

Viktig integral vid fysiktillämpningar:

“Principalvärdet” för en reell funktion med en enkel pol

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx = \pm i\pi f(x_0) + 2\pi i \sum_{j=1}^m \operatorname{Res}\left[\frac{f(z_j)}{z_j - x_0}\right]$$

där z_j är polerna till $\frac{f(z)}{z-x_0}$ i övre (+) eller undre (-) komplexa halvplanet.



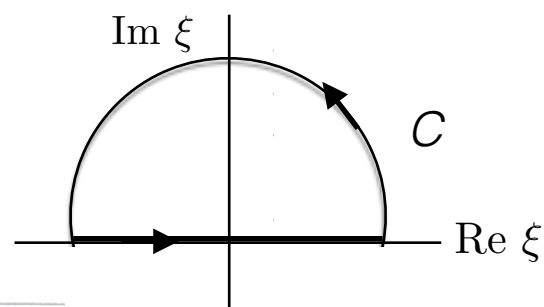
$$\frac{1}{x - x_0 \pm i\epsilon} = P \frac{1}{x - x_0} dx \mp i\pi\delta(x - x_0)$$

Kramers-Kronig relationerna

ANTAG F ANALYTISK I ÖVRE HALVPLANET

CAUCHY'S INTEGRAL SATS

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{F(\xi)}{\xi - z} d\xi = \begin{cases} F(z) & \text{OM } \text{Im } z > 0 \\ 0 & \text{OM } \text{Im } z < 0 \end{cases}$$



$$z = x + i\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} F(x + i\varepsilon) \rightarrow \bar{F}(x) \quad (1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\xi)}{\xi - (x + i\varepsilon)} d\xi = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\xi)}{\xi - x} d\xi + i\pi \bar{F}(x) \quad (2)$$

ANTAG JORDANS LEMMA GÄLLER

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\xi)}{\xi - (x + i\varepsilon)} d\xi = \oint_C \frac{F(\xi)}{\xi - (x + i\varepsilon)} d\xi \quad (3)$$

(1), (2), (3) \Rightarrow ~~$\frac{1}{2\pi i} \bar{F}(x) = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\xi)}{\xi - x} d\xi + i\pi \bar{F}(x)$~~

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{i\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\xi)}{\xi - x} d\xi$$

Kramers-Kronig relationerna (1926)

$$F(x) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\xi)}{\xi - x} d\xi$$

Kramers-Kronig relationerna (1926)

$$F(x) = \frac{1}{i\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\xi)}{\xi - x} d\xi$$



$$\text{Re}[F(x)] = \frac{1}{\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im}[F(\xi)]}{\xi - x} d\xi$$

$$\text{Im}[F(x)] = -\frac{1}{\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re}[F(\xi)]}{\xi - x} d\xi$$

Kramers-Kronig relationerna (1926)

$$F(x) = \frac{1}{i\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\xi)}{\xi - x} d\xi$$



$$\text{Re}[F(x)] = \frac{1}{\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im}[F(\xi)]}{\xi - x} d\xi$$

$$\text{Im}[F(x)] = -\frac{1}{\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re}[F(\xi)]}{\xi - x} d\xi$$



Hendrik Kramers

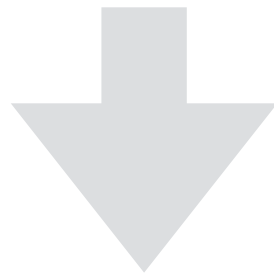


Ralph Kronig

Kramers-Kronig relationerna (1926)

(tillämpad **Hilbert transform (1905)**)

$$F(x) = \frac{1}{i\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\xi)}{\xi - x} d\xi$$



$$\text{Re}[F(x)] = \frac{1}{\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im}[F(\xi)]}{\xi - x} d\xi$$

$$\text{Im}[F(x)] = -\frac{1}{\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re}[F(\xi)]}{\xi - x} d\xi$$



David Hilbert
1862-1943



Hendrik Kramers



Ralph Kronig

Kramers-Kronig relationerna är mycket användbara i fysiken, bl.a. inom optik (komplexa refraktiva index), elektronspektroskopi, spridningsteori, och i beviset av fluktuations-dissipationsteoremet

Kramers-Kronig relationerna är mycket användbara i fysiken, bl.a. inom optik (komplexa refraktiva index), elektronspektroskopi, spridningsteori, och i beviset av **fluktuations-dissipationsteoremet**

ger ett samband mellan de termiska fluktuationerna hos ett system (i jämvikt) och systemets respons på en yttre störning (vid icke-jämvikt.)

Kramers-Kronig relationerna är mycket användbara i fysiken, bl.a. inom optik (komplexa refraktiva index), elektronspektroskopi, spridningsteori, och i beviset av **fluktuations-dissipationsteoremet**

ger ett samband mellan de termiska fluktuationerna hos ett system (i jämvikt) och systemets respons på en yttre störning (vid icke-jämvikt.)

exempel:

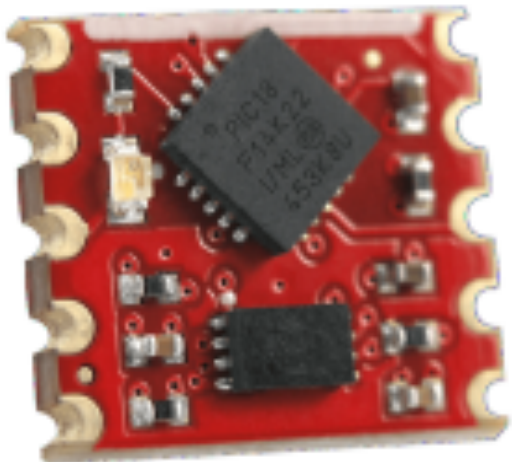
Nyquist relationen (1928)

$$I(\omega) = - \frac{2}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} \omega \sigma$$

$\beta = 1/kT$ konduktivitets \sim reaktans

Fouriertransform av $\langle I(t) I(0) \rangle$

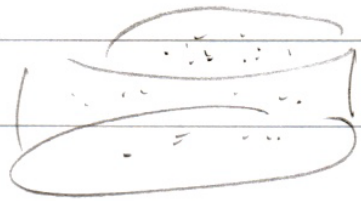
$$\text{dvs } \bar{I}(\omega) = \int \langle I(t) I(0) \rangle e^{i\omega t} dt$$



ett annat exempel:

