Viktig integral vid fysiktillämpningar:

“Principalvärdet” för en reell funktion med en enkel pol

$$P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-x_0}\,dx \;=\; \pm i\pi f(x_0)+2\pi i\sum_{j=1}^{m}\ \mathrm{Res}[\frac{f(z_j)}{z_j-x_0}]$$

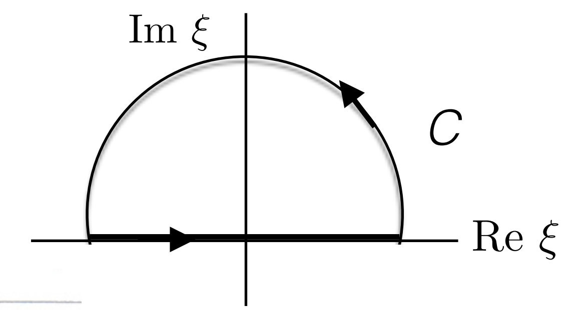
där z_j är polerna till $\frac{f(z)}{z-x_0}$ i övre $(+)$ eller undre $(-)$ komplexa halvplanet.

Feynmans trick

$$\frac{1}{x-x_0\pm i\epsilon} = P\frac{1}{x-x_0}\,dx \mp \mathrm{i}\pi\delta(x-x_0)$$

Kramers-Kronig relationerna

ANTAG F ANALYTISK I ÖVRE HALVPLANET



$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{F(\xi)}{\xi - z}\,d\xi \;\underset{\text{SATS}}{\overset{\text{CAUCHYS INTEGRAL}}{=}}\; \begin{cases} F(z) & \text{OM } \operatorname{Im} z > 0 \\ 0 & \text{OM } \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$$

$$\underset{\varepsilon>0}{\overset{z=x+i\varepsilon}{=}} F(x+i\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} F(x) \qquad (1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\xi)}{\xi-(x+i\varepsilon)}\,d\xi = P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\xi)}{\xi-x}\,d\xi + i\pi F(x) \qquad (2)$$

ANTAG JORDANS LEMMA OK

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\xi)}{\xi-(x+i\varepsilon)}\,d\xi = \oint_C \frac{F(\xi)}{\xi-(x+i\varepsilon)}\,d\xi \qquad (3)$$

$$(1), (2), (3) \Rightarrow \cancel{2}\pi i F(x) = P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\xi)}{\xi-x}\,d\xi + \cancel{i\pi F(x)}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{i\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\xi)}{\xi-x}\,d\xi$$

Kramers-Kronig relationerna (1926)

$$F(x) = \frac{1}{i\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\xi)}{\xi - x} d\xi$$

Kramers-Kronig relationerna (1926)

$$F(x) = \frac{1}{i\pi} \,\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\xi)}{\xi - x} d\xi$$

$$\mathrm{Re}[F(x)] = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}[F(\xi)]}{\xi - x} d\xi$$

$$\mathrm{Im}[F(x)] = -\frac{1}{\pi}\,\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Re}[F(\xi)]}{\xi - x} d\xi$$

Kramers-Kronig relationerna (1926)

$$F(x) = \frac{1}{i\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\xi)}{\xi - x} d\xi$$

$$\mathrm{Re}[F(x)] = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}[F(\xi)]}{\xi - x} d\xi$$

$$\mathrm{Im}[F(x)] = -\frac{1}{\pi}\,\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Re}[F(\xi)]}{\xi - x} d\xi$$

Hendrik Kramers

Ralph Kronig

Kramers-Kronig relationerna (1926)

(tillämpad **Hilbert transform (1905)**)

$$F(x) = \frac{1}{i\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\xi)}{\xi - x} d\xi$$

$$\mathrm{Re}[F(x)] = \frac{1}{\pi} \mathrm{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}[F(\xi)]}{\xi - x} d\xi$$

$$\mathrm{Im}[F(x)] = -\frac{1}{\pi} \mathrm{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Re}[F(\xi)]}{\xi - x} d\xi$$

David Hilbert
1862-1943

Hendrik Kramers

Ralph Kronig

Kramers-Kronig relationerna är mycket användbara i fysiken, bl.a. inom optik (komplexa refraktiva index), elektronspektroskopi, spridningsteori, och i beviset av fluktuations-dissipationsteoremet

Kramers-Kronig relationerna är mycket användbara i fysiken, bl.a. inom optik (komplexa refraktiva index), elektronspektroskopi, spridningsteori, och i beviset av **fluktuations-dissipationsteoremet**

ger ett samband mellan de termiska fluktuationerna hos ett system (i jämvikt) och systemets respons på en yttre störning (vid icke-jämvikt.)

Kramers-Kronig relationerna är mycket användbara i fysiken, bl.a. inom optik (komplexa refraktiva index), elektronspektroskopi, spridningsteori, och i beviset av **fluktuations-dissipationsteoremet**

ger ett samband mellan de termiska fluktuationerna hos ett system (i jämvikt) och systemets respons på en yttre störning (vid icke-jämvikt.)

exempel:

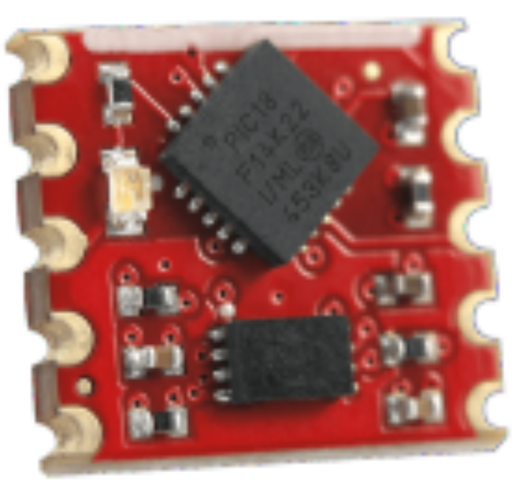
NYQUIST RELATIONEN (1928)

$$I(\omega) = -\frac{2}{1-e^{-\beta\omega}}\,\omega\,\sigma$$

$\beta = 1/kT$ konduktivitet $\sim \frac{1}{\text{resistivitet}}$

Fouriertransform av $\langle I(t)\, I(0)\rangle$

dvs $I(\omega) = \int \langle I(t) I(0)\rangle\, e^{i\omega t}\, dt$



ett annat exempel:

