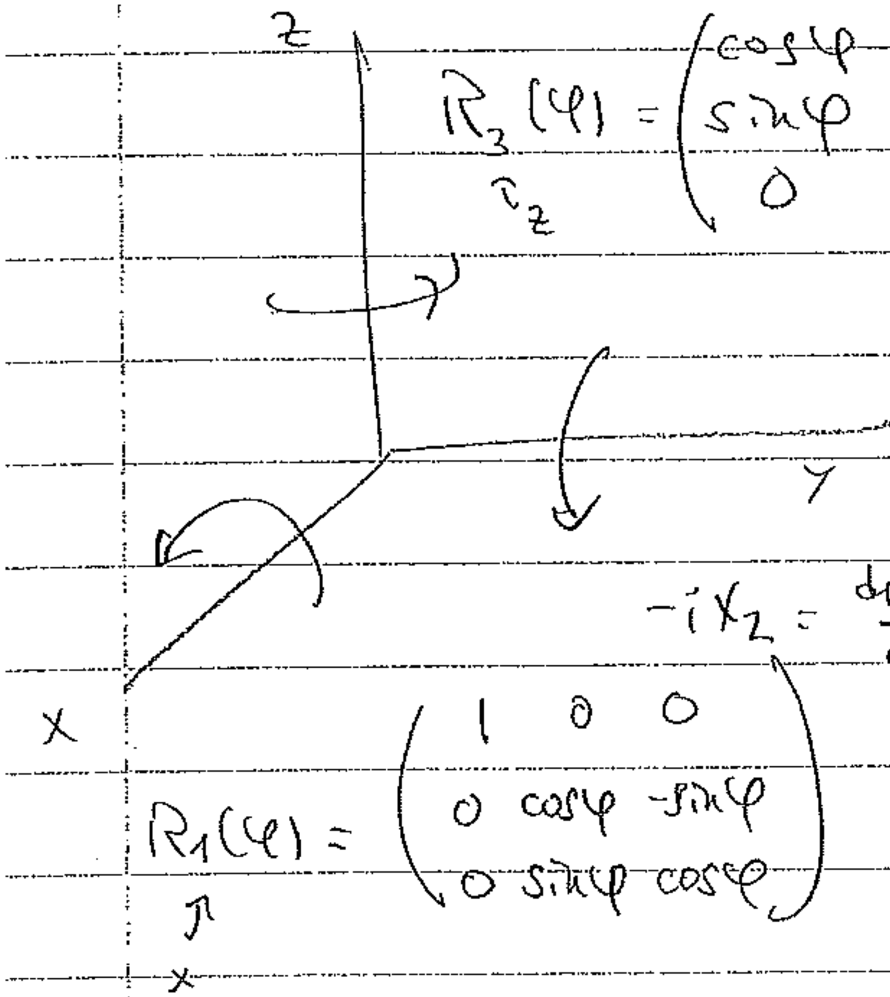
$SO(3,\mathbb{R})$ $SU(2)$

speciell unitär 2-dimensionell G-modul

Låt oss nu ta steget och undersöka gruppen av alla rotationer i det tre-dimensionella rummet

SO(3, ℝ) SU(2)

SU(2): speciell, unitär, 2-dimensionell G-modul



$$R_3(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad -iX_3 = \left.\frac{dR_3(\varphi)}{d\varphi}\right|_{\varphi=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

r_z

$$R_2(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

r_y

$$-iX_2 = \left.\frac{dR_2(\varphi)}{d\varphi}\right|_{\varphi=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_1(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad -iX_1 = \left.\frac{dR_1(\varphi)}{d\varphi}\right|_{\varphi=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

r_x

Så, vi kan nu skriva en godtycklig rotation som

$$R_{\hat{n}}(\varphi) = e^{-i\hat{n}\cdot\hat{X}\varphi}, \quad \hat{X} = (X_1, X_2, X_3)$$

$\hat{n}$ rotationsaxel

GENERATORERNA X_1, X_2, X_3 BILDAR
LIE ALGEBRAN

$$[X_i, X_j] = i\varepsilon_{ijk} X_k \qquad \text{✡}$$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{om jämn transposition av } 1,2,3 \\ -1 & \text{om udda} \quad \text{–"–} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

✡ satisfieras också av Paulimatriserna $\times \frac{1}{2}$

$$\sigma_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

definierande rep till SU(2)

Lie algebror definierar gruppstrukturen för kontinuerliga (Lie!) grupper och ersätter ändliga gruppers multiplikationstabeller.