BROWNIAN RÖRELSE

Samma slumpmässiga kraften
 som ger upphov till "Brownska"
 rörelsen ger upphov till
 funktionen som man förväntar
 sig partitioneringsfunktionen vätskan

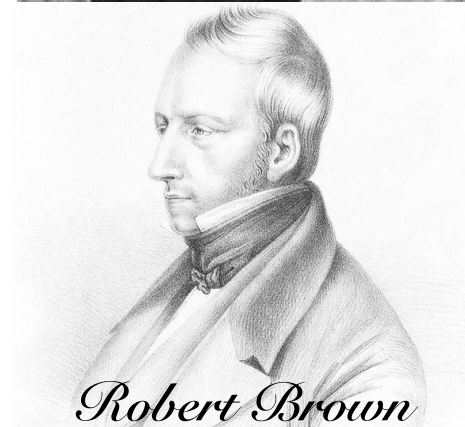
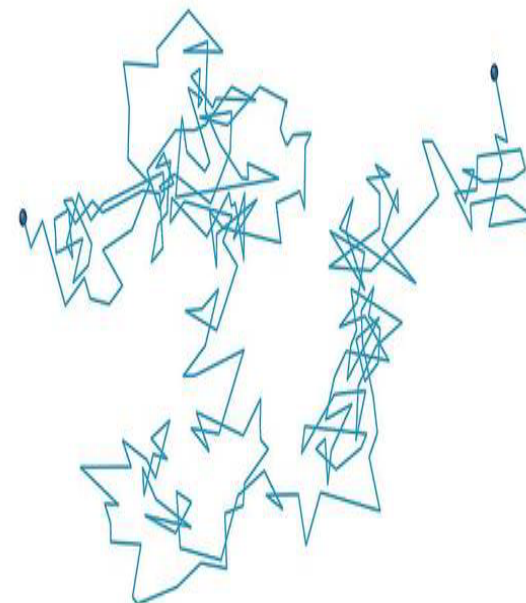
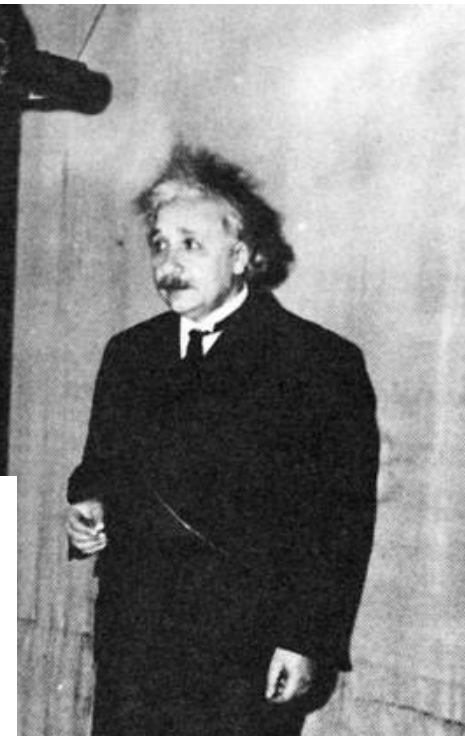
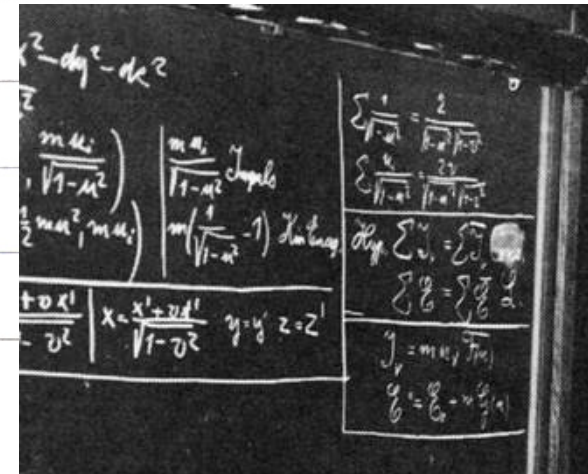


$$D = k_B T$$

↑ ↑
 DIMENSION vektor v_d / Γ

vatten sprutans spridning

EINSTEIN 1905



Robert Brown

Poler i Greenfunktioner

Låt oss gå tillbaka till exemplet med den drivna harmoniska oscillatorn, problemet som motiverade vår repetition av residykalkyl.

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = F(t)$$

$$G(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} e^{i\omega t} d\omega$$