BROWNSK RÖRELSE

samma slumpmässiga krafter som ger upphov till "Brownsk rörelse" ger upphov till friktion om man försöker dra partiklarna genom vätskan

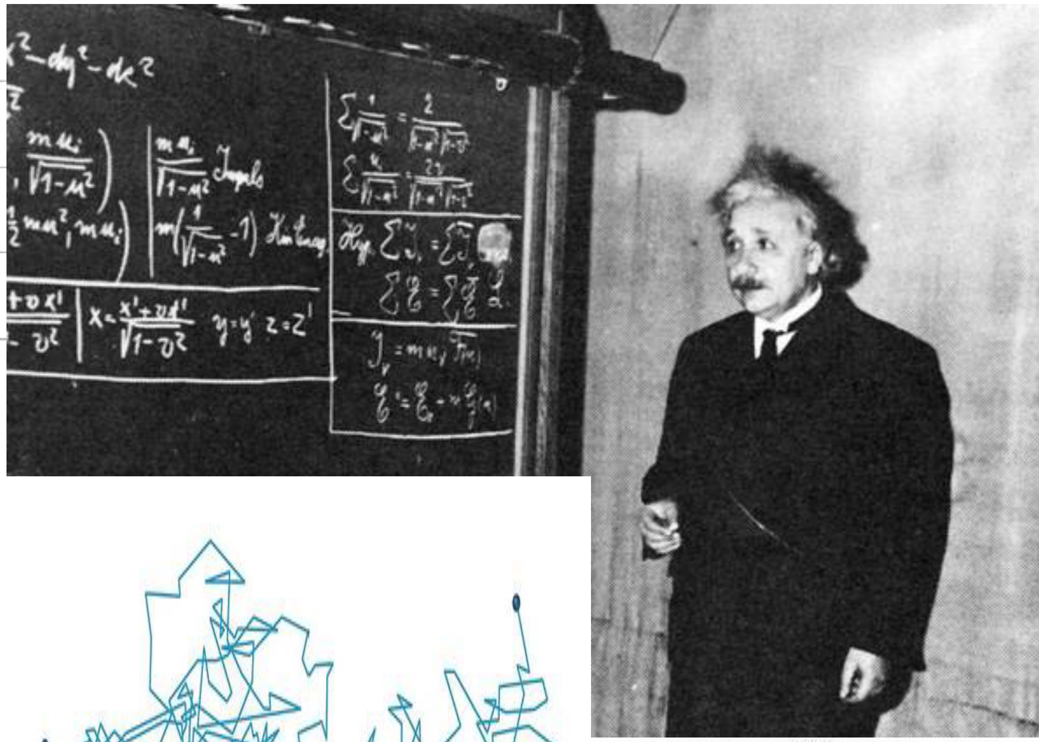
$$D = \mu k_B T$$

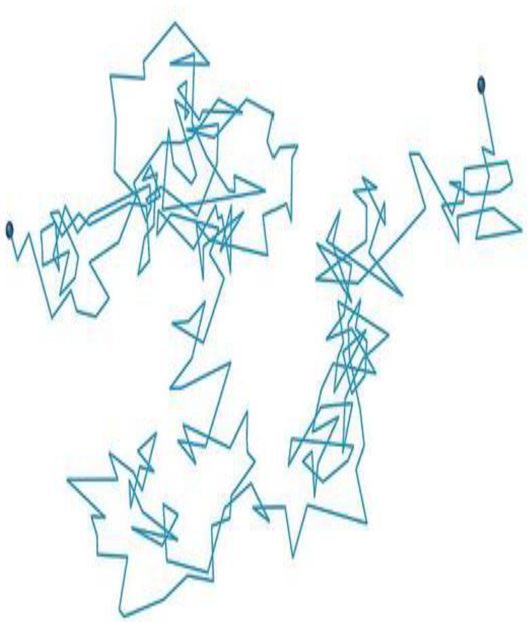
DIFFUSION

mobilitet v_d/F

mäter spontan spridning

EINSTEIN 1905





Poler i Greenfunktioner

Låt oss gå tillbaks till exemplet med den drivna harmoniska oscillatorn, problemet som motiverade vår repetition av residykalkyl.

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = F(t)$$

$$\Downarrow$$

$$G(t) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2-\omega_0^2} e^{i\omega t}\, d\omega$$