Representationer av SO(3)

SO(3) är gruppen av rotationer i 3D

"speciell" "ortogonal"

$\det R_{\hat{n}}(\varphi) = 1$ $\quad R_{\hat{n}}(\varphi) R_{\hat{n}}^T(\varphi) = 1$

VEKTOR AV GENERATORER

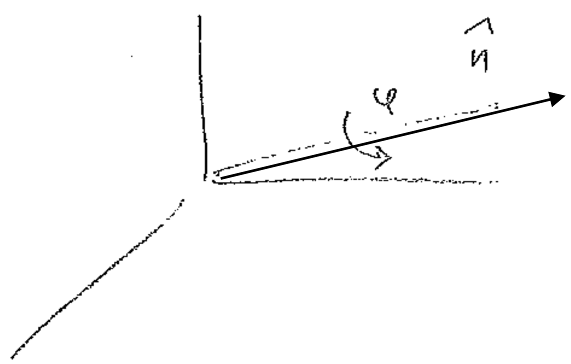
$\vec{X} = (X_x, X_y, X_z)$

$$SO(3) = \left\{ R_{\hat{n}}(\varphi) = e^{-i\hat{n}\cdot\vec{X}\varphi}, \ \varphi \in [0, 2\pi] \right\}$$

ROTATIONS RIKTNING

ROTATIONS VINKEL

KOMPAKT LIE GRUPP



X_x, X_y, X_z bildar LIE ALGEBRAN

$$[X_\alpha, X_\beta] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} X_\gamma$$

Låt oss konstruera en rep av SO(3) med G-modul uppspänd av egenvektorer $|\beta, m\rangle$, gemensamma för X_z och *Casimiroperatorn* $\vec{X}^2 = X_x^2 + X_y^2 + X_z^2$:

$$\vec{X}^2|\beta, m\rangle = \beta^2|\beta, m\rangle$$

$$X_z|\beta, m\rangle = m|\beta, m\rangle$$

(1) Visa att $[\vec{X}^2, X_z] = 0$, så att dessa vektorer säkert har gemensamma egenvektorer!

Introducera "stegoperatorer"

$$X_\pm = X_x \pm iX_y$$

(2) Visa att $[X_\pm, \vec{X}^2] = 0$ och $[X_z, X_\pm] = \mp X_\pm$.

Det följer att $X_\pm|\beta, m\rangle$ är ett egentillstånd till X_z med egenvärde $m \pm 1$.

(3) Visa detta!

Välj ett fixt β. Det följer från

$$\langle \beta, m | \vec{X}^2 | \beta, m \rangle = \langle \beta, m | X_x^2 + X_y^2 + m^2 | \beta, m \rangle \geq m^2 \quad (1)$$

att m är begränsad. Kalla det största värdet på m för Λ. I gruppteorijargong kallar vi tillståndet $|\beta, \Lambda\rangle$ för ett *högsta vikttillstånd.*

(4) För att (1) skall gälla så måste $\langle \beta, m | X_x^2 + X_y^2 |\beta, m\rangle \geq 0$

Argument?

Med hjälp av identiteten

$$\vec{X}^2 = X_- X_+ + X_z(X_z + 1) \quad (2)$$

följer omedelbart att

$$\vec{X}^2 |\beta, \Lambda\rangle = \Lambda(\Lambda+1) |\beta, \Lambda\rangle \quad (3)$$

(5) Visa (2) och (3)!

