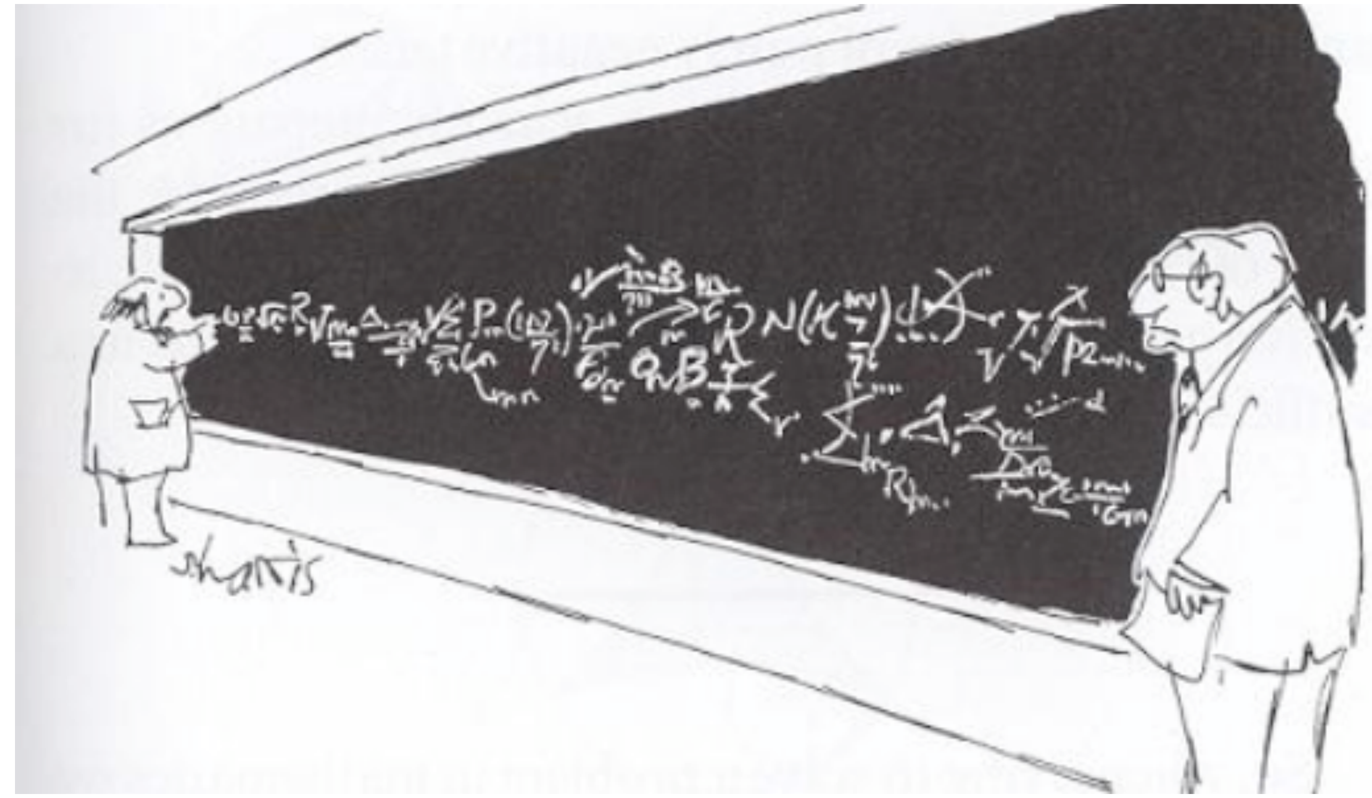
Ofta i fysiken....

förskräckliga integraler!

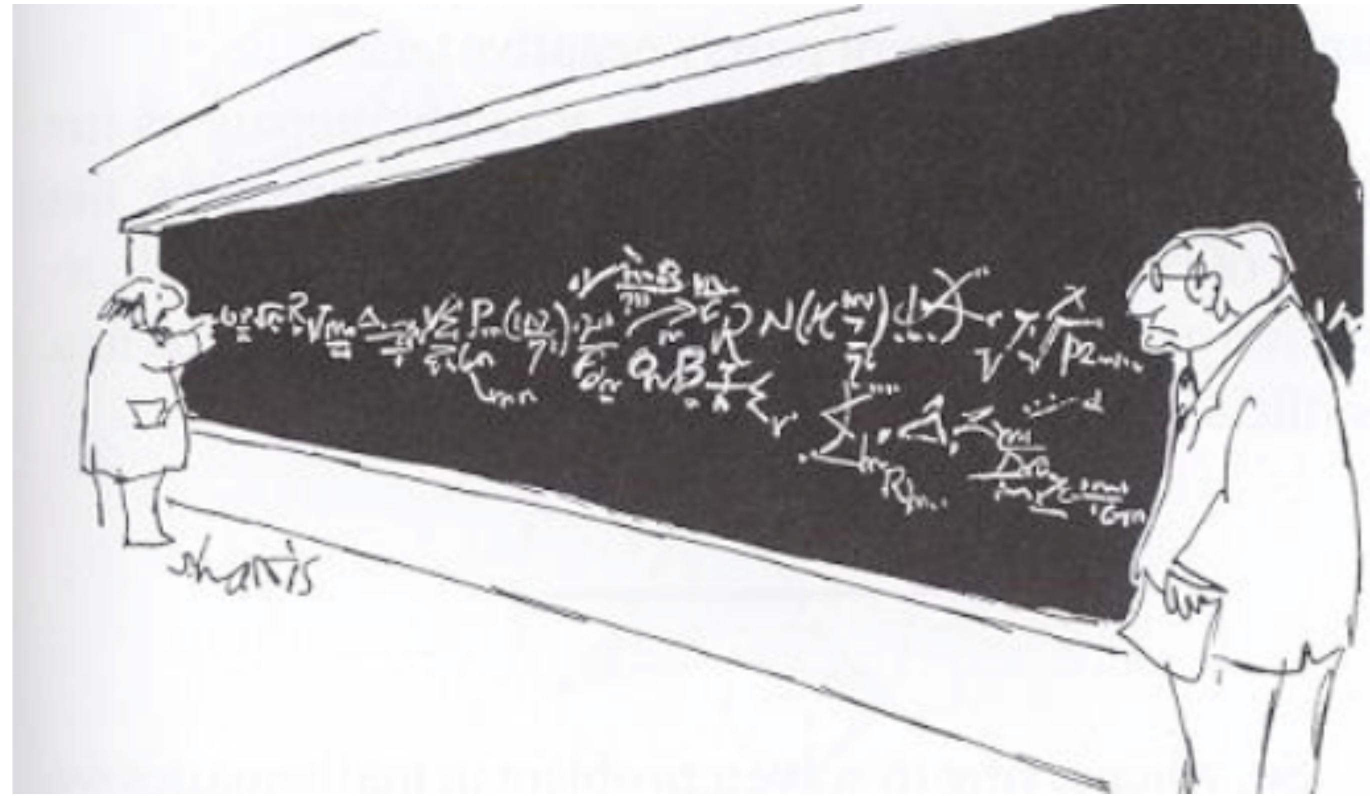
...kan fortfarande lösas elegant med
fiffig användning av residykalkyl!



Ofta i fysiken....

förskräckliga integraler!

...kan fortfarande lösas elegant med
fiffig användning av residykalkyl!

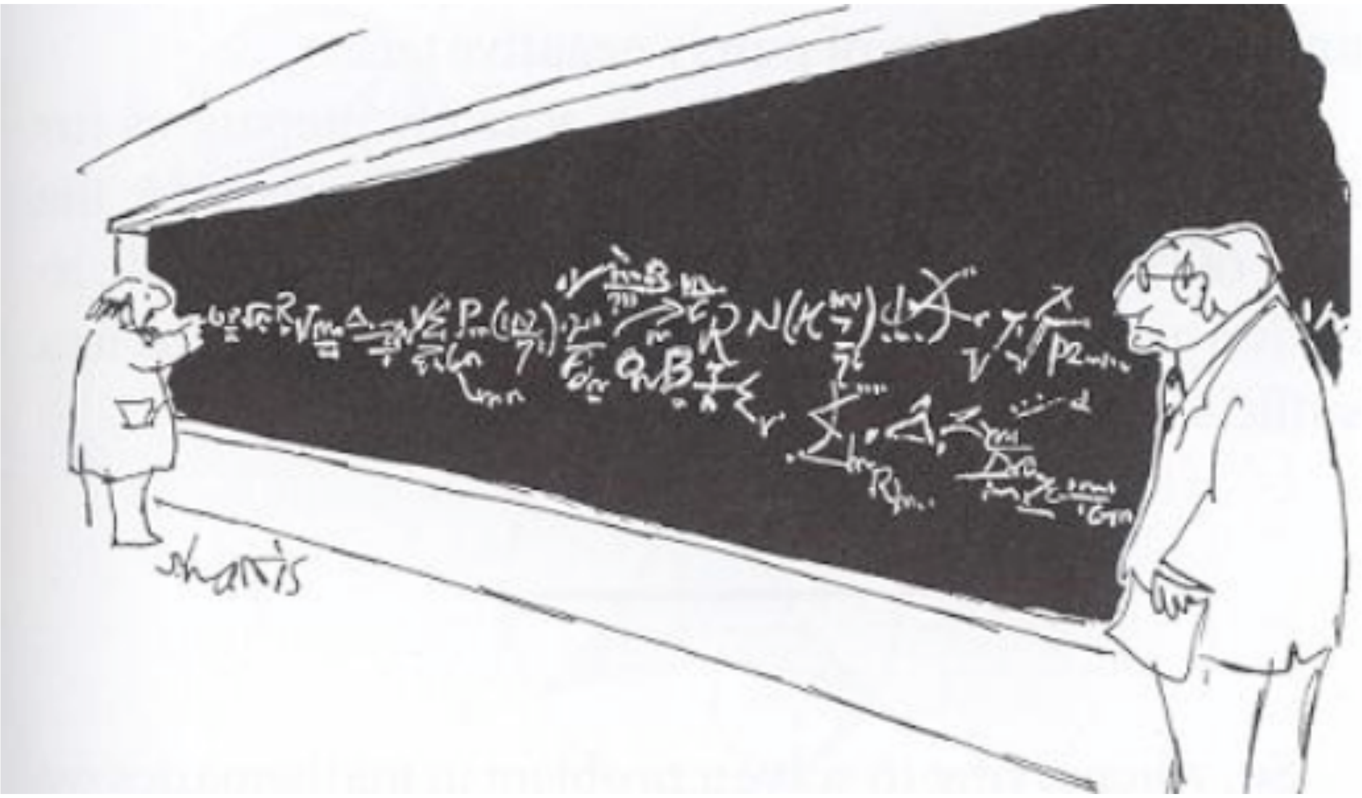


Välj en smart kurva!