↑ poler i $\omega = \pm\omega_0$

Poler i Greenfunktioner

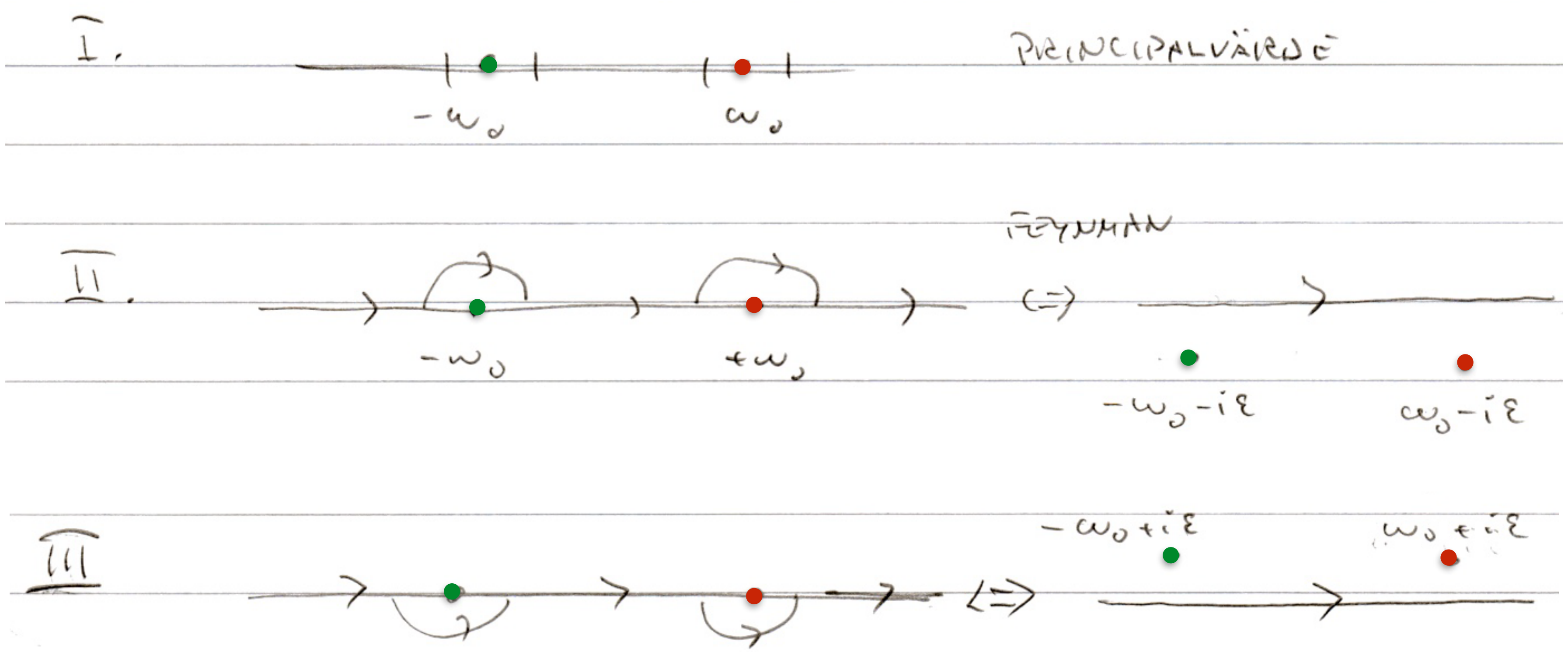
Låt oss gå tillbaks till exemplet med den drivna harmoniska oscillatorn, problemet som motiverade vår repetition av residykalkyl.

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = F(t)$$ 1.5?

$$\Downarrow$$

$$G(t) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2-\omega_0^2}\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

↑ poler i $\omega = \pm\omega_0$



Poler i Greenfunktioner

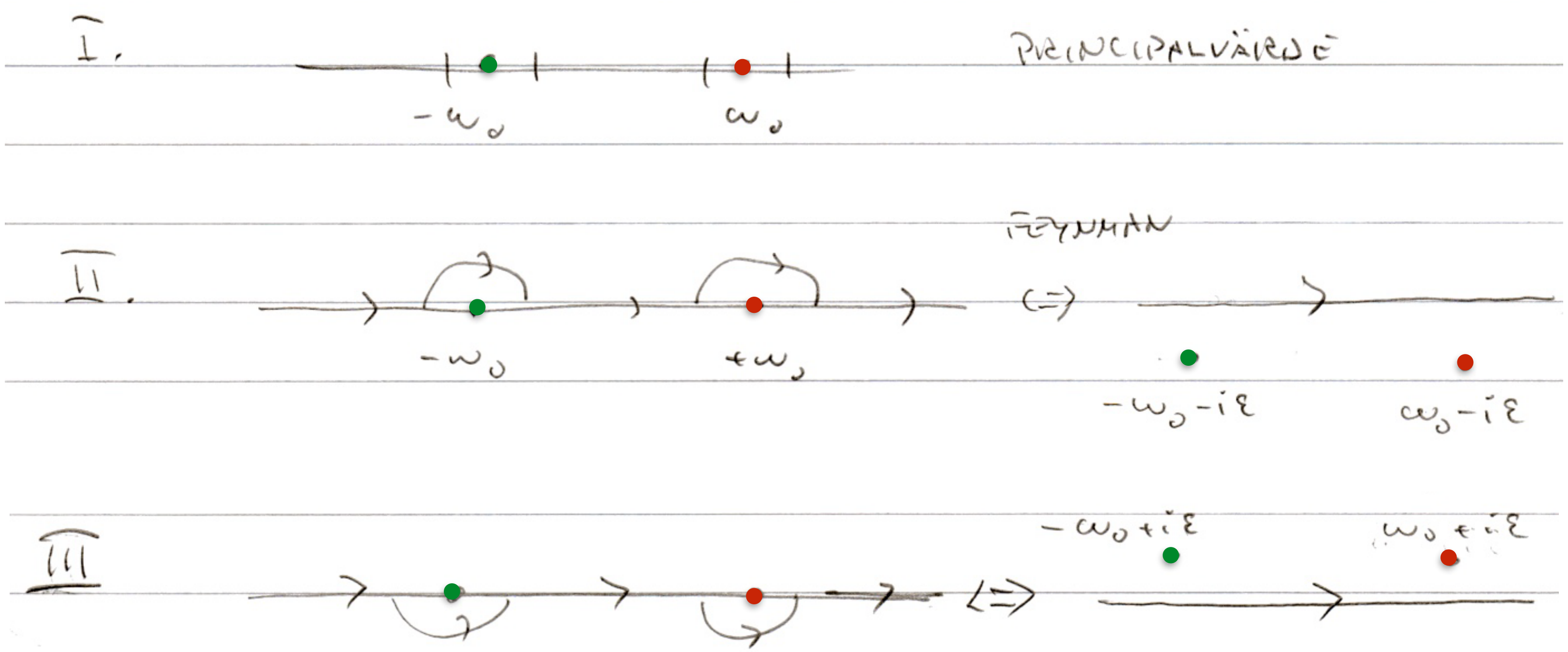
Låt oss gå tillbaks till exemplet med den drivna harmoniska oscillatorn, problemet som motiverade vår repetition av residykalkyle.