Vi kan också skriva

$$\vec{X}^2 = X_+ X_- + X_z (X_z - 1)$$

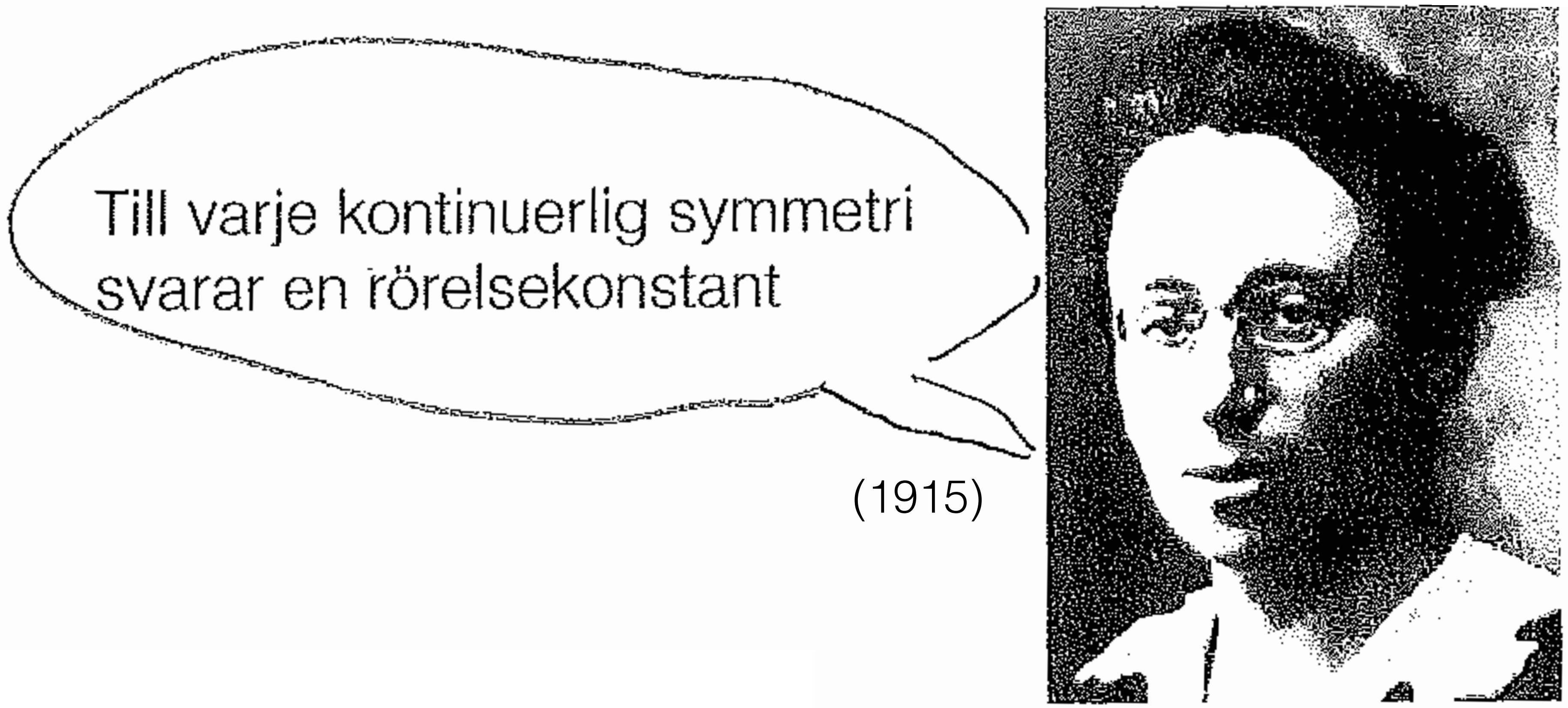
från vilket vi drar slutsatsen att det minsta värdet på m är $-\Lambda$. Det följer att m kan ta $2\Lambda+1$ värden

$$-\Lambda \leq m \leq \Lambda \qquad (4)$$

(3) och (4) är direkta konsekvenser av gruppstrukturen hos SO(3), kodad i dess Lie algebra!

Påminner (3) och (4) om något du sett i kvantmekanikkursen?

Noethers teorem



Emmy Noether, 1882-1935

Kontinuerliga grupper i fysiken

några viktiga exempel (rum-tid symmetrier)

$x = (ct, \vec{r})$ 4-vektor

Lorentzgruppen $\mathcal{L}$: $\{x \to x' = \Lambda x \mid (dx')^2 = (dx)^2\}$

4x4 reell matris

$(ds)^2 = (dx)^2 \equiv c^2 dt^2 - (d\vec{r})^2$

mängden av alla koordinattransformationer som lämnar Minkowski-metriken invariant (inkluderar rotationer, Lorentztransformationer, rumsinversion, tidsreversering,…)

4-vektorer

Poincarégruppen $\mathcal{P} = \mathcal{L} \times \mathcal{T}_4$: $\{x \to x' = \Lambda x + a\}$

Konforma gruppen C: $\{x \to x'(x) \mid (dx')^2 = e^{\Omega(x)}(dx)^2\}$

Kontinuerliga grupper i fysiken

några viktiga exempel *(interna symmetrier)*

Global U(1) grupp: $\{ e^{i\alpha} \}$

$H\psi = i\hbar\partial_t\psi$ är invariant under $\psi \to \psi' = e^{i\alpha}\psi$

$e^{i\alpha}$ verkar på ψ,
ej på rum-tid koordinater

Kontinuerliga grupper i fysiken

några viktiga exempel *(interna symmetrier)*

U(1) gaugegrupp: $\left\{ e^{i\alpha(\vec{r},t)} \right\}$ GRUPP AV U(1) "GAUGETRANSFORMATIONER"