Ofta i fysiken....

förskräckliga integraler!

...kan fortfarande lösas elegant med fiffig användning av residykalkyl!



Välj en smart kurva!

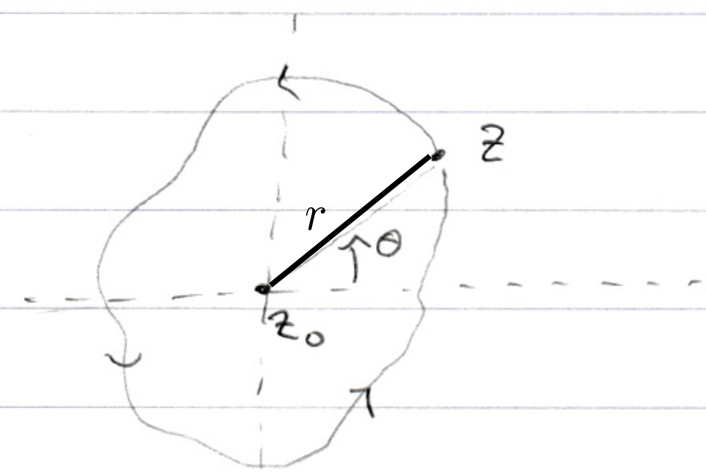
... eller integrera längs ett grensnitt!

Bakgrund: flervärda funktioner

EX $f(z) = \sqrt{z} = \{ z = re^{i\theta} \} = \sqrt{r}\, e^{i\theta/2}$

$f(z) = f(r,\theta) = -f(r, \theta + 2\pi)$

TVÅ VÄRDEN I SAMMA PUNKT!



$z_0 = 0$ ÄR EN GRENPUNKT OM

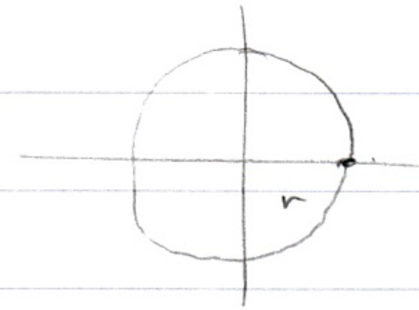
$f(z) = f(r,\theta) \neq f(r, \theta + 2\pi)$

FÖR EN GODTYCKLIG SLUTEN KURVA RUNT z_0.

EX $\ln z = \underbrace{\ln re^{i\theta}}_{\ln r + i\theta} \neq \underbrace{\ln(re^{i(\theta + 2n\pi)})}_{\ln r + i\theta + i2n\pi} \quad n \in \mathbb{Z}$

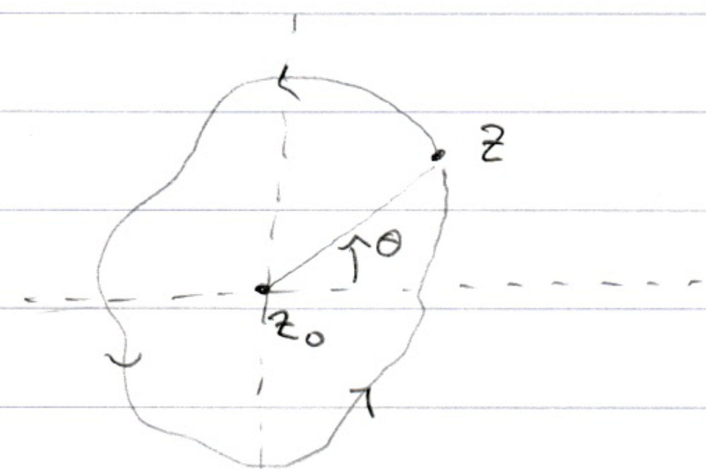
Bakgrund: flervärda funktioner

EX $f(z) = \sqrt{z} = \{ z = re^{i\theta} \} = \sqrt{r}\, e^{i\theta/2}$



$f(z) = f(r,\theta) = -f(r, \theta + 2\pi)$

TVÅ VÄRDEN I SAMMA PUNKT!



$z_0 = 0$ ÄR EN GRENPUNKT OM

$f(z) = f(r,\theta) \neq f(r, \theta + 2\pi)$

FÖR EN GODTYCKLIG SLUTEN KURVA RUNT z_0.

EX $\ln z = \ln re^{i\theta} \neq \ln\left(re^{i(\theta + 2n\pi)}\right) \quad n \in \mathbb{Z}$

$\ln r + i\theta \neq \ln r + i\theta + i2n\pi$

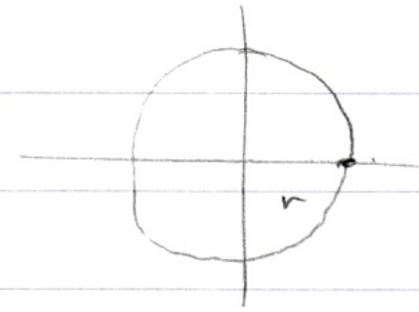
Flera värden på en funktion i samma punkt
(t.o.m. oändligt många för lnz!)

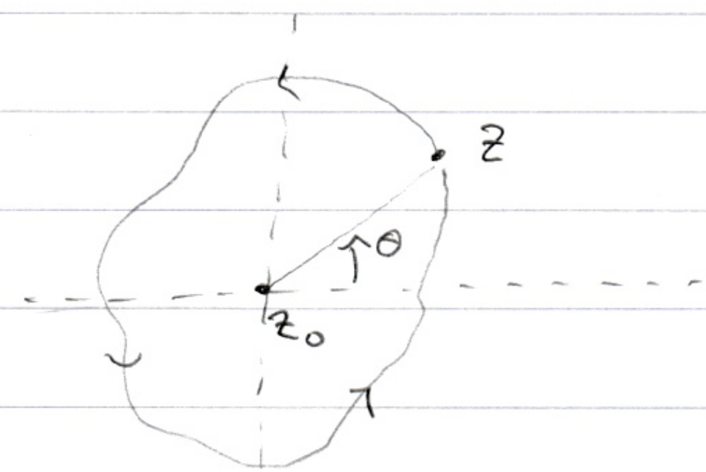
Bakgrund: flervärda funktioner

Ex $f(z) = \sqrt{z} = \{ z = re^{i\theta} \} = \sqrt{r}\, e^{i\theta/2}$

$f(z) = f(r,\theta) = -f(r, \theta + 2\pi)$

TVÅ VÄRDEN I SAMMA PUNKT!





$z_0 = 0$ ÄR EN GRENPUNKT OM

$f(z) = f(r,\theta) \neq f(r, \theta + 2\pi)$

FÖR EN GODTYCKLIG SLUTEN KURVA RUNT z_0.

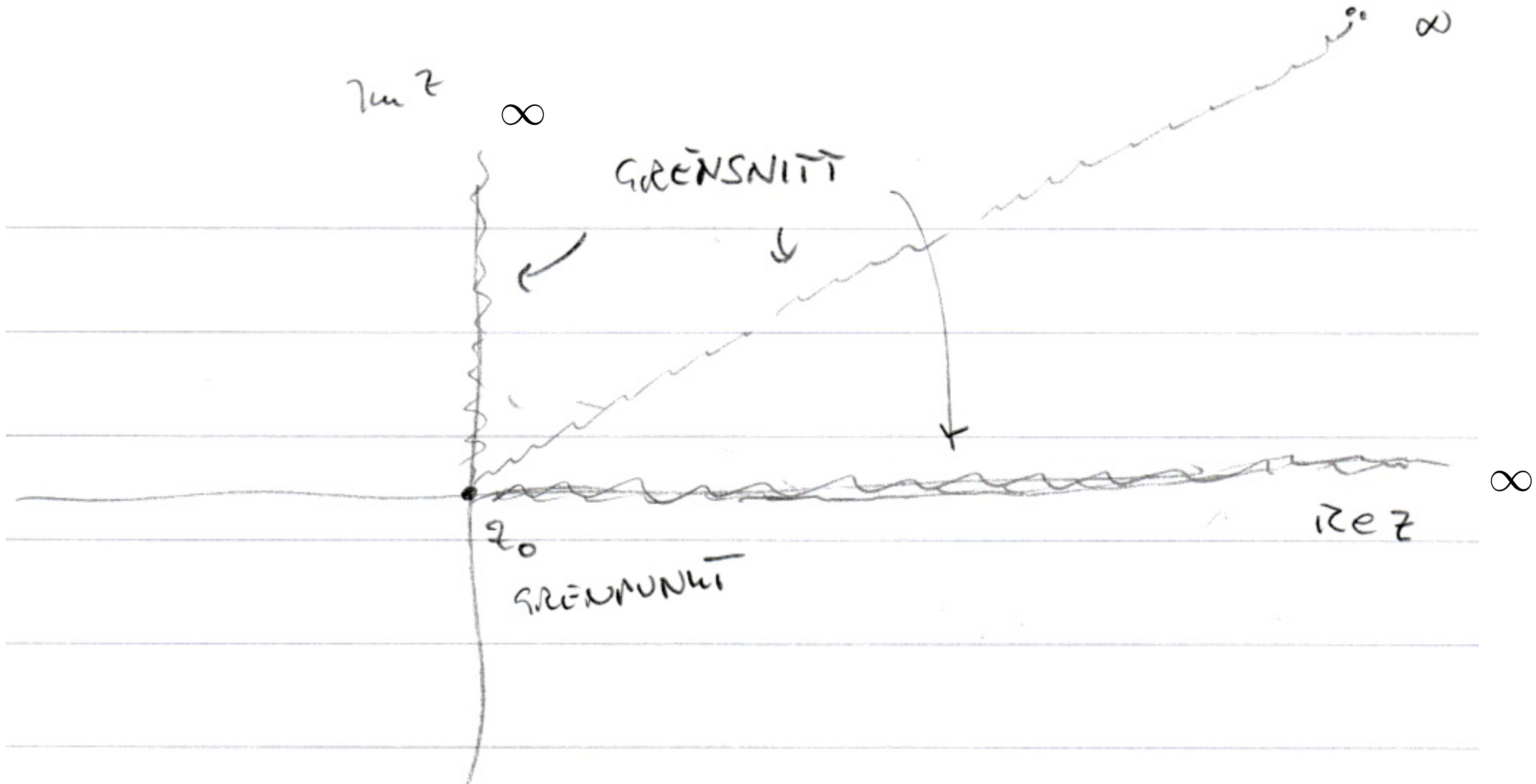
Ex $\ln z = \ln re^{i\theta} \neq \ln(re^{i(\theta + 2n\pi)})$ $n \in \mathbb{Z}$