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = F(t) \qquad 1.5?$$

$$\Downarrow$$

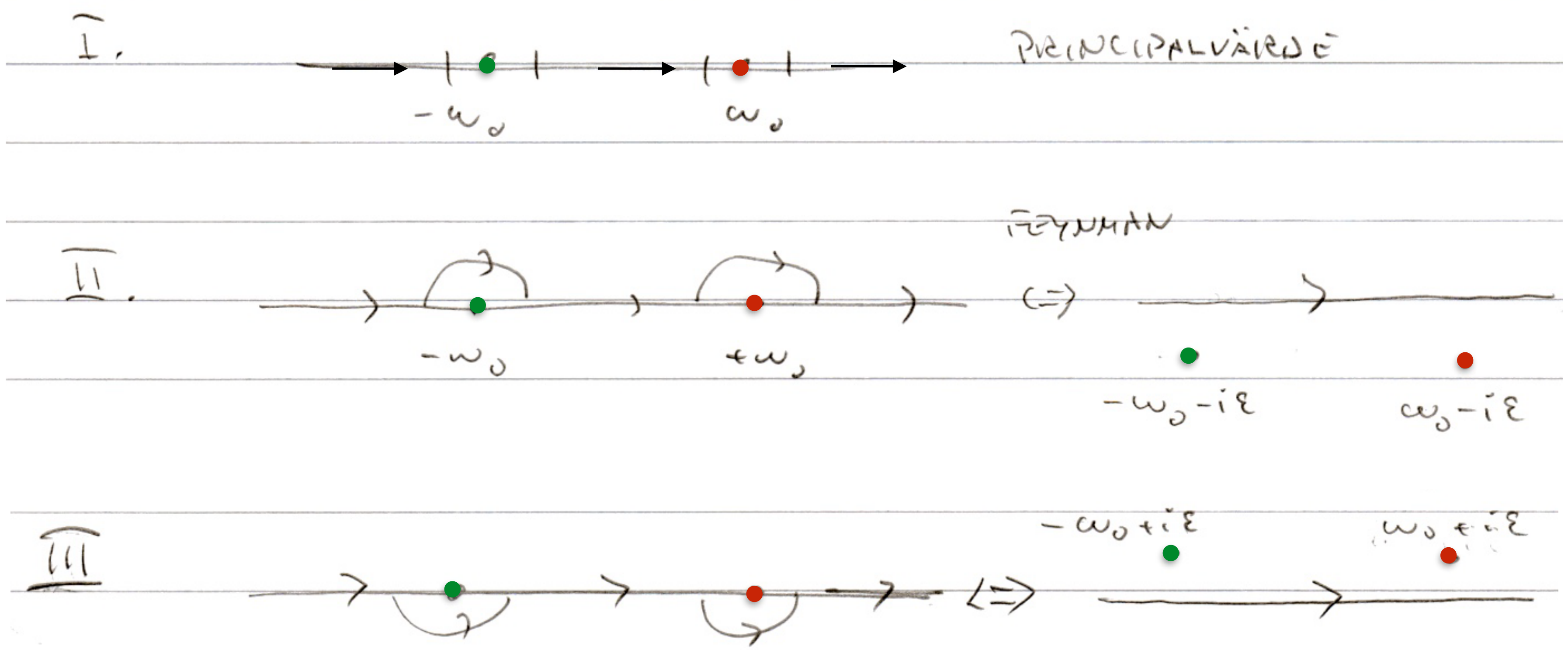
$$G(t) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2-\omega_0^2}\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

↑ poler i $\omega = \pm\omega_0$

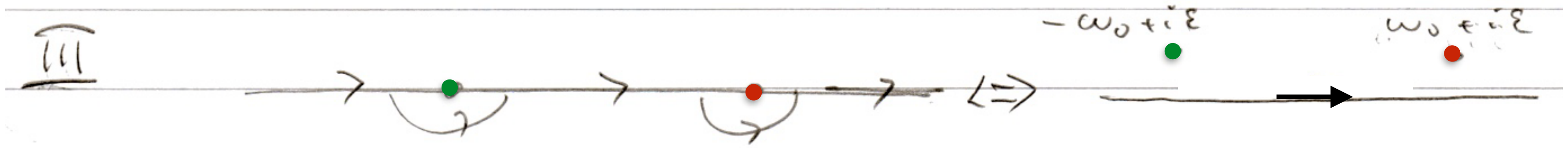


Vilken definition av G(t) ska vi välja?

Poler i Greenfunktioner (forts.)



Vilken definition av G(t) ska vi välja?

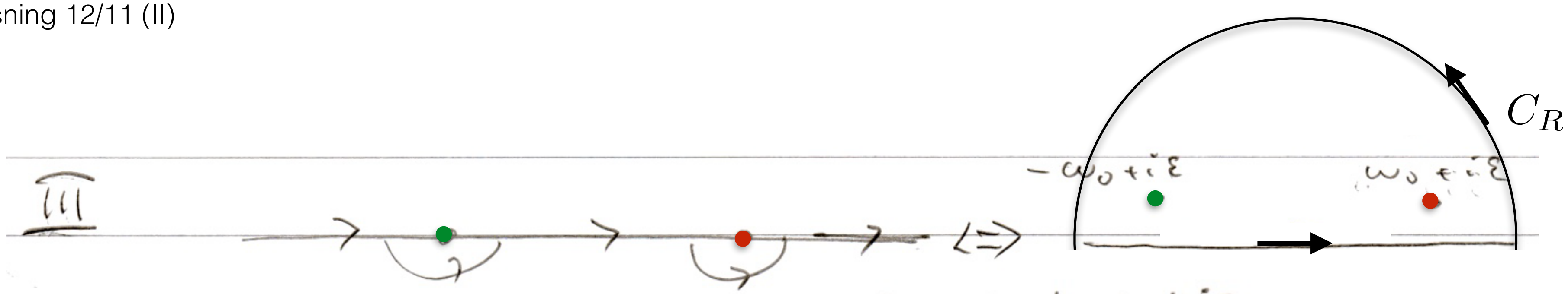


Låt oss testa III !