SCHRÖDINGEREKVATIONEN ÄR INTE INVARIANT UNDER $\Psi(\vec{r},t) \to \Psi'(\vec{r},t) = e^{i\alpha(\vec{r},t)}\Psi(\vec{r},t)$

TY $\partial_\mu \Psi' = e^{i\alpha(\vec{r},t)}\left(\partial_\mu \Psi + i(\partial_\mu \alpha(\vec{r},t))\Psi\right)$ DÄR $(\partial_\mu \Psi)_{\mu=0,1,2,3} \equiv \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu}\right) = (\partial_t \Psi, \nabla\Psi)$

SCHRÖDINGEREKVATIONEN ÄR INVARIANT UNDER U(1) GAUGETRANSFORMATIONER
OM VI GÖR SUBSTITUTIONEN $\partial_\mu \longrightarrow D_\mu^{(A)}$ DÄR

$$D_\mu^{(A)} \equiv \partial_\mu + \frac{ie}{\hbar}A_\mu \quad \text{MED} \quad (A_\mu) = (\Phi, -\vec{A})$$

ETT "GAUGEFÄLT" MED EGENSKAPEN

$$A_\mu \to A_\mu' = A_\mu - \frac{\hbar}{e}\partial_\mu \alpha$$

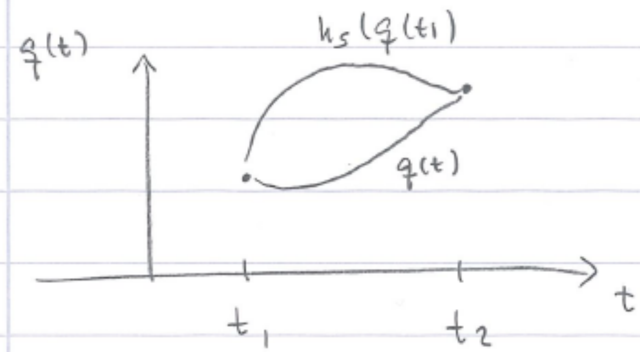
UNDER GAUGETRANSFORMATIONEN

"KOVARIANT DERIVATA"

$$\begin{cases} D_t^{(A)} = \partial_t + \frac{ie}{\hbar}\Phi \\ D_{\vec{r}}^{(A)} = \nabla - \frac{ie}{\hbar}\vec{A} \end{cases} \Rightarrow$$

U(1) GAUGEINVARIANS IMPLICERAR EXISTENSEN AV ELEKTROMAGNETISKA FÄLT!

Bevis av Noethers teorem



$h_s : q \rightarrow h_s(q)$, $s \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ ("liten" parameter)

$\hat{h}_s : \dot{q} \rightarrow \hat{h}_s(\dot{q}) = \frac{\partial h_s}{\partial q}\frac{dq}{dt} = \frac{\partial h_s}{\partial q}\dot{q}$

h_s är en symmetritransformation av L om L är invariant under h_s :

$$L\left(h_s(q), \hat{h}_s(\dot{q})\right) \overset{*}{=} L(q, \dot{q}) + \underbrace{\frac{d}{dt}F_s}_{\text{randterm}}$$

randterm
Ok om $F_s(t_2) = F_s(t_1)$

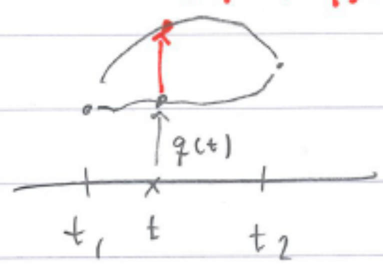
S invariant under h_s $\Downarrow$

$$\int_{t_1}^{t_2} L\left(h_s(q), \hat{h}_s(\dot{q})\right)dt = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q})\, dt + \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}F_s\, dt}_{=0}$$

Notation

$$t \xrightarrow{\phi_s} q_s = h_s(q(t)) = h_s \circ q(t) = \phi_s(t)$$

↑ för att påminna oss om att detta är en sammansatt avbildning



Derivera * med avseende på s

$$\frac{d}{ds}\left(L(q_s,\dot{q}_s) - \frac{d}{dt}F_s\right) = 0$$ ty $L(q,\dot{q})$ är oberoende av s

$$\frac{dL}{dq_s}\frac{dq_s}{ds} + \frac{dL}{\partial \dot{q}_s}\frac{d\dot{q}_s}{ds} - \frac{d}{dt}\frac{dF}{ds} = 0$$