$\ln r + i\theta \neq \ln r + i\theta + i2n\pi$

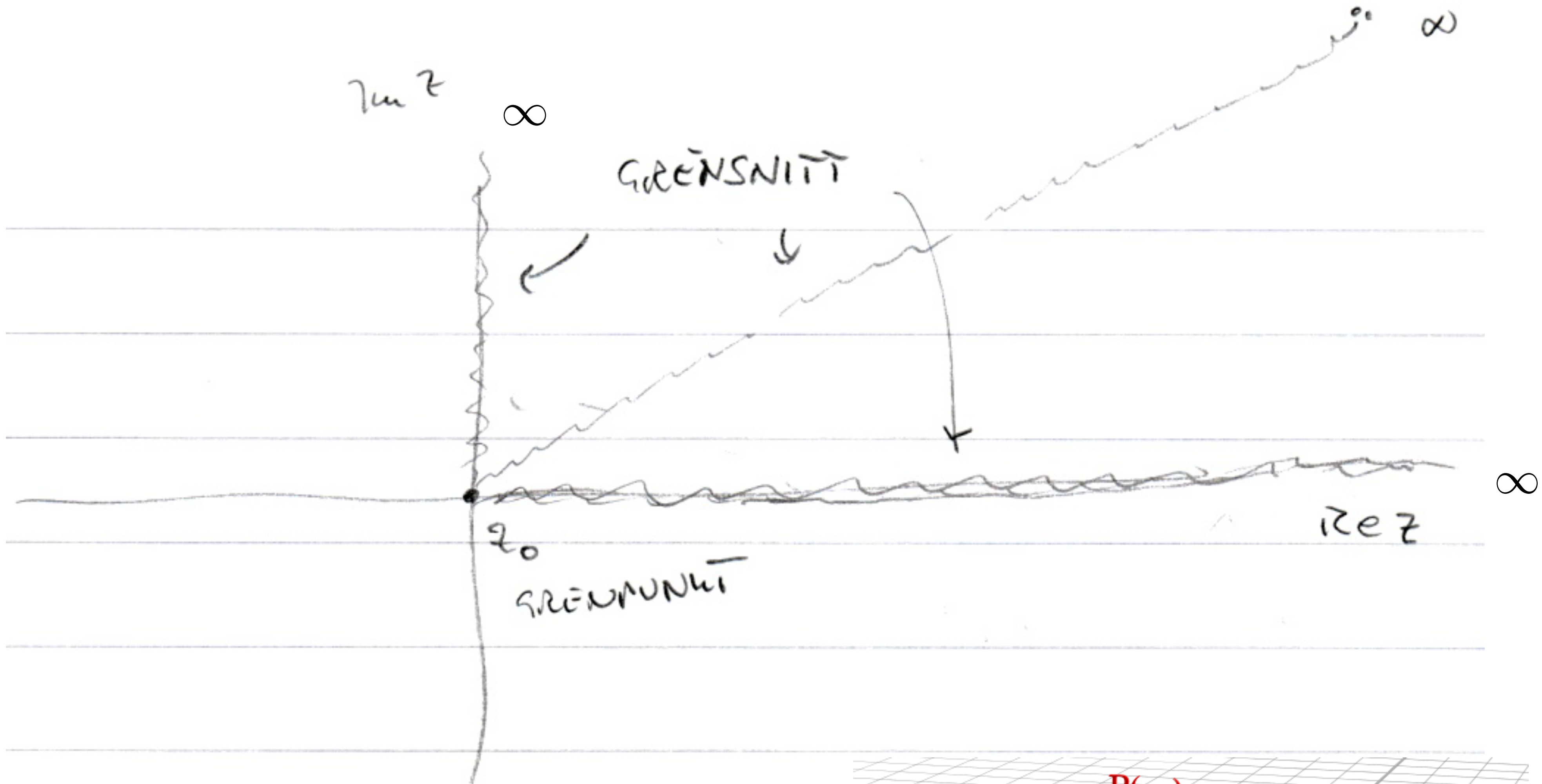
Flera värden på en funktion i samma punkt
(t.o.m. oändligt många för lnz!)

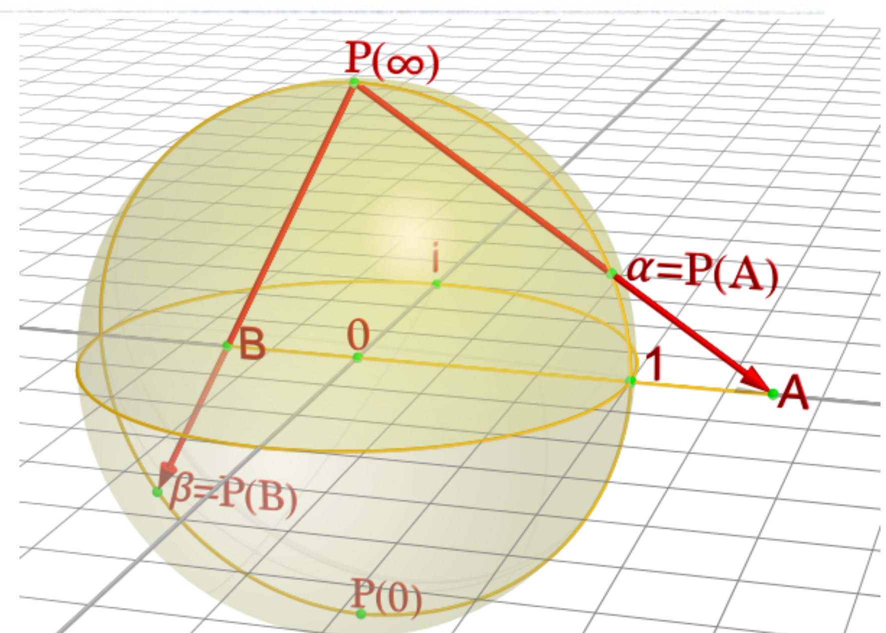
KAN UTNYTTJAS I RESIDYKALKYL!

Definiera en GREN av funktionen genom att lägga ett **GRENSNITT** mellan grenpunkten och "**punkten i oändligheten**".



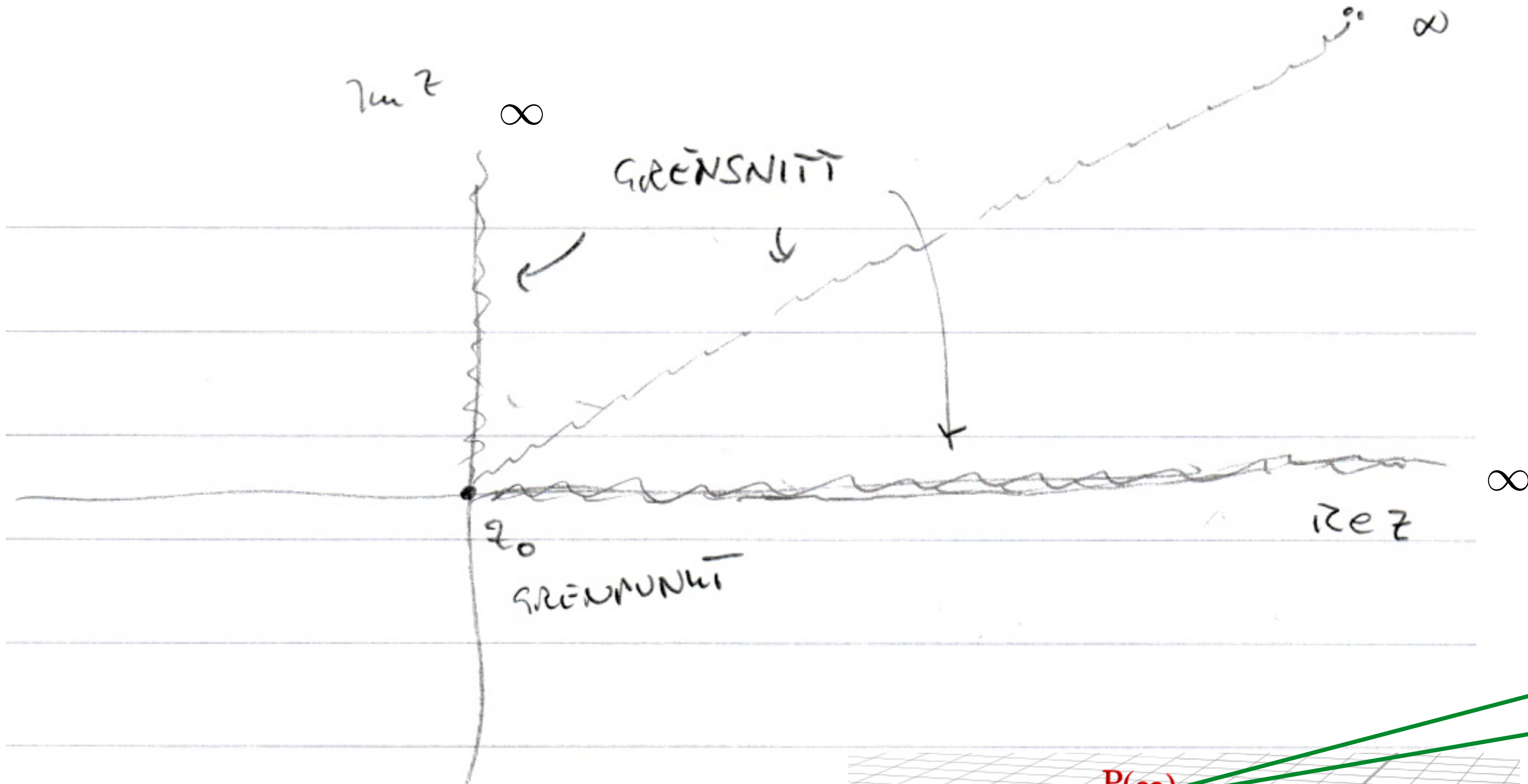
Definiera en GREN av funktionen genom att lägga ett **GRENSNITT** mellan grenpunkten och ”**punkten i oändligheten**”.