III

Låt oss testa III !

$$G(t) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2-\omega_0^2}\, e^{i\omega t}\, d\omega$$



$$\pm\omega_0 \to \pm\omega_0 + i\varepsilon$$

Låt oss testa III !

$$G(t) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2-\omega_0^2}\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

JORDAN $t \geq 0$

$$\xrightarrow{\pm\omega_0 \to \pm\omega_0 + i\varepsilon} \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{(\omega+(\omega_0-i\varepsilon))(\omega-(\omega_0+i\varepsilon))}\, d\omega \right) + \cancel{\int_{C_R}} \to 0 \text{ när } R \to \infty \;\ldots\ldots$$

f = INTEGRANDEN

$$\frac{1}{2\pi}\lim\left(-2\pi i \left(\mathrm{Res}\left[f(-\omega_0+i\varepsilon) \right] + \mathrm{Res}\left[f(\omega_0+i\varepsilon) \right] \right) \right)$$

$$= -i\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{e^{i(-\omega_0+i\varepsilon)t}}{-\omega_0+\cancel{i\varepsilon}-(\omega_0+\cancel{i\varepsilon})} + \frac{e^{i(\omega_0+i\varepsilon)t}}{\omega_0+\cancel{i\varepsilon}+(\omega_0-\cancel{i\varepsilon})} \right)$$

$$= -i\left(\frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2\omega_0} \right) = \frac{1}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$$

III

Låt oss testa III !

$$G(t) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2-\omega_0^2}\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

$\pm\omega_0 \to \pm\omega_0 + i\varepsilon$

$$\longrightarrow \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega t}}{(\omega+(\omega_0-i\varepsilon))(\omega-(\omega_0+i\varepsilon))}\,d\omega\right)$$

f = INTEGRANDEN

JORDAN $t \geq 0$

$$= \frac{1}{2\pi}\lim\left(-2\pi i\left(\mathrm{Res}\left[f(-\omega_0+i\varepsilon)\right] + \mathrm{Res}\left[f(\omega_0+i\varepsilon)\right]\right)\right)$$

$$= -i\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{e^{i(-\omega_0+i\varepsilon)t}}{-\omega_0+i\cancel{\varepsilon}-(\omega_0+i\cancel{\varepsilon})} + \frac{e^{i(\omega_0+i\varepsilon)t}}{\omega_0+i\cancel{\varepsilon}+(\omega_0-i\cancel{\varepsilon})}\right)$$

$$= -i\left(\frac{e^{i\omega_0 t}-e^{-i\omega_0 t}}{2\omega_0}\right) = \frac{1}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$$

III

$$\pm\omega_0 \to \pm\omega_0 + i\varepsilon$$

Låt oss testa III !

$$G(t) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2-\omega_0^2}\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

$$\xrightarrow{\pm\omega_0 \to \pm\omega_0 + i\varepsilon} \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{(\omega+(\omega_0-i\varepsilon))(\omega-(\omega_0+i\varepsilon))}\, d\omega \right)$$

f = INTEGRANDEN

Jordan $t \geq 0$

$$= \frac{1}{2\pi}\lim\left(-2\pi i\left(\mathrm{Res}\left[f(-\omega_0+i\varepsilon)\right] + \mathrm{Res}\left[f(\omega_0+i\varepsilon)\right]\right)\right)$$

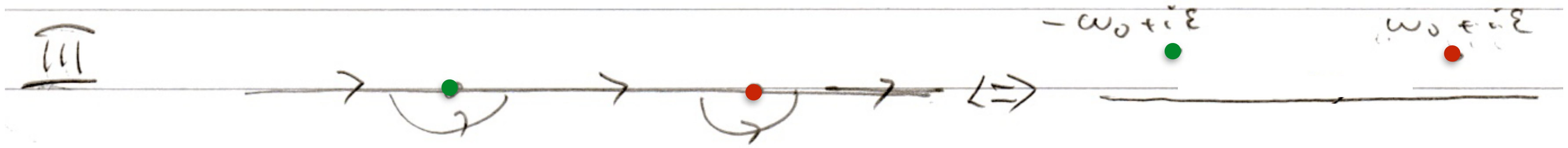
$$= -i\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{e^{i(-\omega_0+i\varepsilon)t}}{-\omega_0+\cancel{i\varepsilon}-(\omega_0+\cancel{i\varepsilon})} + \frac{e^{i(\omega_0+i\varepsilon)t}}{\omega_0+\cancel{i\varepsilon}+(\omega_0-\cancel{i\varepsilon})} \right)$$

$$= -i\left(\frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2\omega_0} \right) = \frac{1}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$$

$$G(t) \xrightarrow{t \leq 0} 0$$

(Jordankurva i undre komplexa halvplanet; inga poler!)

III



$$G(t) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2-\omega_0^2}\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

$$\xrightarrow{\pm\omega_0 \to \pm\omega_0+i\varepsilon} \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega t}}{(\omega+(\omega_0-i\varepsilon))(\omega-(\omega_0+i\varepsilon))}\,d\omega\right)$$

f = INTEGRANDEN

JORDAN $t \geq 0$

$$= \frac{1}{2\pi}\lim\left(-2\pi i\left(\mathrm{Res}\left[f(-\omega_0+i\varepsilon)\right]+\mathrm{Res}\left[f(\omega_0+i\varepsilon)\right]\right)\right)$$

$$= -i\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{e^{i(-\omega_0+i\varepsilon)t}}{-\omega_0+i\varepsilon-(\omega_0+i\varepsilon)}+\frac{e^{i(\omega_0+i\varepsilon)t}}{\omega_0+i\varepsilon+(\omega_0-i\varepsilon)}\right)$$

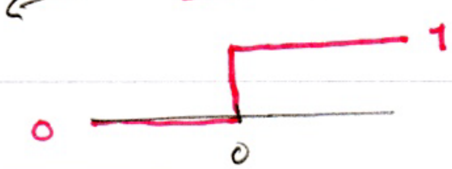
$$= -i\left(\frac{e^{i\omega_0 t}-e^{-i\omega_0 t}}{2\omega_0}\right) = \frac{1}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$$

$$G(t) \xrightarrow{t\leq 0} 0$$ (Jordankurva i undre komplexa halvplanet; inga poler!)

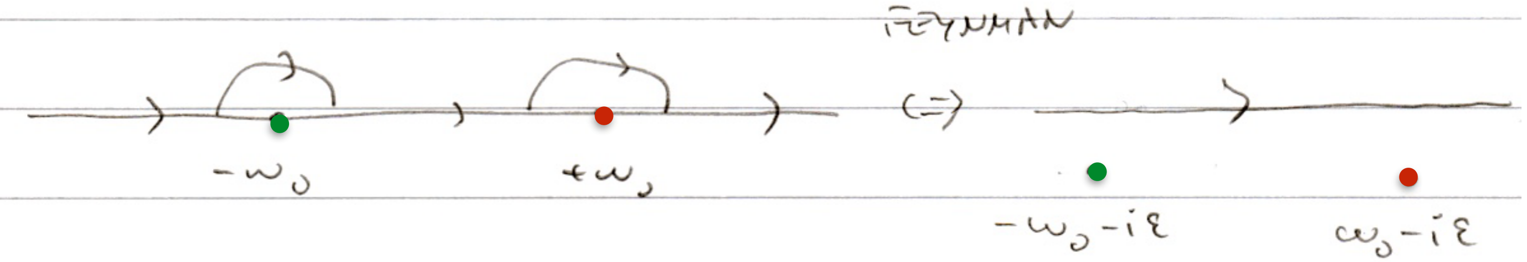
"RETARDERAD" GREEN FUNKTION

STEGFUNKTION

$$G^{(R)}(t) = \frac{1}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\,\Theta(t)$$



II.