↑ poler i $\omega = \pm \omega_0$

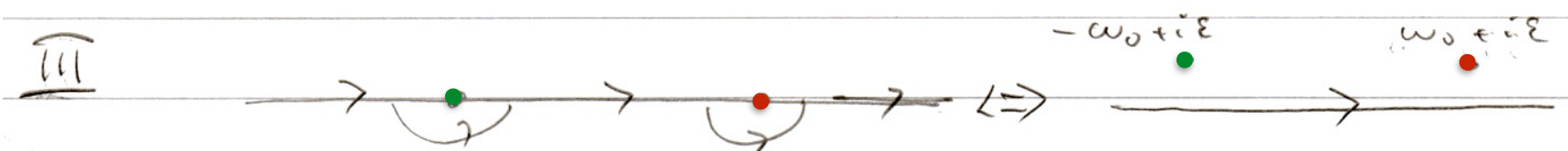
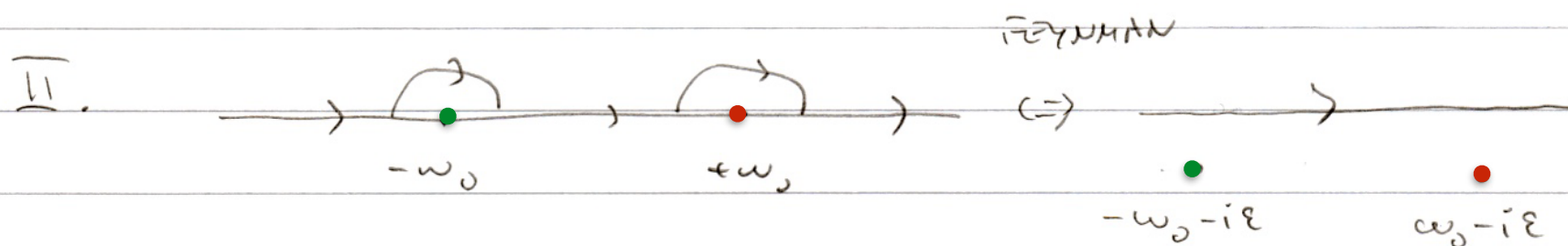
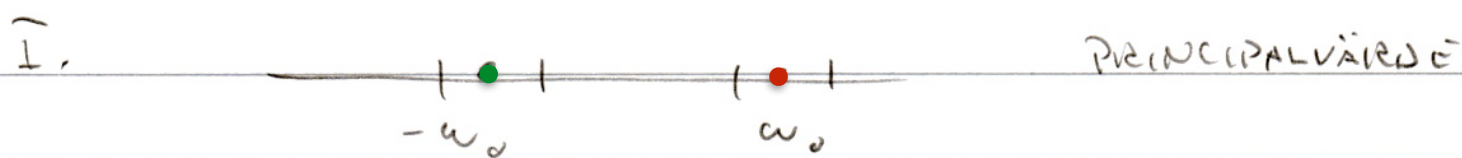
Poler i Greenfunktioner

Låt oss gå tillbaka till exemplet med den drivna harmoniska oscillatorn, problemet som motiverade vår repetition av residykalculus.

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = F(t) \quad 1.5?$$

$$G(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} e^{i\omega t} d\omega$$

↑ poler i $\omega = \pm \omega_0$



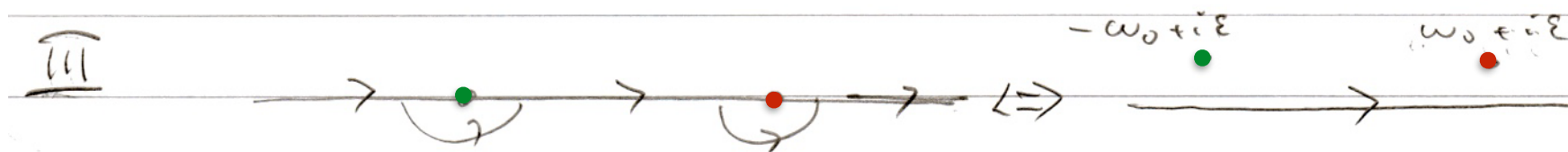
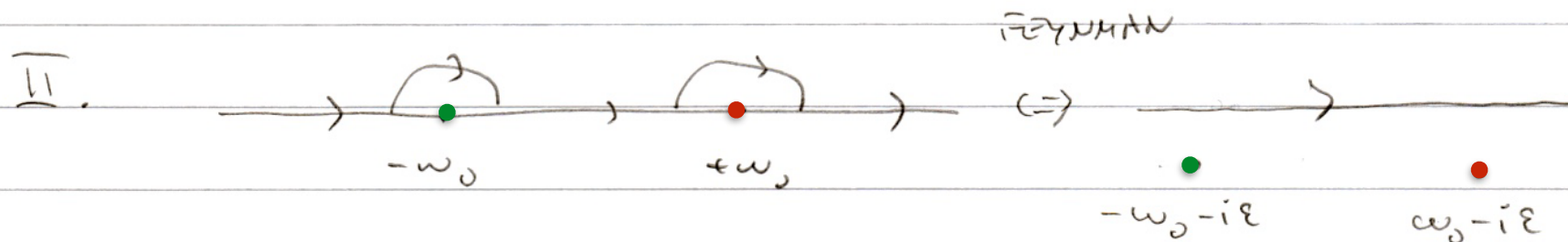
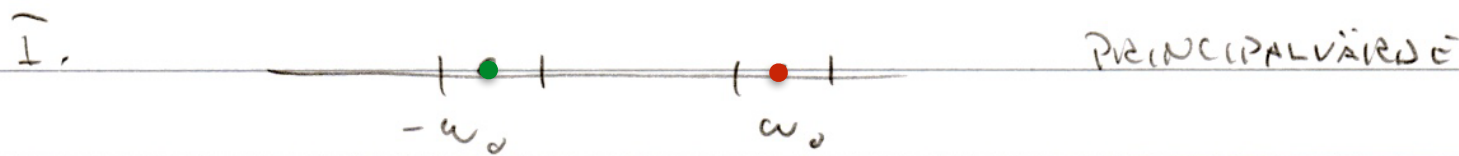
Poler i Greenfunktioner

Låt oss gå tillbaka till exemplet med den drivna harmoniska oscillatorn, problemet som motiverade vår repetition av residykalculus.