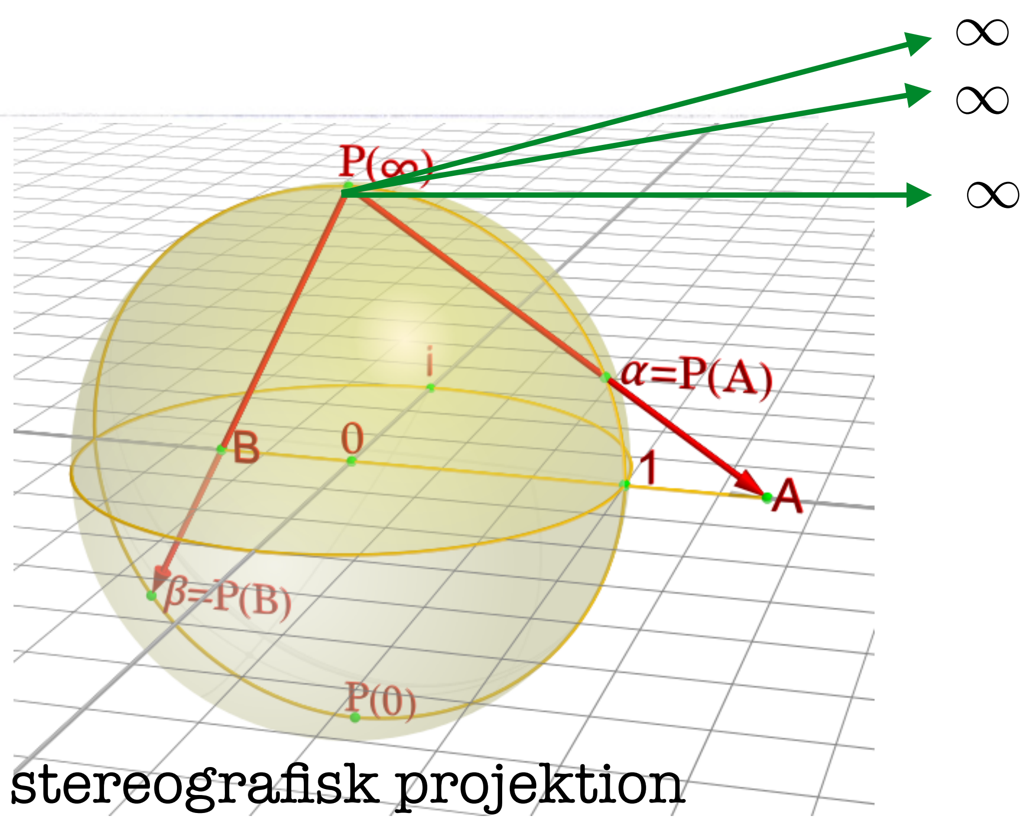




stereografisk projektion
på komplexa talplanet

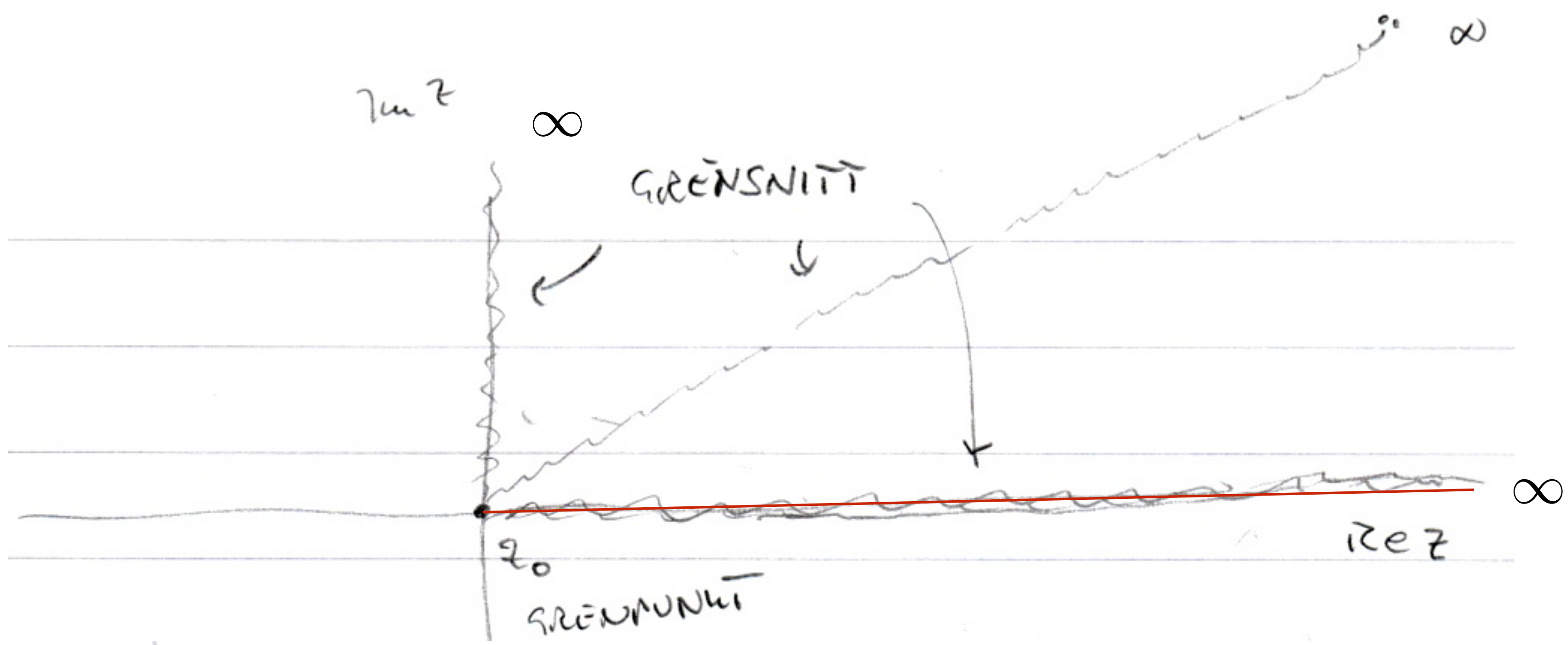
Definiera en GREN av funktionen genom att lägga ett
GRENSNITT mellan grenpunkten och "**punkten i oändligheten**".





stereografisk projektion
på komplexa talplanet

Definiera en GREN av funktionen genom att lägga ett **GRENSNITT** mellan grenpunkten och "punkten i oändligheten".



"1:A GRENEN" $f_1(z) = \ln z, \quad 0 < \theta < 2\pi$

$f_2(z) = \ln z, \quad 2\pi < \theta < 4\pi$

"2:A GRENEN"

OSV

Vi kan **inte** passera ett grensnitt!

En flervärd funktion ersätts med **en sekvens** av enkelvärda funktioner med en diskontinuitet vid grensnittet.

Ibland uppträder grenpunkter parvis.

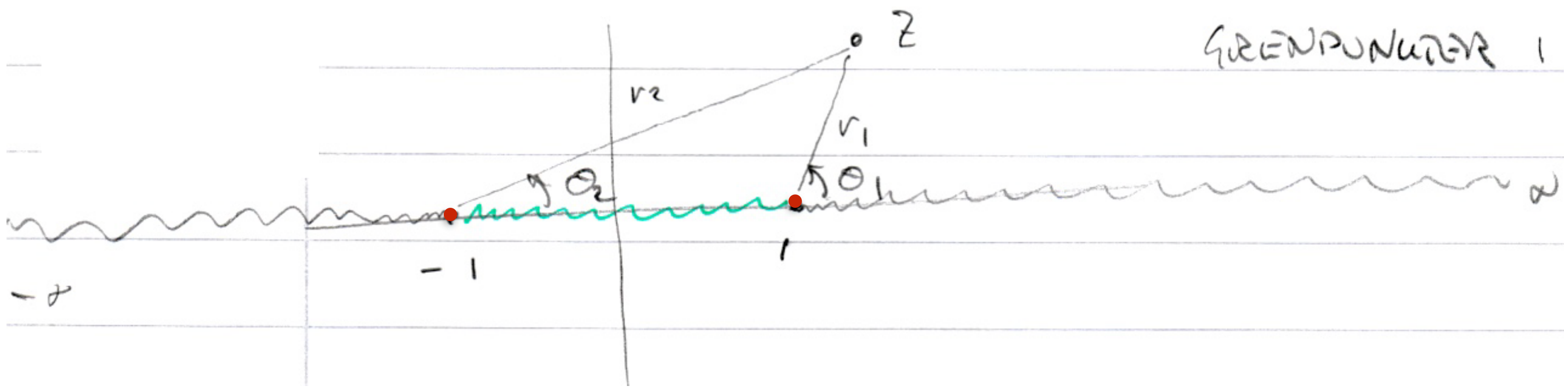
Kan då välja ett **grensnitt** som sammanbinder de två grenpunkterna.

EX

$$f(z) = \sqrt{z^2-1} = \sqrt{z-1}\sqrt{z+1} = \begin{cases} z-1 = r_1 e^{i\theta_1} \\ z+1 = r_2 e^{i\theta_2} \end{cases}$$

$$= \sqrt{r_1 r_2}\, e^{i(\theta_1+\theta_2)/2}$$

GRENPUNKTER i $z_1 = 1$, $z_2 = -1$



Multivärd komplex funktion definierad i komplexa talplanet [jfr. ln(z)!]