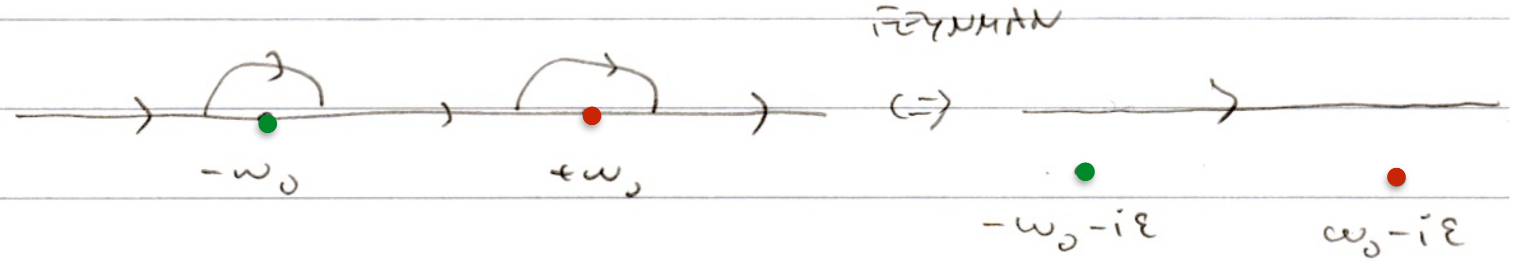


SAMMA TYP AV RÄKNING FÖR $\underline{\text{II}}$ GER

$\pm\omega_0 \rightarrow \pm\omega_0 - i\varepsilon$ $\leftarrow$ "AVANCERAD" GREENFUNKTION

$$G(t) \longrightarrow G^{(A)}(t) = -\frac{1}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\,\Theta(-t)$$

II.



SAMMA TYP AV RÄKNING FÖR II GER

"AVANCERAD" GREENFUNKTION

$$G(t) \xrightarrow{\pm\omega_0 \to \pm\omega_0 - i\varepsilon} G^{(A)}(t) = -\frac{1}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\,\Theta(-t)$$

I.

PRINCIPALVÄRDE

OM VI VÄLJER I

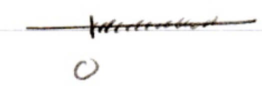
"SYMMETRISK" GREENFUNKTION

$$G(t) \longrightarrow G^{(S)} = \frac{1}{2}\left(G^{(A)}(t) + G^{(R)}(t)\right)$$

Vilken ska vi välja?

LINJÄR RESPONS

STÖRNING $F(s) = 0 \, , \, s < 0$



$$X(t) = \int_0^\infty G(t-s)\,F(s)\,ds$$

$G^{(A)}$ $G^{(R)}$ $G^{(S)}$

?

Vilken ska vi välja?

LINJÄR RESPONS

STÖRNING $F(s) = 0 \,,\ s < 0$

$$X(t) = \int_0^\infty G(t-s)\, F(s)\, ds$$

$G^{(A)}$ $\qquad$ $G^{(R)}$ $\qquad$ $G^{(S)}$ $\qquad$?

TESTA $G^{(A)}$!

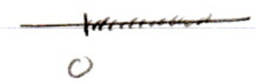
$$X(t) = \int_0^\infty G^{(A)}(t-s)\, F(s) = -\frac{1}{\omega_0} \int_0^\infty \sin \omega_0 (t-s)\, \Theta(s-t)\, F(s)\, ds$$

$$= -\frac{1}{\omega_0} \int_t^\infty \sin \omega_0 (t-s)\, F(s)\, ds$$

Vilken ska vi välja?

LINJÄR RESPONS

STÖRNING $F(s) = 0 \ , \ s < 0$



$$X(t) = \int_0^\infty G(t-s)\,F(s)\,ds$$

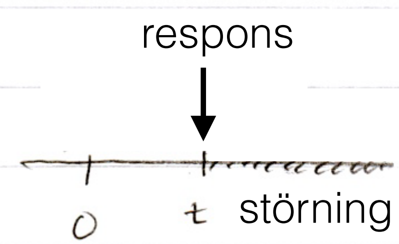
$G^{(A)}$ $\quad$ $G^{(R)}$ $\quad$ $G^{(S)}$ $\quad$?

TESTA $G^{(A)}$!

$$X(t) = \int_0^\infty G^{(A)}(t-s)\,F(s) = -\frac{1}{\omega_0}\int_0^\infty \sin\omega_0(t-s)\,\Theta(s-t)\,F(s)\,ds$$

$$= -\frac{1}{\omega_0}\int_t^\infty \sin\omega_0(t-s)\,F(s)\,ds$$

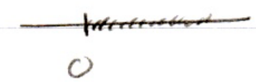
ICKE-KAUSAL !



Vilken ska vi välja?

LINJÄR RESPONS

STÖRNING $F(s)=0\ ,\ s<0$



$$X(t)=\int_0^\infty G(t-s)\,F(s)\,ds$$

$G^{(A)}$ ✗ $G^{(R)}$ ✓ $G^{(S)}$ ✗

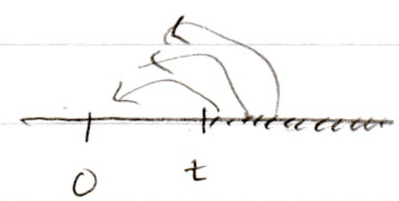
?