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = F(t) \quad 1.5?$$

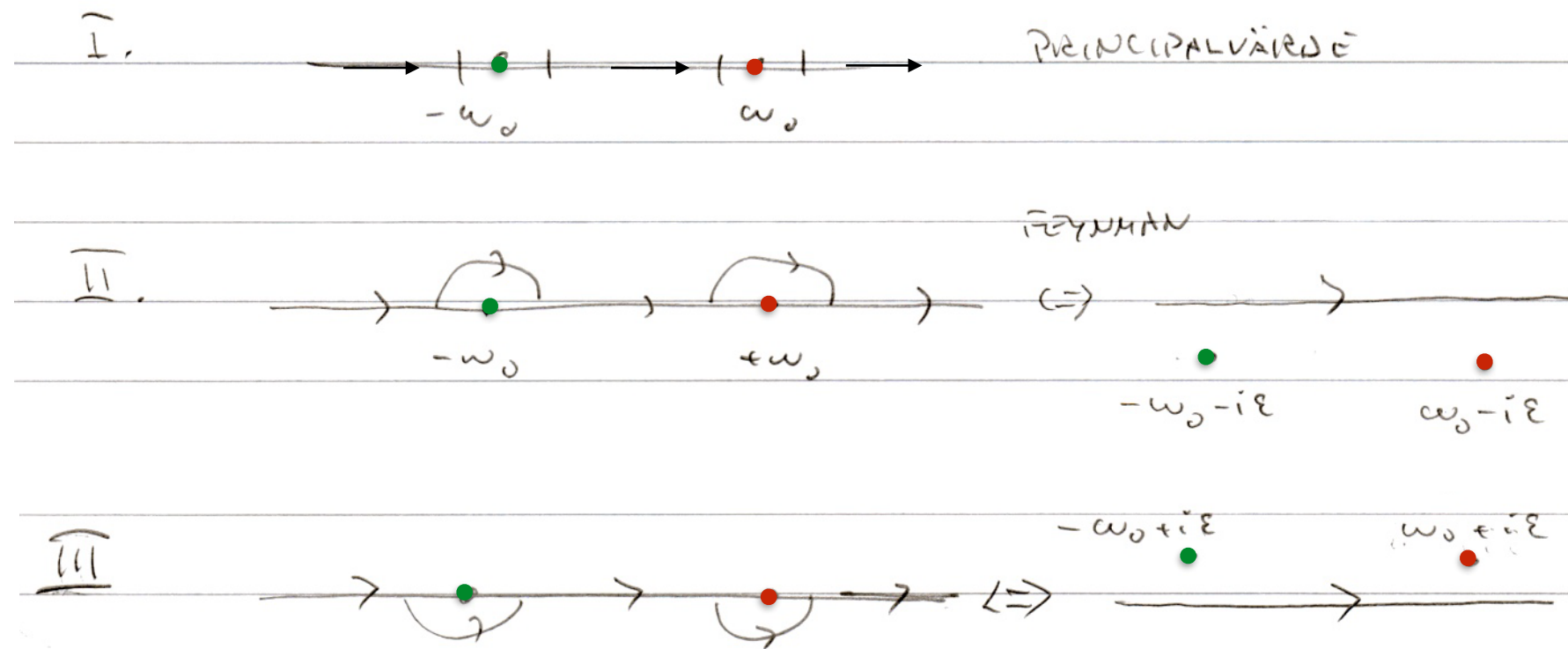
$$G(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} e^{i\omega t} d\omega$$

↑ poler i $\omega = \pm \omega_0$

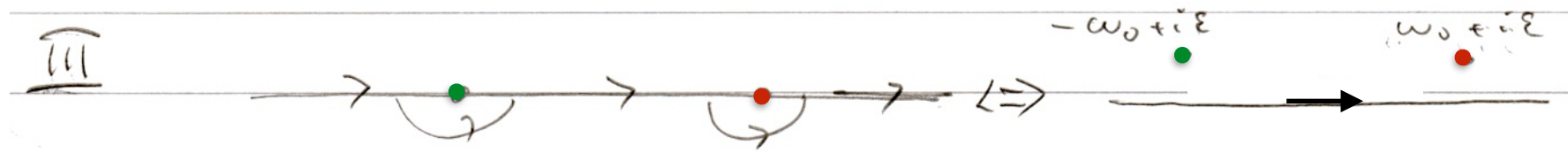


Vilken definition av $G(t)$ ska vi välja?

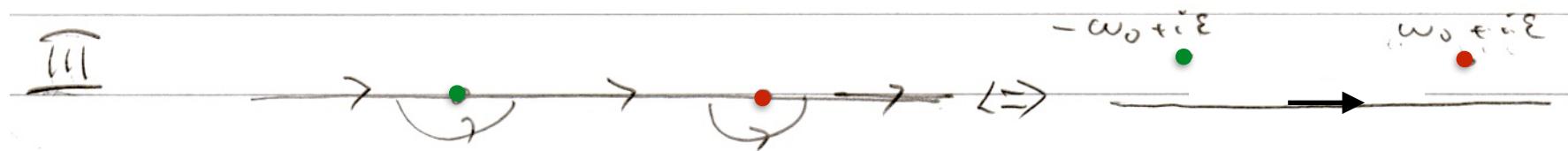
Poler i Greenfunktioner (forts.)



Vilken definition av $G(t)$ ska vi välja?

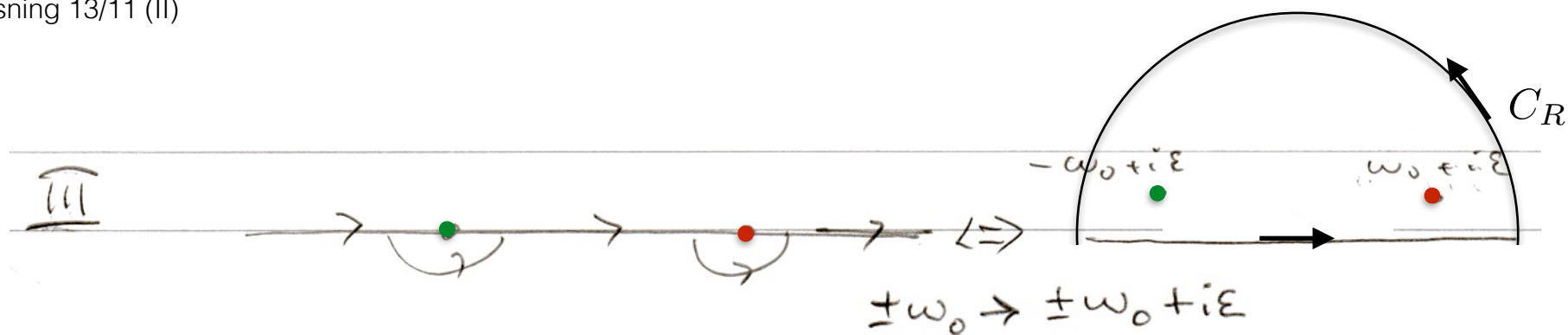


Låt oss testa III !



Låt oss testa III !

$$f(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} e^{i\omega t} d\omega$$



Låt oss testa III!