↓

sekvens av enkelvärda komplexa funktioner definierade i komplexa talplanet

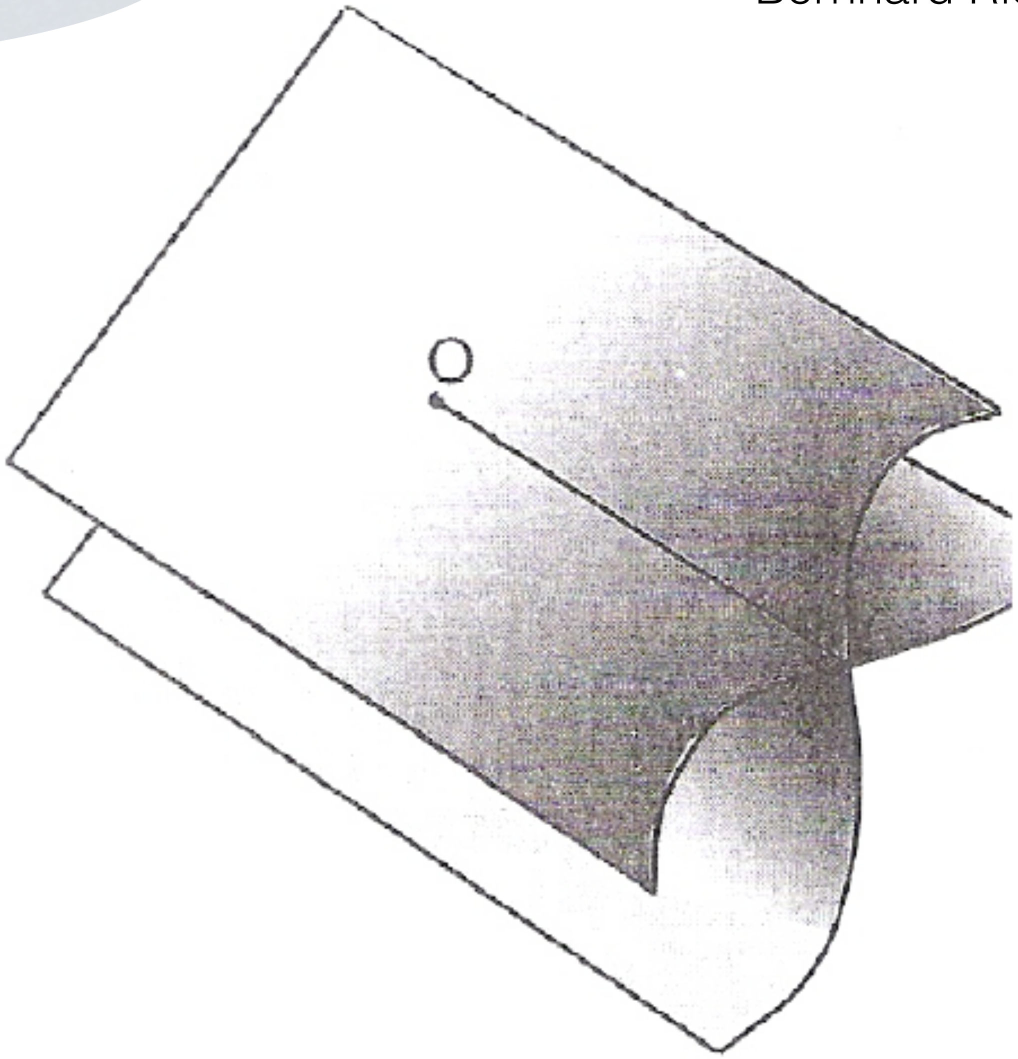
↓

en enkelvärd komplex funktion **definierad på en Riemannyta**
[= Riemannblad* ihopklistrade längs *grensnitt*]

sammanbinder **två** *grenpunkter*
(eller **en** grenpunkt med "punkten i oändligheten")

*kopia av det komplexa talplanet

Bernhard Riemann, 1826-1866



Riemannyta för funktionen $f(z) = z^{1/2}$

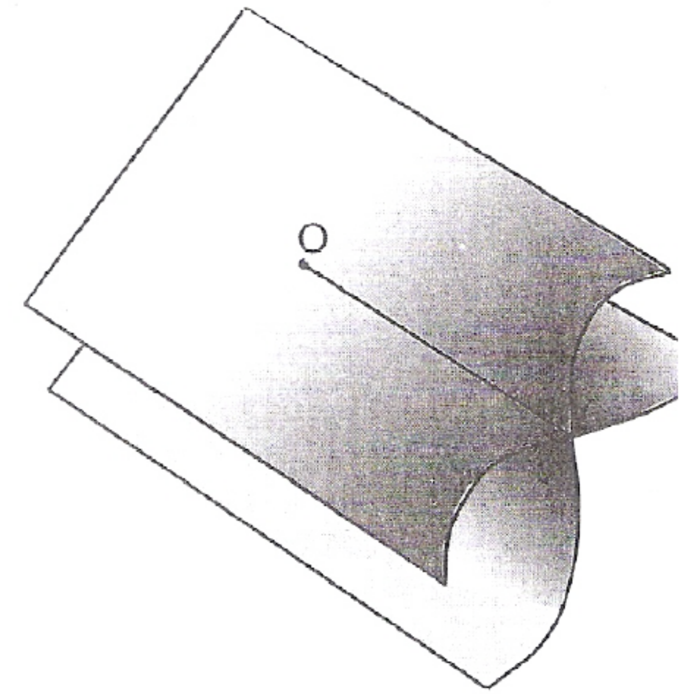
Multivärd komplex funktion definierad i komplexa talplanet [jfr. ln(z)!]

sekvens av enkelvärda komplexa funktioner definierade i komplexa talplanet

en enkelvärd komplex funktion **definierad på en Riemannyta**
[= Riemannblad* ihopklistrade längs *grensnitt*]

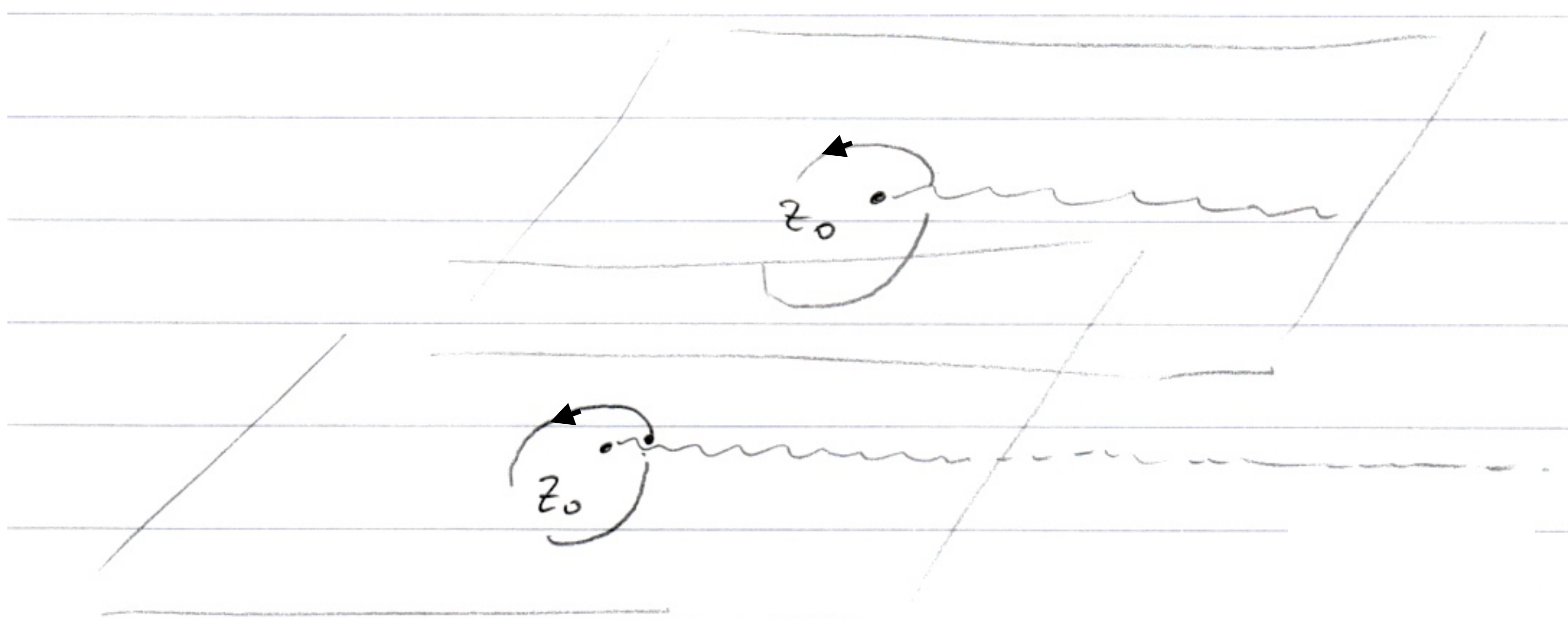
sammanbinder **två** *grenpunkter*
(eller **en** grenpunkt med "punkten i oändligheten")

*kopia av det komplexa talplanet



Riemannyta för funktionen $f(z) = z^{1/2}$

Riemannblad 2



Riemannblad 1

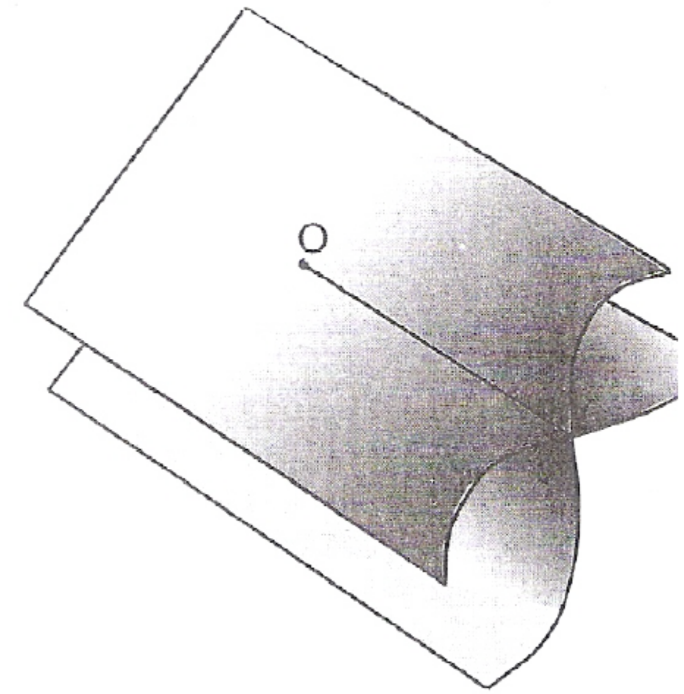
Multivärd komplex funktion definierad i komplexa talplanet [jfr. ln(z)!]

sekvens av enkelvärda komplexa funktioner definierade i komplexa talplanet

en enkelvärd komplex funktion **definierad på en Riemannyta**
[= Riemannblad* ihopklistrade längs *grensnitt*]