TESTA $G^{(A)}$!

$$X(t)=\int_0^\infty G^{(A)}(t-s)\,F(s) = -\frac{1}{\omega_0}\int_0^\infty \sin\omega_0(t-s)\,\Theta(s-t)\,F(s)\,ds$$

$$= -\frac{1}{\omega_0}\int_t^\infty \sin\omega_0(t-s)\,F(s)\,ds$$

ICKE-KAUSAL!



Vi måste välja den retarderade ("fysiska", "kausala") Greenfunktionen!

Andra sätt att räkna Greenfunktioner…

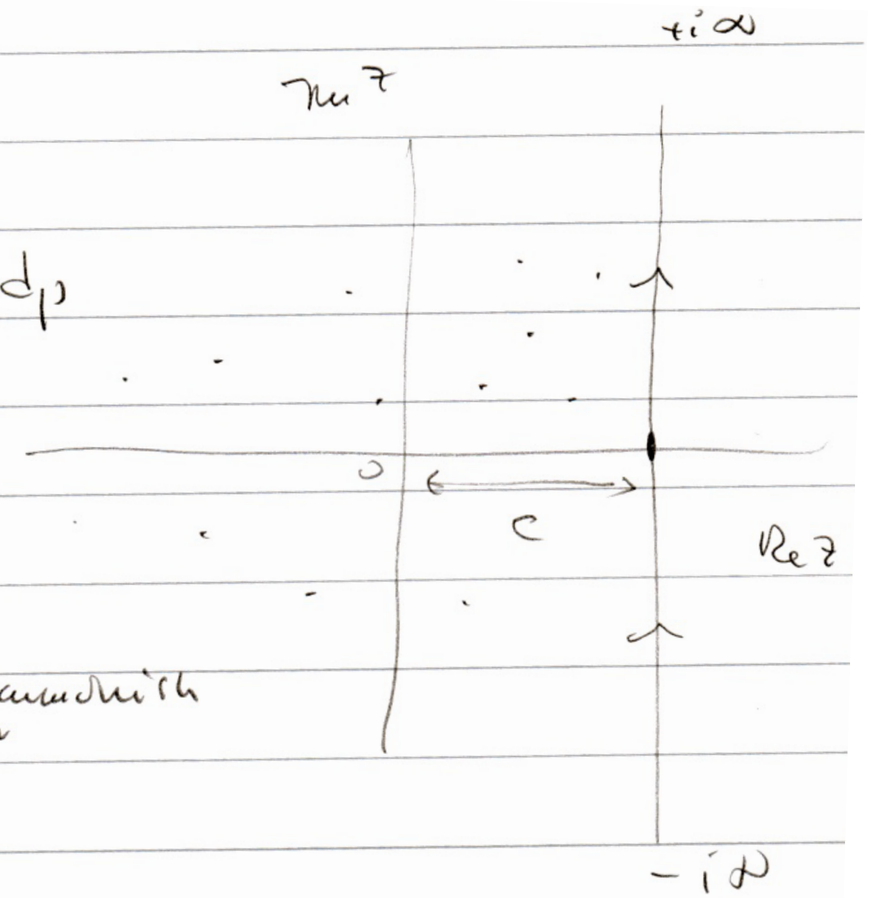
t.ex. med hjälp av **Laplace transformer**

Andra sätt att räkna Greenfunktioner…

t.ex. med hjälp av **Laplace transformer**

$$\tilde{G}(p) = \int_0^\infty G(t)\, e^{-pt}\, dt$$

$$G(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{G}(p)\, e^{pt}\, dp$$



$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} 1\cdot e^{pt}\, dp$$

Driven harmonic oscillator

$$\frac{d^2G(t)}{dt^2} + \omega_0^2 G(t) = \delta(t)$$

$$\Rightarrow (p^2+\omega_0^2)\,\tilde{G}(p) = 1 \quad \Rightarrow G(t) = \frac{1}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\,\Theta(t)$$

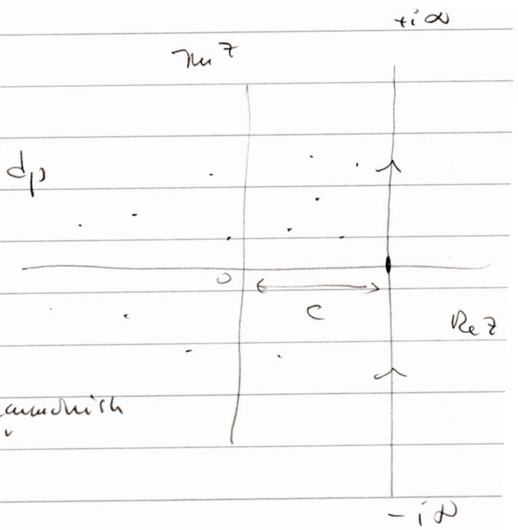
Andra sätt att räkna Greenfunktioner…

t.ex. med hjälp av **Laplace transformer**

$$\tilde{G}(p) = \int_0^\infty G(t)\, e^{-pt}\, dt$$

$$G(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{G}(p)\, e^{pt}\, dp$$

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} 1\cdot e^{pt}\, dp$$



Driven harmonic oscillator

$$\frac{d^2G(t)}{dt^2} + \omega_0^2 G(t) = \delta(t)$$

$$\Rightarrow (p^2+\omega_0^2)\,\tilde{G}(p) = 1 \quad \Rightarrow G(t) = \frac{1}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\,\Theta(t)$$

Wow!