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{w^2 - w_0^2} e^{iwt} dw$$

$$\pm w_0 \rightarrow \pm w_0 + i\varepsilon$$

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(- \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iwt}}{(w + (w_0 - i\varepsilon))(w - (w_0 + i\varepsilon))} dw \right)$$

JORDAN
 $t \geq 0$

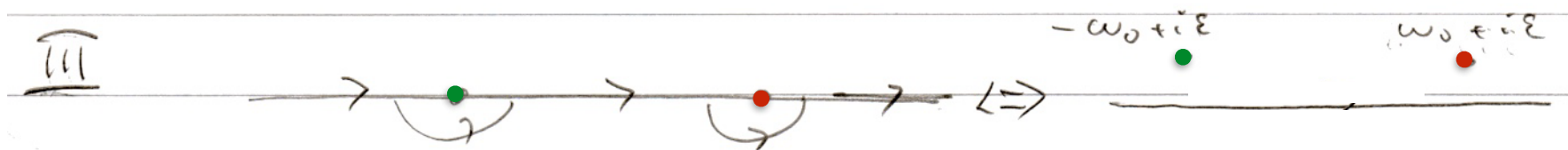
$$+ \int_{C_R} \rightarrow 0 \text{ när } R \rightarrow \infty$$

$f = \text{INTEGRANDEN}$

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-2\pi i \left(\text{Res} [f(-w_0 + i\varepsilon)] + \text{Res} [f(w_0 + i\varepsilon)] \right) \right)$$

$$= -i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{e^{i(-w_0 + i\varepsilon)t}}{-w_0 + i\varepsilon - (w_0 + i\varepsilon)} + \frac{e^{i(w_0 + i\varepsilon)t}}{w_0 + i\varepsilon + (w_0 - i\varepsilon)} \right)$$

$$= -i \left(\frac{e^{i w_0 t} - e^{-i w_0 t}}{2w_0} \right) = \frac{1}{w_0} \sin(w_0 t)$$



Låt oss testa III!

$$g(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} e^{i\omega t} d\omega$$

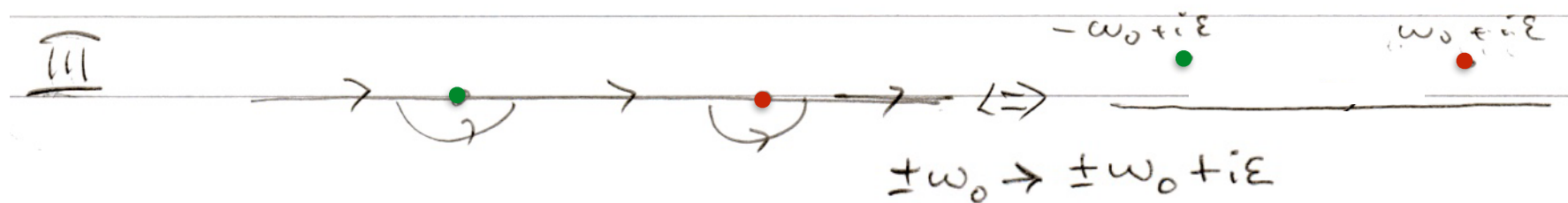
$$\xrightarrow{\pm\omega_0 \rightarrow \pm\omega_0 + i\varepsilon} \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(- \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{(\omega - (\omega_0 - i\varepsilon))(\omega - (\omega_0 + i\varepsilon))} d\omega \right)$$

\uparrow $f = \text{INTEGRANDEN}$

$$\text{JORDAN } t \geq 0 = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-2\pi i \left(\text{Res} \left[f(-\omega_0 + i\varepsilon) \right] + \text{Res} \left[f(\omega_0 + i\varepsilon) \right] \right) \right)$$

$$= -i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{e^{i(-\omega_0 + i\varepsilon)t}}{-\omega_0 + i\varepsilon - (\omega_0 + i\varepsilon)} + \frac{e^{i(\omega_0 + i\varepsilon)t}}{\omega_0 + i\varepsilon + (\omega_0 - i\varepsilon)} \right)$$

$$= -i \left(\frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2\omega_0} \right) = \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$



Låt oss testa III!

$$g(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} e^{i\omega t} d\omega$$

$$\xrightarrow{\pm\omega_0 \rightarrow \pm\omega_0 + i\varepsilon} \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(- \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{(\omega - (\omega_0 - i\varepsilon))(\omega - (\omega_0 + i\varepsilon))} d\omega \right)$$

\uparrow $f = \text{INTEGRANDEN}$

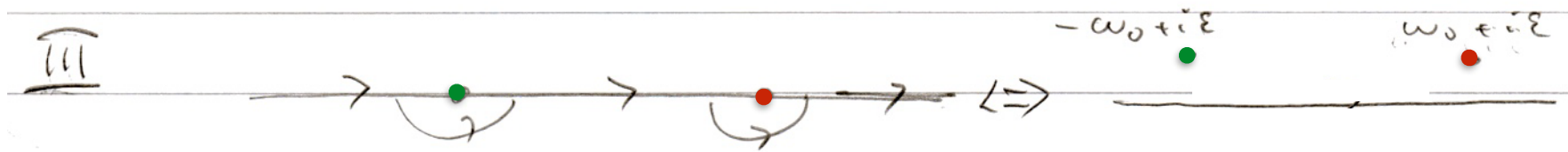
$$\text{JORDAN } t \geq 0 = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-2\pi i \left(\text{Res} \left[f(-\omega_0 + i\varepsilon) \right] + \text{Res} \left[f(\omega_0 + i\varepsilon) \right] \right) \right)$$

$$= -i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{e^{i(-\omega_0 + i\varepsilon)t}}{-\omega_0 + i\varepsilon - (\omega_0 + i\varepsilon)} + \frac{e^{i(\omega_0 + i\varepsilon)t}}{\omega_0 + i\varepsilon - (\omega_0 - i\varepsilon)} \right)$$

$$= -i \left(\frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2\omega_0} \right) = \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

$$g(t) \xrightarrow{t \leq 0} 0$$

(Jordankurva i undre komplexa halvplanet; inga poler!)



$$G(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} e^{i\omega t} d\omega$$

$$\xrightarrow{\pm \omega_0 \rightarrow \pm \omega_0 + i\epsilon} \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(- \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{(\omega_0 + (\omega_0 - i\epsilon))(\omega - (\omega_0 + i\epsilon))} d\omega \right)$$