Euler - Lagrange $= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}$

$$\frac{d}{ds}\frac{dq_s}{dt} = \frac{d^2 q_s}{dt\,ds}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\frac{dq_s}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\frac{d^2 q_s}{dt\,ds} - \frac{d}{dt}\frac{dF}{ds} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\frac{dq_s}{ds} - \frac{dF_s}{dt}\right)}_{\text{NOETHERLADDNING } Q} = 0$$

BEVARAD

Illustration: partikel i 3D under påverkan av en potential

$$L = K - U = \frac{1}{2} m\dot{q}^2 - V(q) = \{ q = \vec{r} \}$$

$$= \frac{1}{2} m\dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r})$$

Välj h_s som en translation

$$h_s : q \to h_s(q) = q + s\vec{a} = \vec{r} + s\vec{a} \equiv q_s$$

$$\hat{h}_s : \dot{q} \to \hat{h}_s(\dot{q}) = \frac{dh_s}{dt} = \dot{\vec{r}} = \dot{q}_s$$

Antag translationsinvarians: $V(\vec{r}) = V(\vec{r} + s\vec{a})$

Då är h_s en SYMMETRI TRANSFORMATION!

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = L(\vec{r} + s\vec{a}, \dot{\vec{r}}) + \underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial F_s}{\partial s}}_{\text{välj } F_s = 0}$$

$$\Rightarrow Q = \vec{a} \cdot m\dot{\vec{r}} = \vec{a} \cdot \vec{p}$$

$\Rightarrow$ $\vec{p}$ bevarat ty $\vec{a}$ godtycklig

RÖRELSEMÄNGDENS BEVARANDE

Illustration: partikel i 3D under påverkan av en potential

$$L = K - U = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q) = \{ q = \vec{r} \}$$

Välj h_s som en translation

$$= \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r})$$

$$h_s : q \longrightarrow h_s(q) = q + s\vec{a} = \vec{r} + s\vec{a} \equiv q_s$$

$$\hat{h}_s : \dot{q} \longrightarrow \hat{h}_s(\dot{q}) = \frac{dh_s}{dt} = \dot{\vec{r}} = \dot{q}_s$$

Antag translationsinvarians: $V(\vec{r}) = V(\vec{r} + s\vec{a})$

Då är h_s en SYMMETRI TRANSFORMATION!

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = L(\vec{r} + s\vec{a}, \dot{\vec{r}}) + \underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial F_s}{\partial s}}_{\text{välj } F_s = 0}$$

$$\Rightarrow Q = \vec{a} \cdot m\dot{\vec{r}} = \vec{a} \cdot \vec{p}$$

$\Rightarrow$ $\vec{p}$ bevarat ty $\vec{a}$ godtycklig

RÖRELSEMÄNGDENS BEVARANDE

(Fundamentala) rum-tid symmetrier

- translation i tiden $t \to t' = t + a_0$
- translation i rummet $\vec{r} \to \vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{a}$
- rotation i rummet $\vec{r} \to \vec{r}\,' = R\vec{r}$

3×3 rotationsmatris

Property	Invariance of equations	Conserved quantity
homogeneity of time	time translation invariance	energy
homogeneity of space	translational invariance	momentum
isotropy of space	rotational invariance	angular momentum

Också *interna* kontinuerliga symmetrier implicerar bevarade storheter enligt Noether.

Exempel: U(1) gauge symmetri

$\in \mathbb{R} \Rightarrow$ definierande rep av $U(1)$

$$\psi(\vec{r},t) \longrightarrow \psi'(\vec{r},t) = e^{i\alpha(\vec{r},t)}\psi(\vec{r},t) \qquad (*)$$