Mycket enklare än Fouriertransformer,
Feynmantrick, och allt det där stöket…

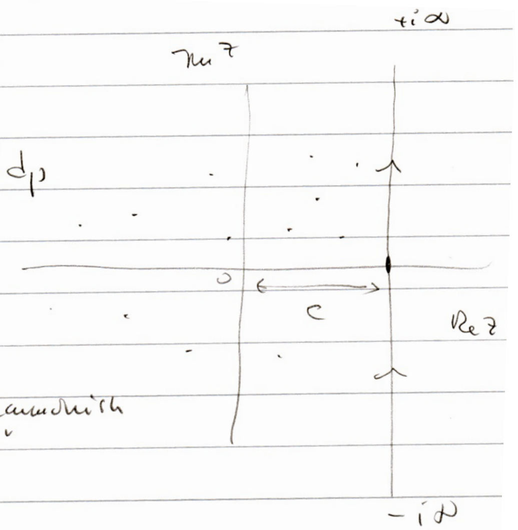
Andra sätt att räkna Greenfunktioner…

t.ex. med hjälp av **Laplace transformer**

$$\tilde{G}(p) = \int_0^\infty G(t)\, e^{-pt}\, dt$$

$$G(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{G}(p)\, e^{pt}\, dp$$

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} 1\cdot e^{pt}\, dp$$



Driven harmonisk oscillator

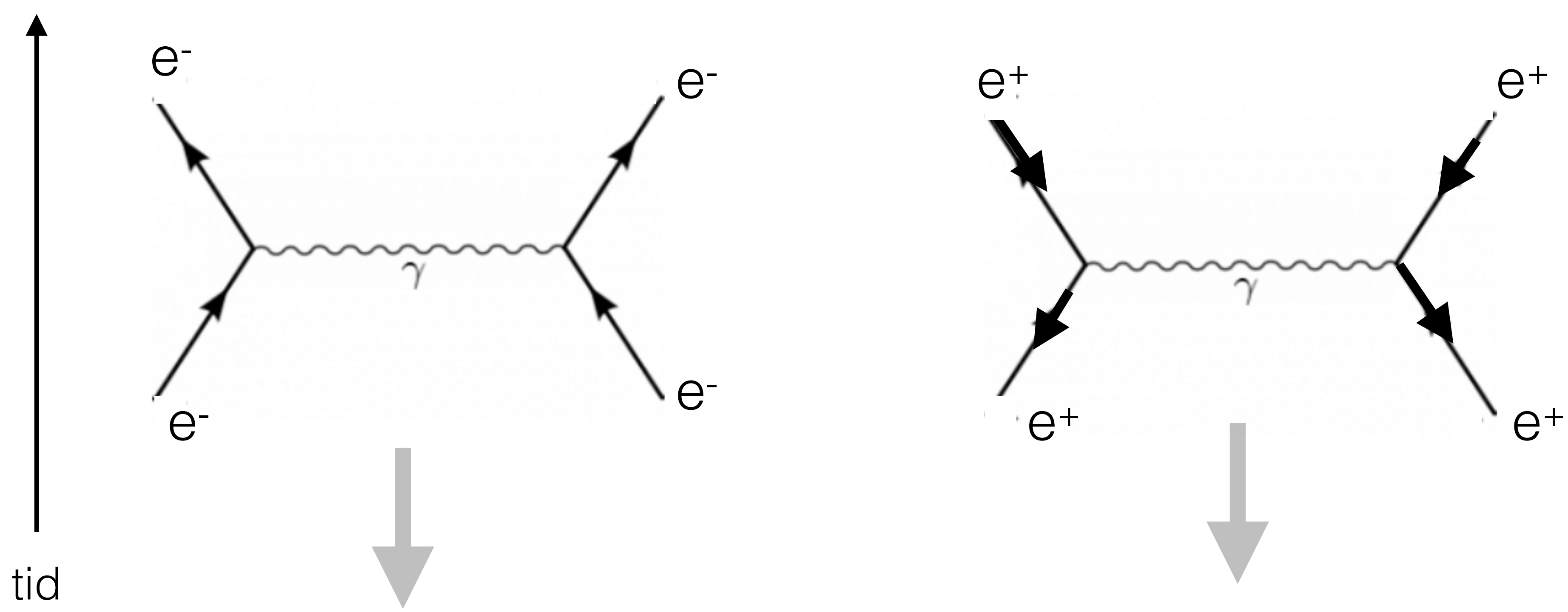
$$\frac{d^2G(t)}{dt^2} + \omega_0^2 G(t) = \delta(t)$$

$$\Rightarrow (p^2+\omega_0^2)\,\tilde{G}(p) = 1 \quad \Rightarrow G(t) = \frac{1}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\,\Theta(t)$$

Men funkar inte alltid…
… och ibland vill vi (som matematiskt trick!)
använda den avancerade Greenfunktionen!

… ibland vill vi (som matematiskt trick!)
använda den avancerade Greenfunktionen,
t.ex. vid **växelverkan mellan antipartiklar**

Feynmandiagram

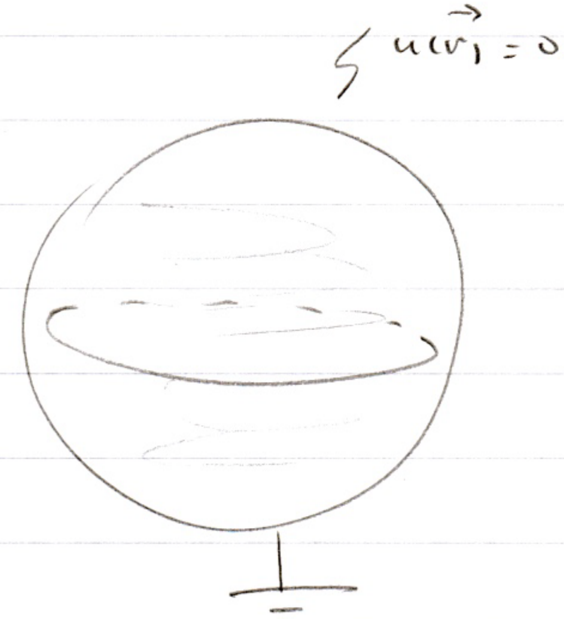


$G^{(R)}$ $G^{(A)}$

En sista kommentar:
Greenfunktioner med (icke-triviala) randvillkor

EX Poissons ekvation

$$\nabla^2 u(\vec{r}) = -\rho(\vec{r})/\varepsilon_0$$



DEFINIERA $\bar{G}(\vec{r},\vec{r}') = G(\vec{r},\vec{r}') + F(\vec{r},\vec{r}')$

FRÅN LÖSNINGEN AV $\nabla^2 G(\vec{r},\vec{r}') = \delta(\vec{r}-\vec{r}')$

FRÅN LÖSNINGEN AV $\nabla^2 F(\vec{r},\vec{r}') = 0$

VÄLJ $F(\vec{r},\vec{r}')$ SÅ ATT $\bar{G}(\vec{r},\vec{r}')$ GER EN LÖSNING SOM UPPFYLLER RANDVILLKORET