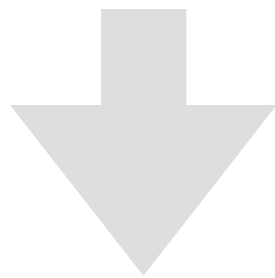
↑ $f = \text{INTEGRANDEN}$

$$\text{JORDAN } t \geq 0 = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(-2\pi i \left(\text{Res}[f(-\omega_0 + i\epsilon)] + \text{Res}[f(\omega_0 + i\epsilon)] \right) \right)$$

$$= -i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{e^{i(-\omega_0 + i\epsilon)t}}{-\omega_0 + i\epsilon - (\omega_0 + i\epsilon)} + \frac{e^{i(\omega_0 + i\epsilon)t}}{\omega_0 + i\epsilon + (\omega_0 - i\epsilon)} \right)$$

$$= -i \left(\frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2\omega_0} \right) = \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

$G(t) \xrightarrow{t \leq 0} 0$ (Jordankurva i undre komplexa halvplanet; inga poler!)

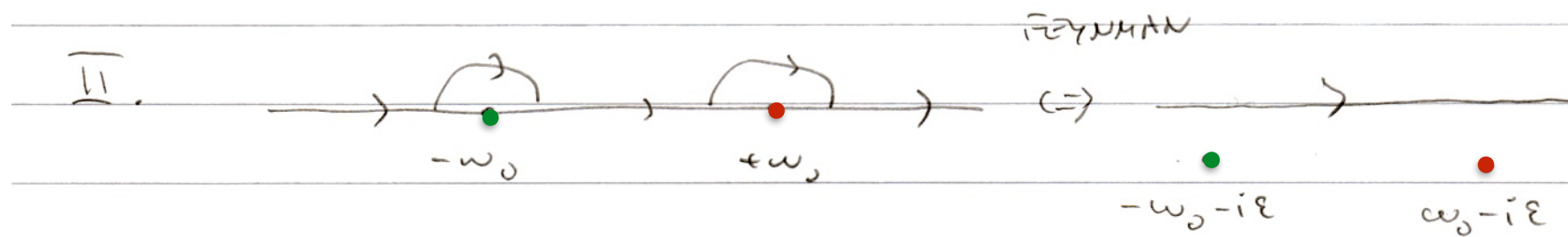


"RETARERAD" GREEN FUNKTION

$$G^{(R)}(t) = \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \mathbb{H}(t)$$

STÄPFUNKTION

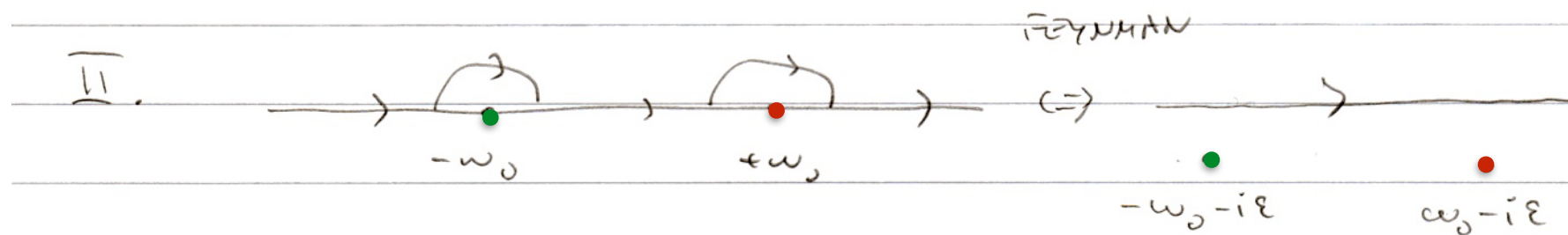
A graph of the Heaviside step function $\mathbb{H}(t)$. The horizontal axis is t and the vertical axis is the function value. The function is 0 for $t < 0$ and 1 for $t > 0$. There is a jump discontinuity at $t = 0$.



SAMMA TYP AV RÄKNING FÖR II GER

$\pm\omega_0 \rightarrow \pm\omega_0 - i\varepsilon$ ← "AVANCERAD" GREEN FUNKTION

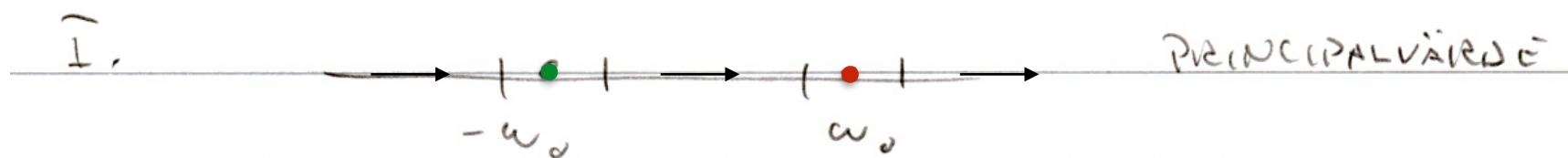
$G(t) \longrightarrow G^{(A)}(t) = -\frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \Theta(-t)$



SAMMA TYP AV RÄKNING FÖR II GIVER

$\pm\omega_0 \rightarrow \pm\omega_0 - i\epsilon$ ← "AVANCERAD" GREEN FUNKTION

$G(t) \longrightarrow G^{(A)}(t) = -\frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \Theta(-t)$



OM VI VÄLJER I

← "SYMMETRISK" GREEN FUNKTION

$G(t) \longrightarrow G^{(S)}(t) = \frac{1}{2} (G^{(A)}(t) + G^{(R)}(t))$

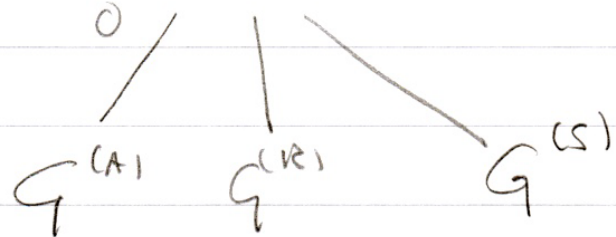
Vilken ska vi välja?