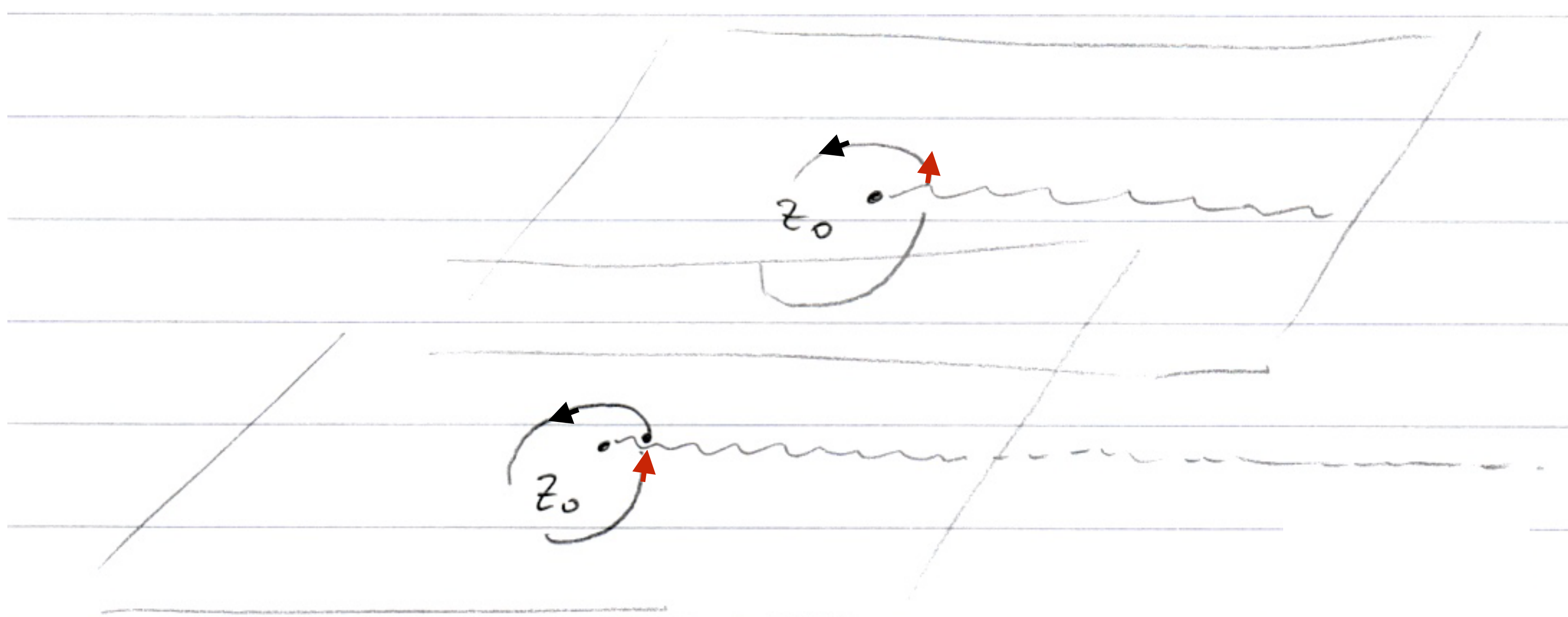
sammanbinder **två** *grenpunkter*
(eller **en** grenpunkt med "punkten i oändligheten")

*kopia av det komplexa talplanet



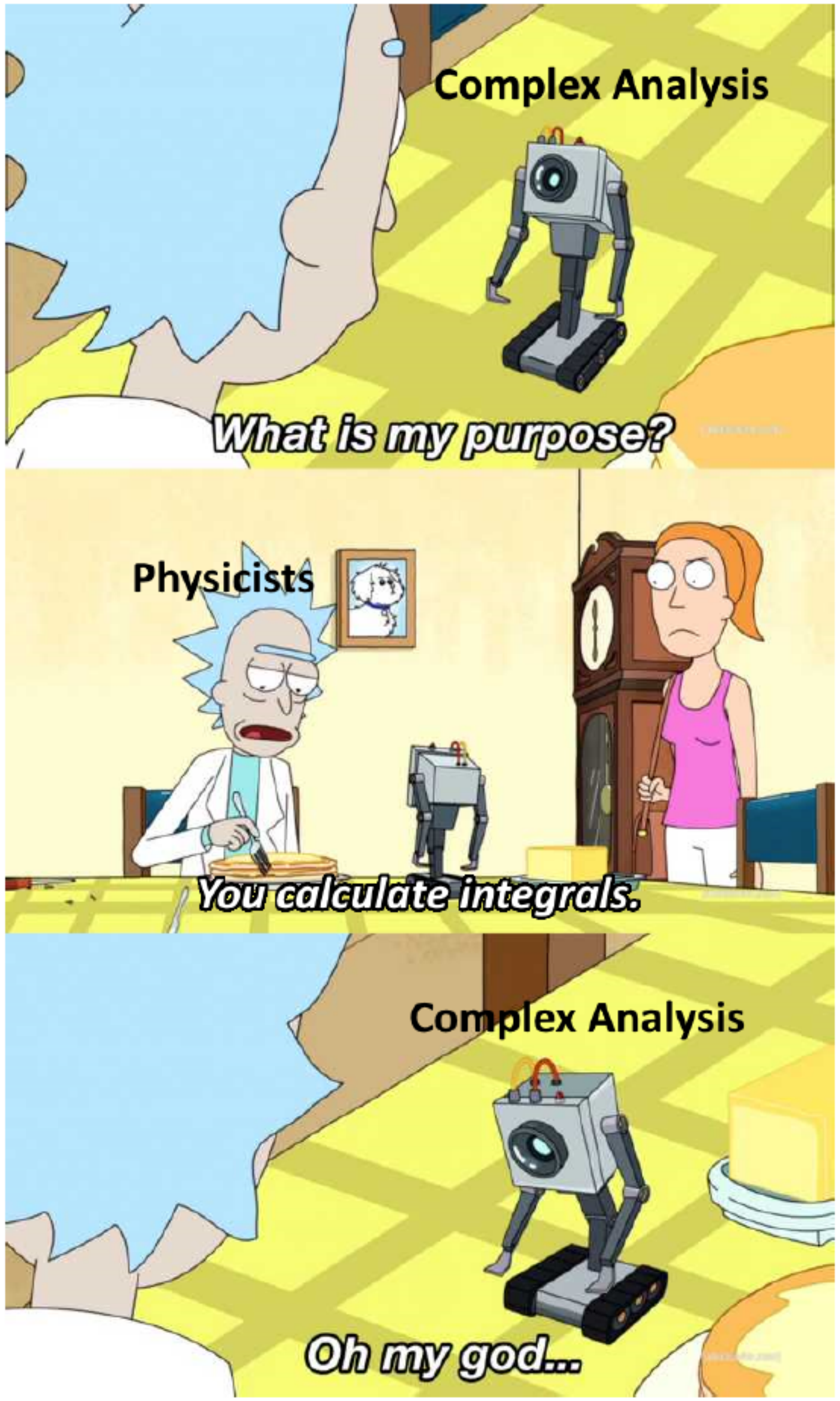
Riemannyta för funktionen $f(z) = z^{1/2}$

Riemannblad 2



Riemannblad 1

Residue theorem goes brrrr



HUR UTNYTTJA GRENSNITT I RESIDYKALKYL ?

EX INLÄMNINGSUPPGIFT

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,(1+x^2)}$$

Vill använda residykalkyl :

KOMPLEXIFIERA! BILDA EN SLUTEN KURVA C i $\mathbb{C}$.

BETRAKTA
$$\oint_C \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\,\underbrace{(1+z^2)}_{(z-i)(z+i)}}$$