Fasen $\alpha(\vec{r},t)$ är en kontinuerlig parameter

$\Downarrow$

U(1) gauge invarians är en KONTINUERLIG SYMMETRI

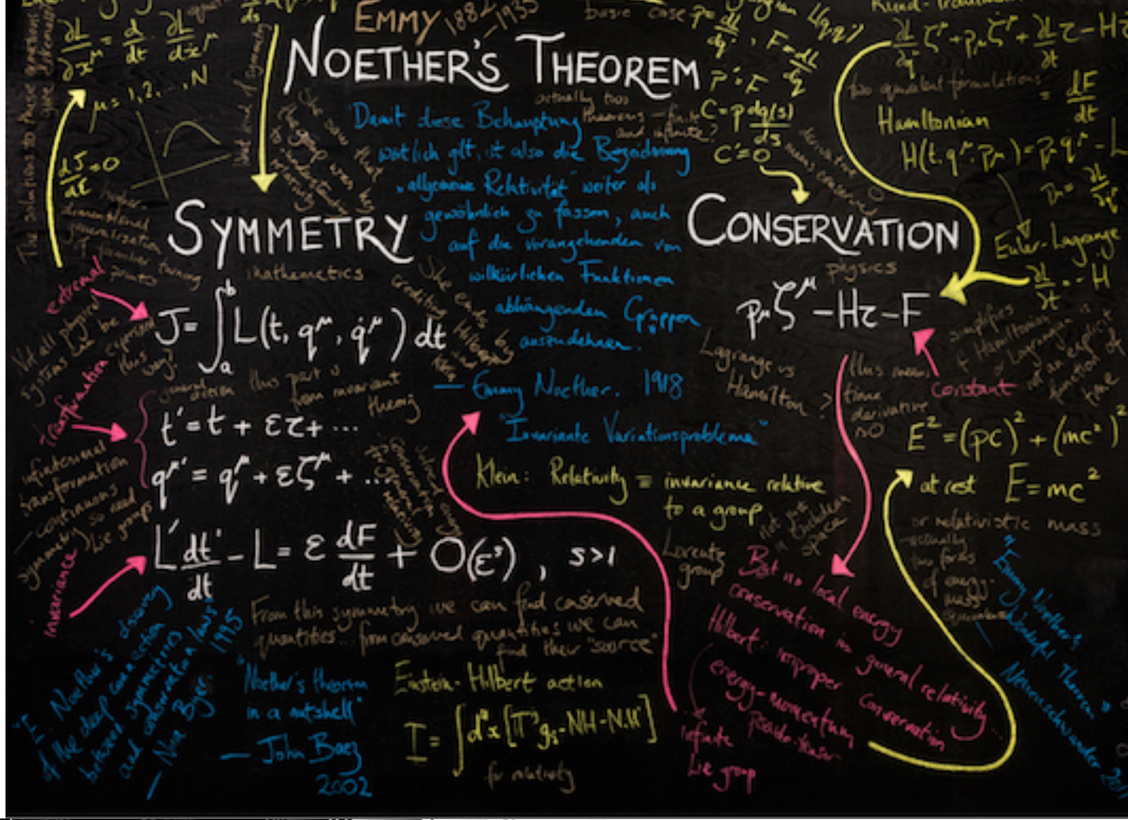
$\Downarrow$ NOETHER

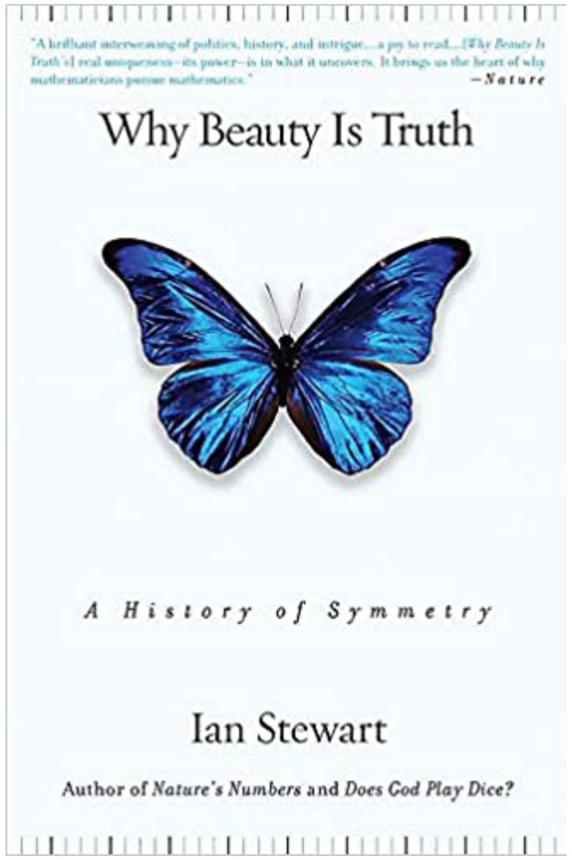
$$Q = q$$

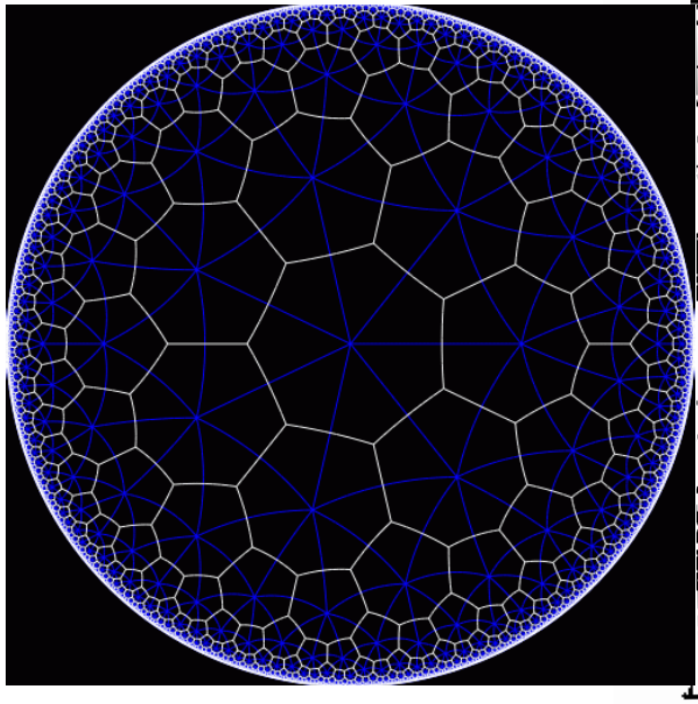
elektrisk laddning

Emmy Noether, 1882-1935

… bortom Noether….