Linjär respons

stärkning $\tilde{F}(s) = 0, s < 0$

$$X(t) = \int_0^{\infty} G(t-s) \tilde{F}(s) ds$$

~~_____~~
0



Vilken ska vi välja?

Linjär respons

sidening $\bar{F}(s) = 0, s < 0$

$$X(t) = \int_0^{\infty} G(t-s) \bar{F}(s) ds$$

$G^{(A)}$ $G^{(R)}$ $G^{(S)}$?

TESTA $G^{(A)}$!

$$X(t) = \int_0^{\infty} G^{(A)}(t-s) \bar{F}(s) ds = -\frac{1}{\omega_0} \int_0^{\infty} \sin \omega_0(t-s) \Theta(s-t) \bar{F}(s) ds$$

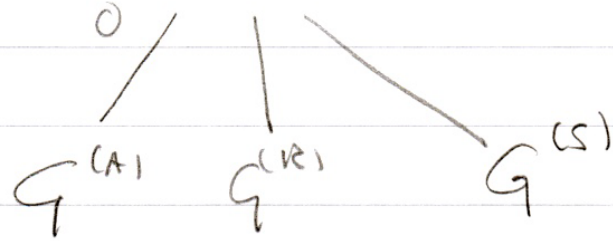
$$= -\frac{1}{\omega_0} \int_t^{\infty} \sin \omega_0(t-s) \bar{F}(s) ds$$

Vilken ska vi välja?

Linjär respons

störning $\bar{F}(s) = 0, s < 0$

$$X(t) = \int_0^{\infty} G(t-s) \bar{F}(s) ds$$

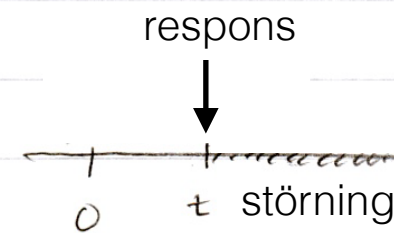


TESTA $G^{(A)}$!

$$X(t) = \int_0^{\infty} G^{(A)}(t-s) \bar{F}(s) ds = -\frac{1}{\omega_0} \int_0^{\infty} \sin \omega_0(t-s) \Theta(s-t) \bar{F}(s) ds$$

$$= -\frac{1}{\omega_0} \int_t^{\infty} \sin \omega_0(t-s) \bar{F}(s) ds$$

↑
ICKE-KAUSAL!

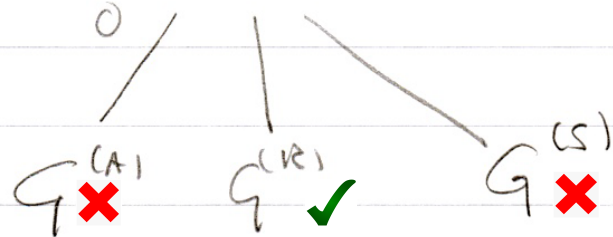


Vilken ska vi välja?

Linjär respons

$$X(t) = \int_0^{\infty} G(t-s) \bar{F}(s) ds$$

sidening $\bar{F}(s) = 0, s < 0$

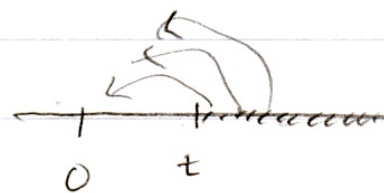


TESTA $G^{(A)}$!

$$X(t) = \int_0^{\infty} G^{(A)}(t-s) \bar{F}(s) ds = -\frac{1}{\omega_0} \int_0^{\infty} \sin \omega_0(t-s) \Theta(s-t) \bar{F}(s) ds$$

$$= -\frac{1}{\omega_0} \int_t^{\infty} \sin \omega_0(t-s) \bar{F}(s) ds$$

↑
Icke-kausalt!



Vi måste välja den retarderade
("fysiska", "kausala") Greenfunktionen!

Andra sätt att räkna Greenfunktioner...
t.ex. med hjälp av Laplace transformer

Andra sätt att räkna Greenfunktioner...

t.ex. med hjälp av Laplace transformer

$$\tilde{G}(p) = \int_0^{\infty} G(t) e^{-pt} dt$$

$$G(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{G}(p) e^{pt} dp$$

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} 1 \cdot e^{pt} dp$$

Drömen kammarsk
ofskattade

$$\frac{d^2 G(t)}{dt^2} + \omega_0^2 G(t) = \delta(t)$$

$$\Rightarrow (p^2 + \omega_0^2) \tilde{G}(p) = 1 \Rightarrow G(t) = \frac{\mathbb{1}_{\mathbb{R}}}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \Theta(t)$$

Andra sätt att räkna Greenfunktioner...
t.ex. med hjälp av Laplace transformer

$$\tilde{G}(p) = \int_0^{\infty} G(t) e^{-pt} dt$$

$$G(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{G}(p) e^{pt} dp$$

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} 1 \cdot e^{pt} dp$$

Dröven kammern
oscillator

$$\frac{d^2 G(t)}{dt^2} + \omega_0^2 G(t) = \delta(t)$$

$$\Rightarrow (p^2 + \omega_0^2) \tilde{G}(p) = 1 \Rightarrow G(t) = \frac{\mathcal{H}}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \Theta(t)$$

Wow!

Mycket enklare än Fouriertransformer,
Feynmantrick, och allt det där stöket...