GRENPUNKTER i $z = \pm 1$

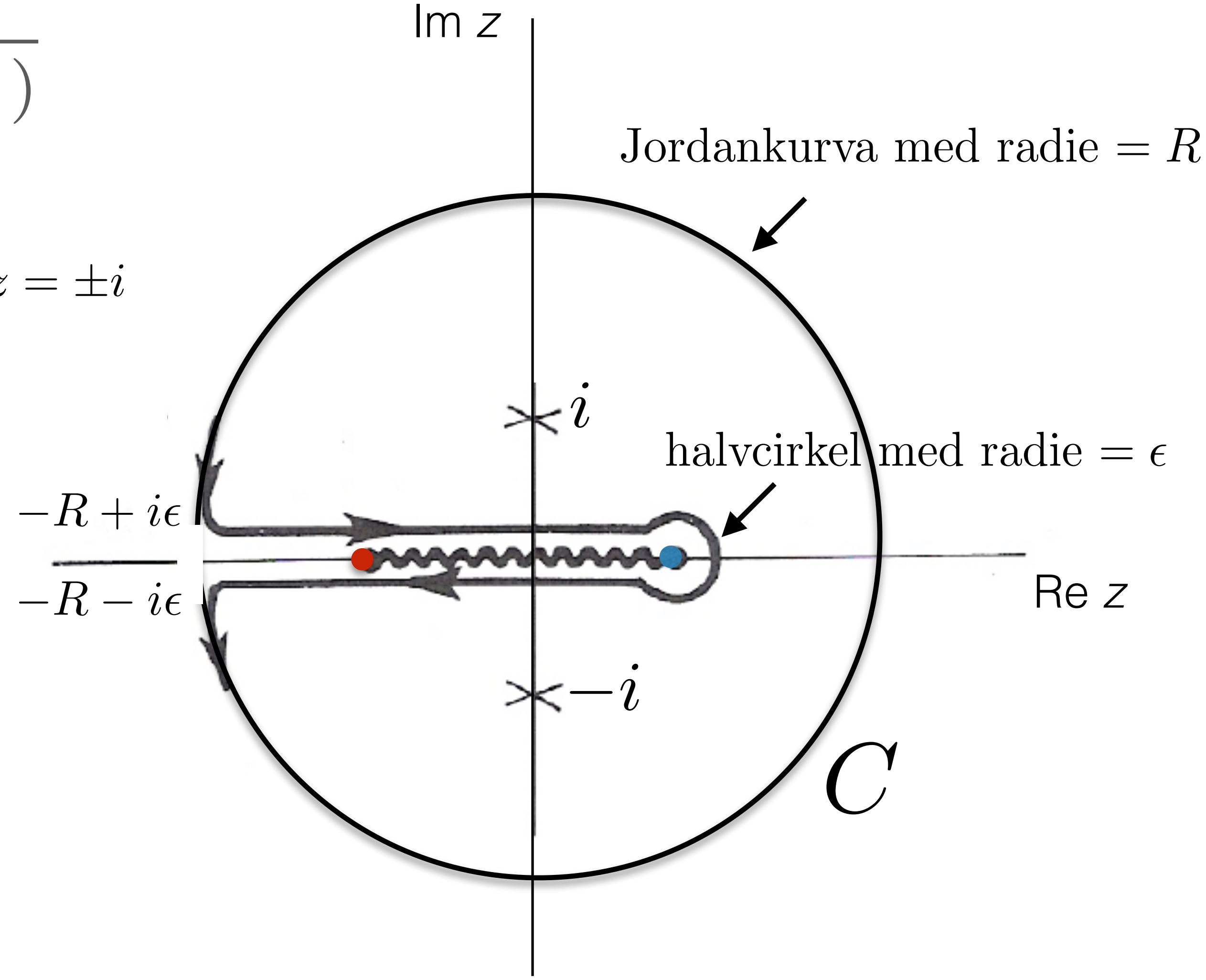
ENKLA POLER i $z = \pm i$

(definierad via funktionens Laurentutveckling

$$I = \oint_C \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}(1+z^2)}$$

grenpunkter i $z = -1$, $z = 1$

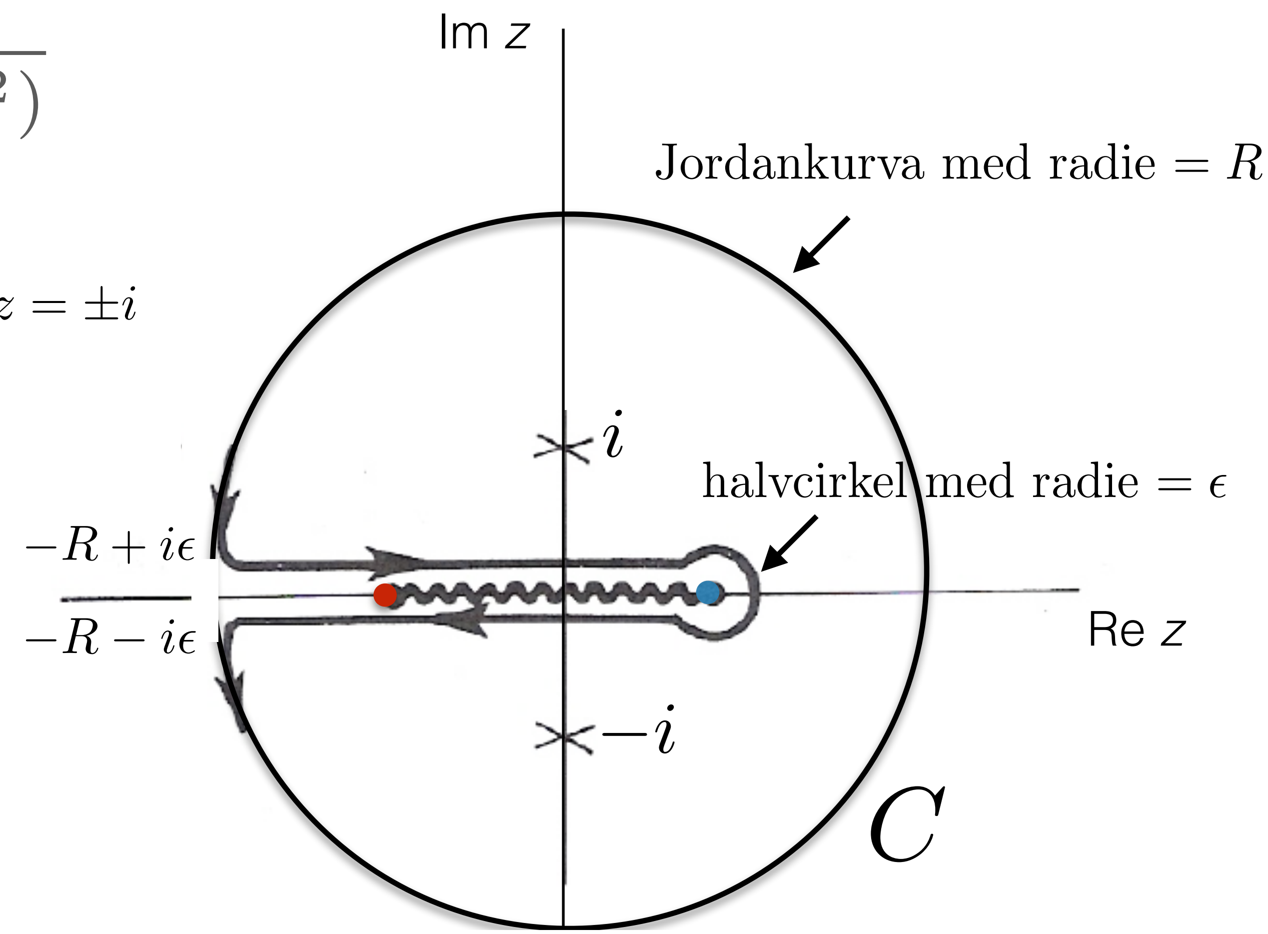
poler i $z = \pm i$



$$I = \oint_C \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}(1+z^2)}$$

grenpunkter i $z = -1$, $z = 1$

poler i $z = \pm i$



UTNYTTJA $\sqrt{1-z^2} = \sqrt{r_1 r_2}\, e^{i(\theta_1+\theta_2)/2}$

TA GRÄNSEN $R \to \infty$, ANVÄND JORDANS LEMMA!

TA GRÄNSEN $\varepsilon \to 0$ MOTIVERA!

KOLLA NOGA VAD SOM HÄNDER LÄNGS GRENSNITTET!

(VI HAR EN DISKONTINUITET!)

Utnyttja grensnittet vid integrationen.

SVAR: $I = \pi/\sqrt{2}$

EX

OCKSÅ INLÄMNINGSUPPGIFT

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+1}$$

Typ $\ln(z)$, $\sqrt{z}$, ...

Men inga grenpunkter ??!

KOMPLEXIFIERA! INFÖR EN FLERVÄRD "HJÄLPFUNKTION" $g(z)$

INFÖR GRENSNITT. BILDA SLUTEN KURVA C.

UTNYTTJA GRENSNITTET VID INTEGRATIONEN!

$$I = \oint_C \frac{g(z)}{z^3+1}\,dz$$

SVAR: $I = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

Viktig integral vid fysiktillämpningar:

"Principalvärdet" för en reell funktion med en enkel pol

$$P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-x_0}\,dx \;=\; \pm i\pi f(x_0)+2\pi i\sum_{j=1}^{m}\,\mathrm{Res}[\frac{f(z_j)}{z_j-x_0}]$$

där z_j är polerna till $\frac{f(z)}{z-x_0}$ i övre $(+)$ eller undre $(-)$ komplexa halvplanet.

Viktig integral vid fysiktillämpningar:

"Principalvärdet" för en reell funktion med en enkel pol

$$P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0}\,dx \;=\; \pm i\pi f(x_0) + 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}\Big[\frac{f(z_j)}{z_j - x_0}\Big]$$

där z_j är polerna till $\frac{f(z)}{z-x_0}$ i övre (+) eller undre (−) komplexa halvplanet.

Låt oss börja med att betrakta integralen

$$\underline{I} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0}\,dx \quad , \quad f \text{ KONTINUERLIG}$$

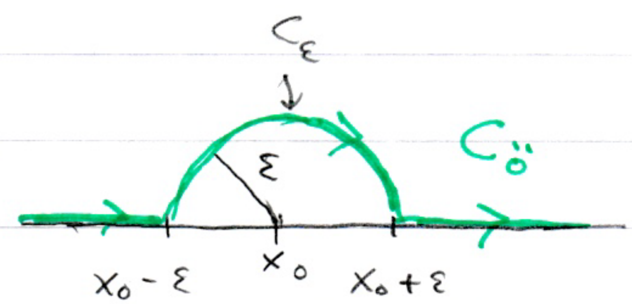
VI KAN DEFINIERA $\bar{I}$ VIA SITT PRINCIPALVÄRDE $P\int \ldots$:

$$P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{-\infty}^{x_0-\varepsilon} \frac{f(x)}{x-x_0}\,dx + \int_{x_0+\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0}\,dx \right]$$

HUR BERÄKNA $P\int \ldots$?

HUR BERÄKNA $P\int \ldots$?

KOMPLEXIFIERA! VÄLJ EN KURVA "$C_ö$"



$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_ö}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\underbrace{\int_{-\infty}^{x_0-\varepsilon}\frac{f(x)}{x-x_0}\,dx+\int_{x_0+\varepsilon}^{\infty}\frac{f(x)}{x-x_0}\,dx}_{P\int\ldots}+\int_{C_\varepsilon}\frac{f(z)}{z-x_0}\,dz\right)$$

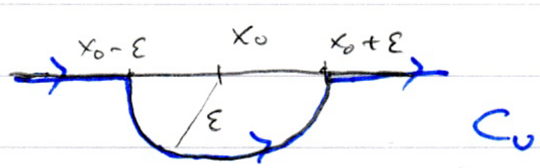
C_ε ← HALVCIRKELN ($z=x_0+\varepsilon e^{i\theta}$)

$$\int_{C_\varepsilon}\frac{f(z)}{z-x_0}\,dz=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\pi}^{0}\frac{f(x_0+\varepsilon e^{i\theta})}{\cancel{x_0}+\varepsilon e^{i\theta}\cancel{-x_0}}\,i\varepsilon e^{i\theta}\,d\theta=-i\pi f(x_0)$$

TY $\frac{dz}{d\theta}=i\varepsilon e^{i\theta}$

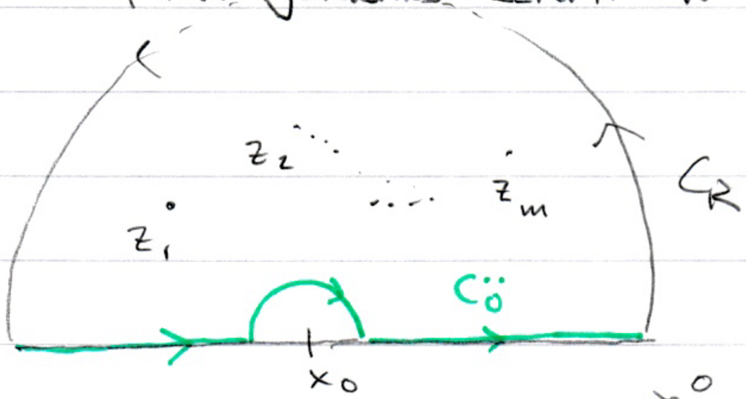
$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_ö}\frac{f(z)}{z-x_0}\,dz=P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-x_0}\,dx-i\pi f(x_0) \qquad (1)$$