Why Beauty Is Truth: A History of Symmetry

Men det mesta runt omkring
oss är ju inte alls symmetriskt!

Men det mesta i vår verklighet
är ju inte alls symmetriskt!

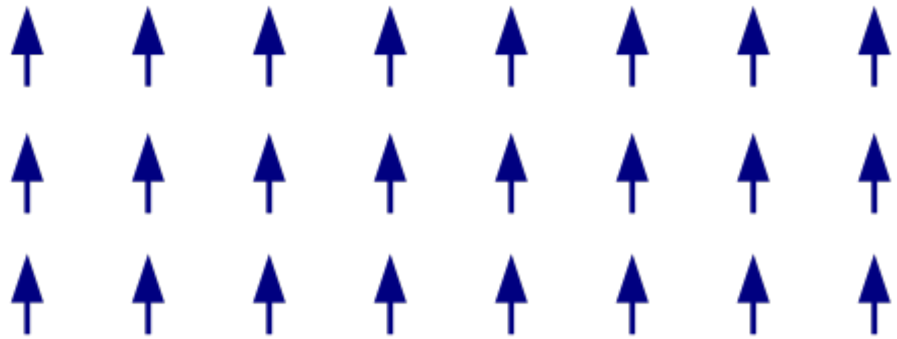
?

Fysiken har en ”historia”…

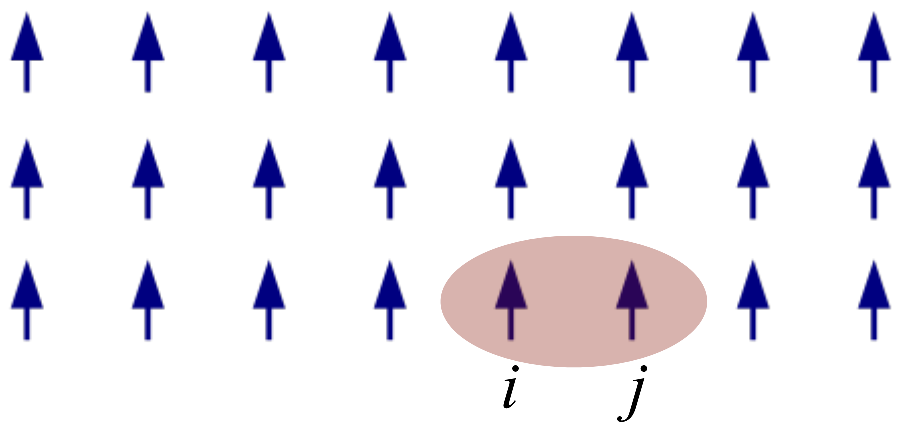
Diff ekvationer + begynnelse/randvillkor

fysikens teorier, lagar, och samband

!