Andra sätt att räkna Greenfunktioner...
t.ex. med hjälp av Laplace transformer

$$\tilde{G}(p) = \int_0^{\infty} G(t) e^{-pt} dt$$

$$G(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{G}(p) e^{pt} dp$$

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} 1 \cdot e^{pt} dp$$

$$\frac{d^2 G(t)}{dt^2} + \omega_0^2 G(t) = \delta(t)$$

$$\Rightarrow (p^2 + \omega_0^2) \tilde{G}(p) = 1 \Rightarrow G(t) = \frac{\mathbb{1}}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \Theta(t)$$

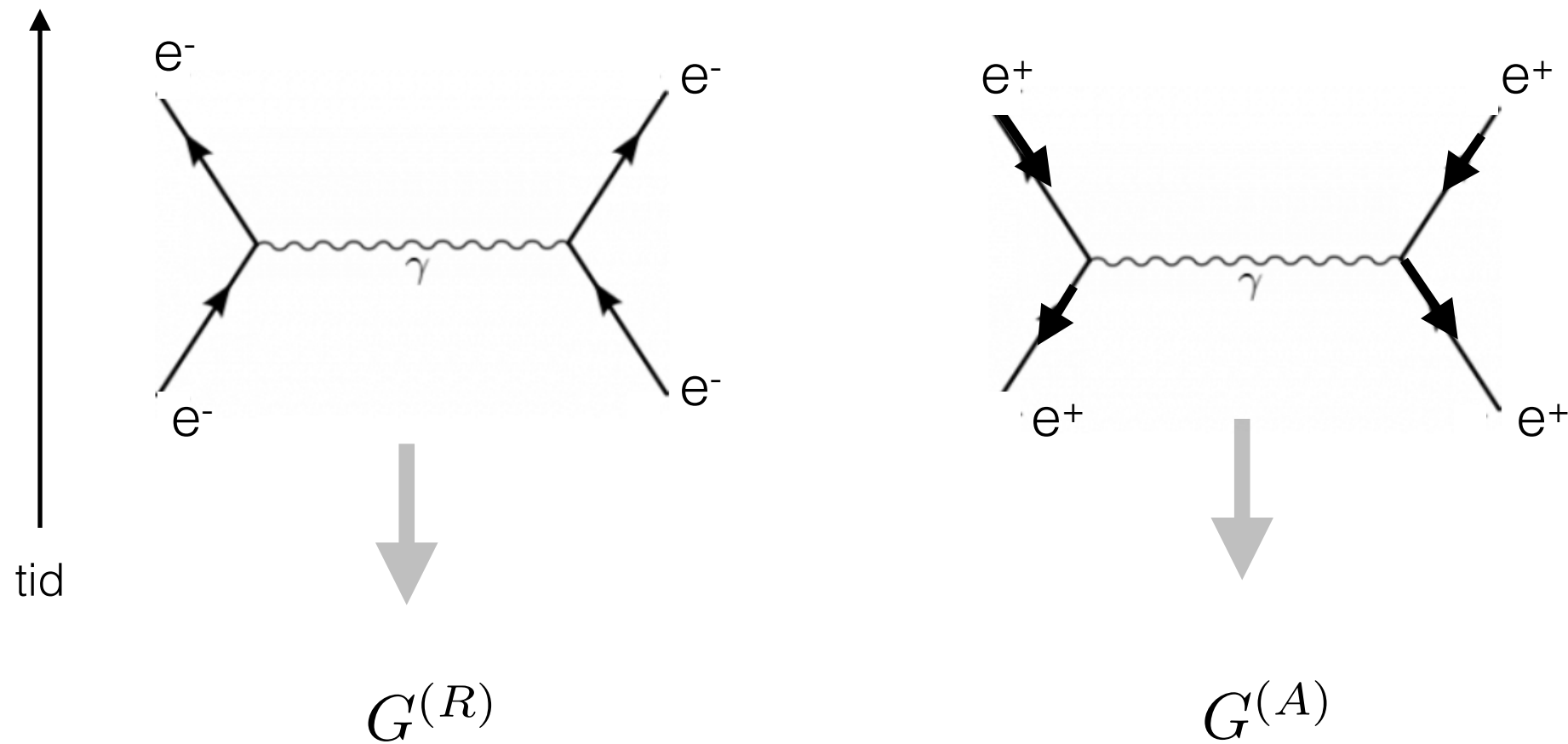
The diagram shows the complex plane with the real axis labeled $\text{Re } z$. A vertical line is drawn at $\text{Re } z = c$. The imaginary axis is labeled $i\omega$ at the top and $-i\omega$ at the bottom. A horizontal line is drawn at $\text{Im } z = 0$. A small circle is drawn around the origin 0 . The text "Drömen handnarisch osäkerhet" is written near the origin.

Men funkar inte alltid...

... och ibland vill vi (som matematiskt trick!)
använda den avancerade Greenfunktionen!

... ibland vill vi (som matematiskt trick!)
 använda den avancerade Greenfunktionen,
 t.ex. vid **växelverkan mellan antipartiklar**

Feynmandiagram



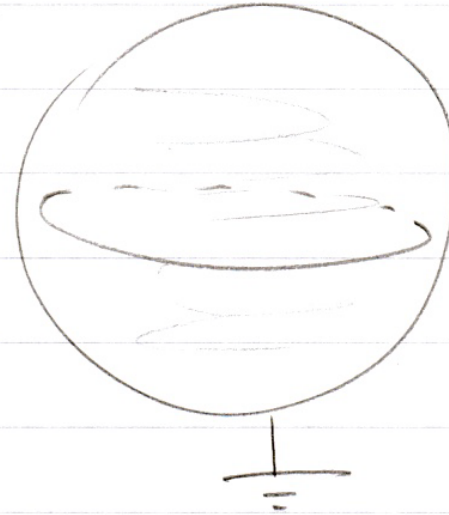
En sista kommentar:

Greenfunktioner med (icke-triviala) randvillkor

EX POISSONS EKVATION

$$\nabla^2 u(\vec{r}) = -\rho(\vec{r})/\epsilon_0$$

$$\zeta u(\vec{r}) = 0$$



DEFINIERA $\overline{G}(\vec{r}, \vec{r}') = G(\vec{r}, \vec{r}') + \overline{F}(\vec{r}, \vec{r}')$

FRÅN LÖSNINGEN AV
 $\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$

FRÅN LÖSNINGEN AV
 $\nabla^2 \overline{F}(\vec{r}, \vec{r}') = 0$

VÄLJ $\overline{F}(\vec{r}, \vec{r}')$ SÅ ATT $\overline{G}(\vec{r}, \vec{r}')$ GER EN LÖSNING SOM
 UPPFYLLER RANDVILLKORET