PÅ SAMMA SÄTT



$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_u}\frac{f(z)}{z-x_0}\,dz=P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-x_0}\,dx+i\pi f(x_0) \qquad (2)$$

ANTAG ATT JORDANS LEMMA ÄR UPPFYLLT I ÖVRE HALVPLANET



$z_1, z_2, \ldots z_m$ POLER TILL $\frac{f(z)}{z-x_0}$ INNANFÖR $C_ö \cup C_R$

$$\int_{C_ö} \frac{f(z)}{z-x_0}\,dz + \underbrace{\int_{C_R} \frac{f(z)}{z-x_0}\,dz}_{\to 0 \text{ DÅ } R\to\infty} = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}\left[\frac{f(z_j)}{z_j-x_0}\right] \qquad (3)$$

$$(1)\ \&\ (3) \Rightarrow P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0}\,dx = i\pi f(x_0) + 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}\left[\frac{f(z_j)}{z_j-x_0}\right]$$

ANTAG ATT JORDANS LEMMA ISTÄLLET ÄR UPPFYLLT I UNDRE HALVPLANET MED POLER $z_1', z_2', \ldots, z_{m'}'$

$$(2)\ \&\ (3) \Rightarrow P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0}\,dx = -i\pi f(x_0) + 2\pi i \sum_{j=1}^{m'} \operatorname{Res}\left[\frac{f(z_j')}{z_j'-x_0}\right] \qquad (4)$$

Låt oss gå tillbaks till (I) : $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_0''} \frac{f(z)}{z - x_0} dz = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx - i\pi f(x_0)$

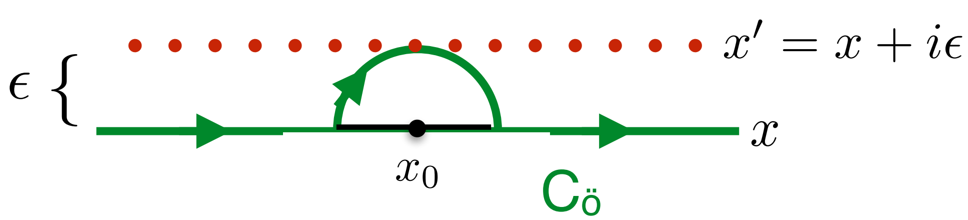
och göra en omskrivning med hjälp av **Feynmans trick**

Richard Feynman
1918-1988

Låt oss gå tillbaks till (I) : $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_ö} \frac{f(z)}{z - x_0} dz = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx - i\pi f(x_0)$

och göra en omskrivning med hjälp av **Feynmans trick**

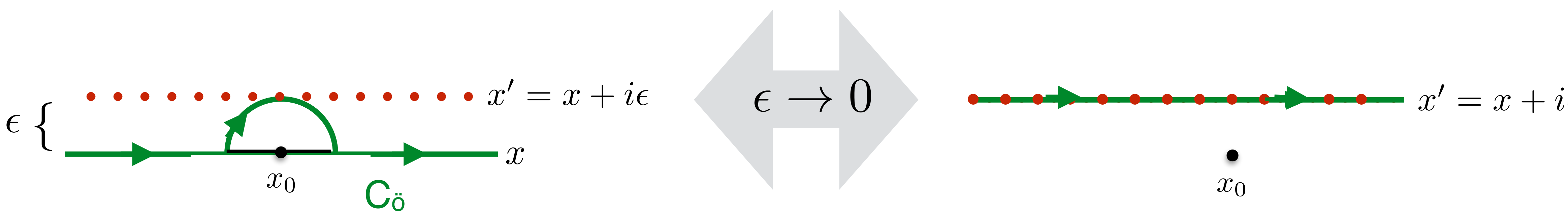
Richard Feynman
1918-1988



Låt oss gå tillbaks till (I) : $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_ö} \frac{f(z)}{z - x_0}\, dz = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0}\, dx - i\pi f(x_0)$

och göra en omskrivning med hjälp av **Feynmans trick**

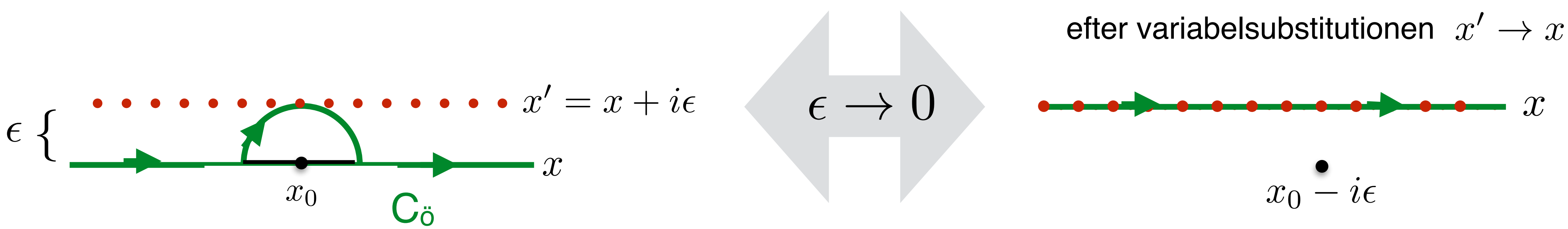
Richard Feynman
1918-1988



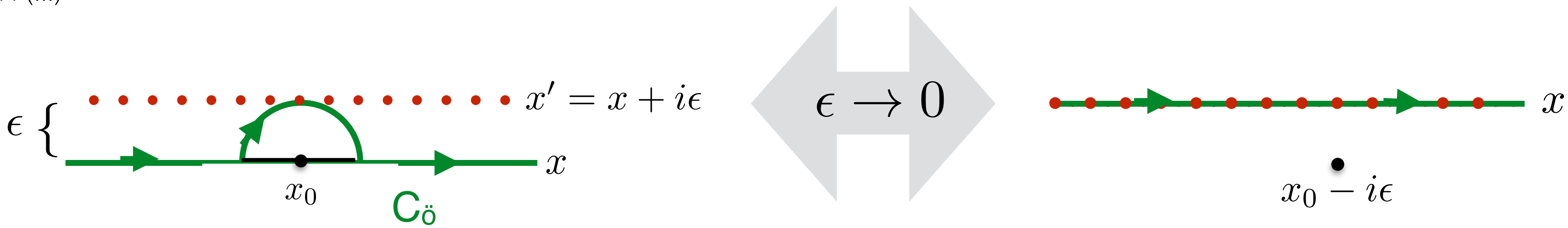
Låt oss gå tillbaks till (I) : $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C_ö} \frac{f(z)}{z-x_0}\,dz = P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0}\,dx - i\pi f(x_0)$

och göra en omskrivning med hjälp av **Feynmans trick**

Richard Feynman
1918-1988



föreläsning 11/11 (III)



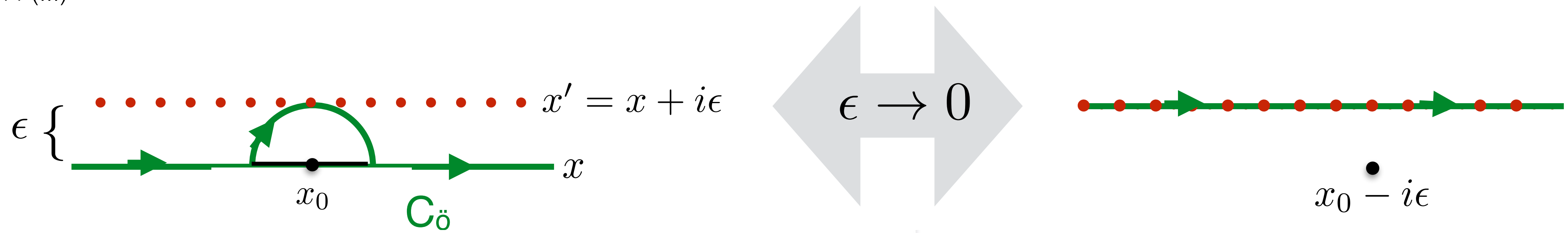
$$\int_{C_{ö}} \frac{f(z)}{z-x_0}\,dz \approx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x+i\varepsilon)}{x+i\varepsilon-x_0}\,dx \overset{f \text{ kontinuerlig}}{\approx} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-(x_0-i\varepsilon)}\,dx \qquad (5)$$

$$(1)\ \&\ (5) \Rightarrow P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0} = i\pi f(x_0) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-(x_0-i\varepsilon)}\,dx \qquad (6)$$

SAMMA TYP AV KONSTRUKTION FÖR C_u:

$$P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0}\,dx = -i\pi f(x_0) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-(x_0+i\varepsilon)}\,dx \qquad (7)$$

föreläsning 11/11 (III)



$$\int_{C_ö} \frac{f(z)}{z-x_0}\,dz \approx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x+i\varepsilon)}{x+i\varepsilon-x_0}\,dx \overset{f \text{ kontinuerlig}}{\approx} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-(x_0-i\varepsilon)}\,dx \qquad (5)$$

$$(1)\ \&\ (5) \Rightarrow P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0} = i\pi f(x_0) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-(x_0-i\varepsilon)}\,dx \qquad (6)$$

SAMMA TYP AV KONSTRUKTION FÖR C_U:

$$P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0}\,dx = -i\pi f(x_0) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-(x_0+i\varepsilon)}\,dx \qquad (7)$$

$\Downarrow$

$$P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0}\,dx = \pm i\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-x_0)\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-(x_0\mp i\varepsilon)}\,dx \qquad (8)$$

"FÖRKORTA BORT" $\int f(x)\,dx$!

FEYNMANS MASTERFORMEL

$$(8) \Rightarrow \frac{1}{x-x_0\pm i\varepsilon} = P\frac{1}{x-x_0} \mp i\pi\,\delta(x-x_0)$$

föreläsning 11/11 (III)

One time I boasted, "I can do by other methods any integral anybody else needs contour integration to do.”

So Paul [Olum] puts up this tremendous damn integral he had obtained by starting out with a complex function that he knew the answer to, taking out the real part of it and leaving only the complex part. He had unwrapped it so it was only possible by contour integration! He was always deflating me like that. He was a very smart fellow.