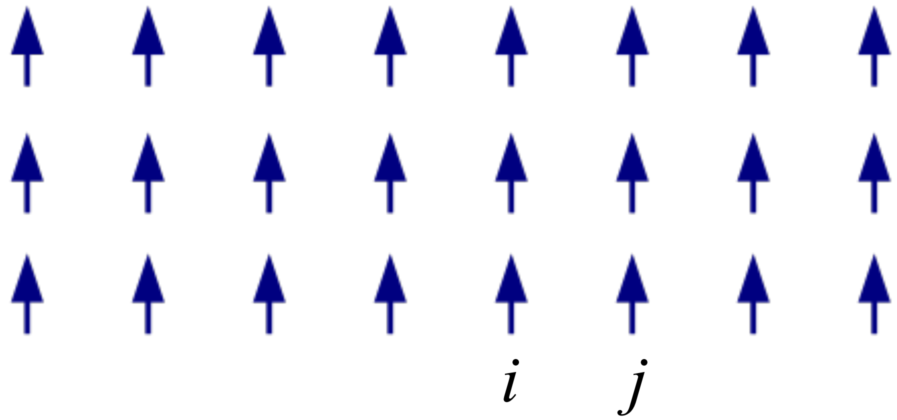
ferromagnetiskt tillstånd:
rotationssymmetrin bruten



ferromagnetiskt tillstånd:
rotationssymmetrin bruten

$$H = -J \sum_{<i,j>} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$$

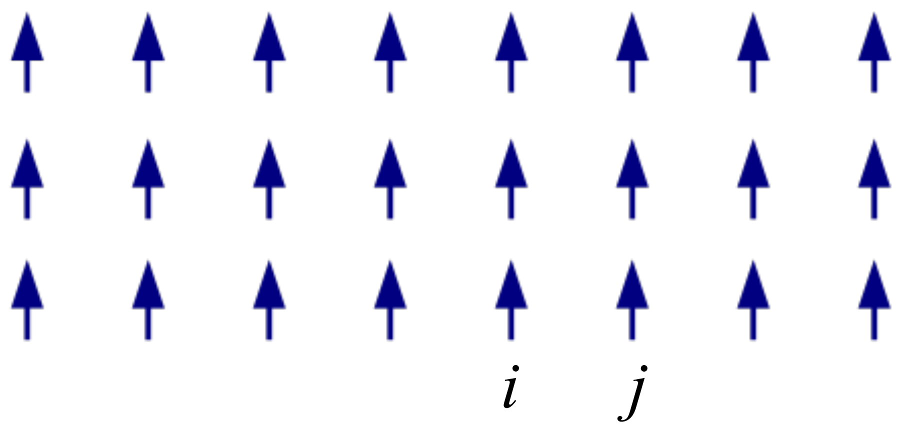
enklaste modellen för en ferromagnet:
Heisenbergmodellen



ferromagnetiskt tillstånd:
rotationssymmetrin bruten!

enklaste modellen för en ferromagnet:
Heisenbergmodellen
rotationssymmetrisk!

$$H = -J \sum_{<i,j>} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$$



ferromagnetiskt tillstånd:
rotationssymmetrin bruten!

$$H = -J \sum_{<i,j>} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$$

enklaste modellen för en ferromagnet:
Heisenbergmodellen
rotationssymmetrisk!

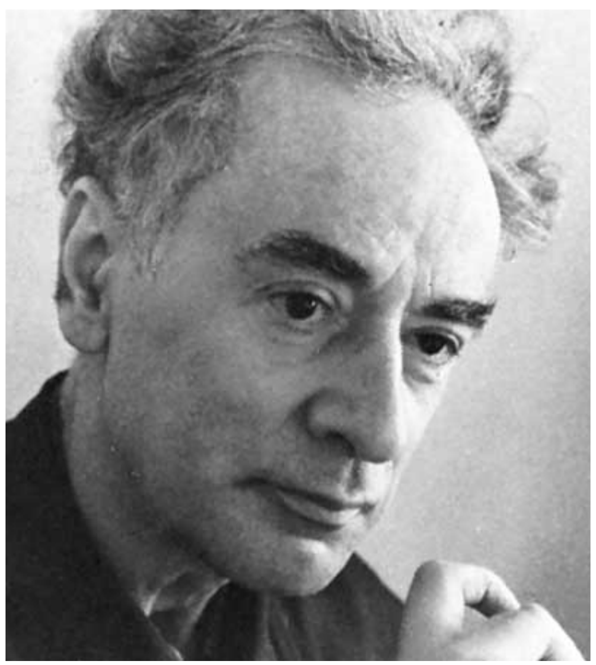
”Spontant symmetribrott”!

En pytteliten störning av ett av spinnen (ett *begynnelsevillkor* som lokalt riktar upp det spinnet i en bestämd riktning) fortplantar sig genom hela systemet via växelverkan mellan alla spinnen.

”Spontant symmetribrott”

Vi kan klassificera de allra flesta av materiens faser efter vilka symmetrier som är *spontant brutna…*

T.ex.: ett magnetiskt ordnat tillstånd är ett tillstånd som bryter rotationsinvariansen spontant



Lev D. Landau
1908-1968