

Kursens sista block:

Kaffemuggar, munkar och och topologisk kvantmateria

Topologiska rum, homeomorfismer, och invarianter





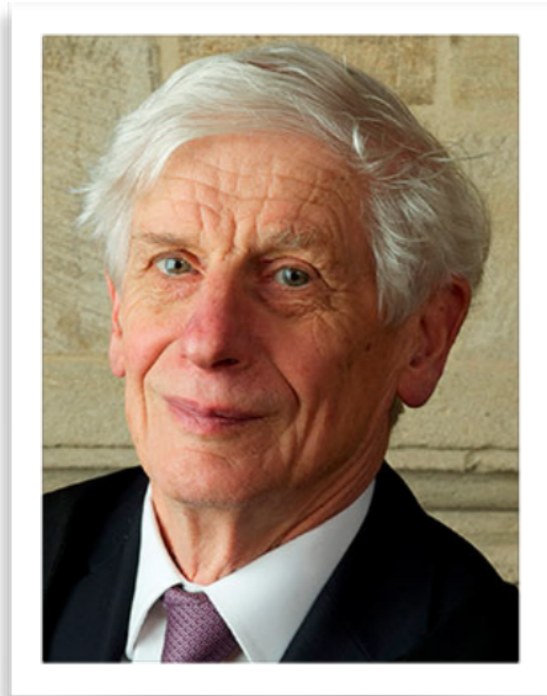
GÖTEBORGS
UNIVERSITET

Vetenskapsfestivalen Göteborg
13 maj 2017

Topologisk kvantmateria

Henrik Johannesson
Göteborgs universitet

Nobelpriset i fysik 2016



David J. Thouless
University of Washington, USA



F. Duncan M. Haldane
Princeton University, USA



J. Michael Kosterlitz
Brown University, USA

"för teoretiska upptäckter av topologiska fasövergångar och topologiska materiefaser"

Nobelpriset i fysik 2016



1973



David J. Thouless



J. Michael Kosterlitz



David J. Thouless



F. Duncan M. Haldane

topologiska fasövergångar

J M Kosterlitz and D J Thouless.

Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems.

Journal of Physics C: Solid State Physics, 6(7):1181, 1973.

Nobelpriset i fysik 2016



1973



David J. Thouless

J. Michael Kosterlitz

topologiska fasövergångar

J M Kosterlitz and D J Thouless.
Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems.
Journal of Physics C: Solid State Physics, 6(7):1181, 1973.

1982



David J. Thouless

F. Duncan M. Haldane

topologiska materiefaser

D. J. Thouless, Mahito Kohmoto, MP Nightingale, and M Den Nijs.
Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential.
Physical Review Letters, 49(6):405, 1982.

Nobelpriset i fysik 2016



1973



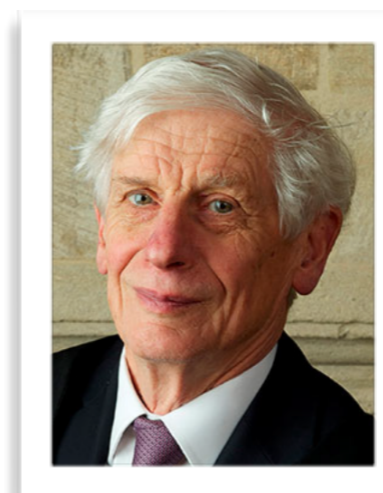
David J. Thouless

J. Michael Kosterlitz

topologiska fasövergångar

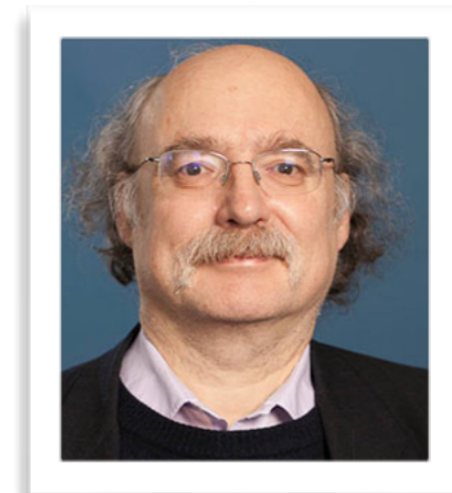
J M Kosterlitz and D J Thouless.
Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems.
Journal of Physics C: Solid State Physics, 6(7):1181, 1973.

1982



David J. Thouless

1983



F. Duncan M. Haldane

topologiska materiefaser

D. J. Thouless, Mahito Kohmoto, MP Nightingale, and M Den Nijs.
Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential.
Physical Review Letters, 49(6):405, 1982.

F.D.M. Haldane.
Continuum dynamics of the 1-D Heisenberg antiferromagnet.
Physics Letters A, 93(9):464, 1983;

Nobelpriset i fysik 2016



1973



David J. Thouless



J. Michael Kosterlitz

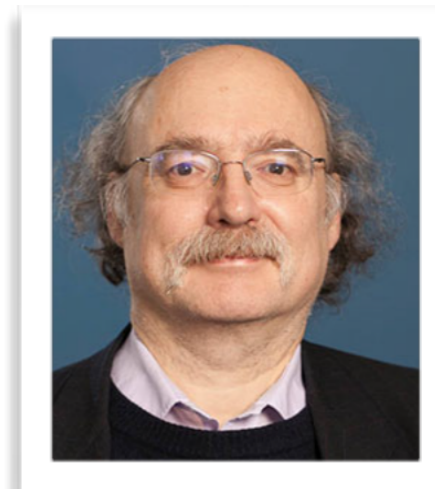
topologiska fasövergångar

J M Kosterlitz and D J Thouless.
Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems.
Journal of Physics C: Solid State Physics, 6(7):1181, 1973.

1982



David J. Thouless



F. Duncan M. Haldane

topologiska materiefaser

D. J. Thouless, Mahito Kohmoto, MP Nightingale, and M Den Nijs.
Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential.
Physical Review Letters, 49(6):405, 1982.

F.D.M. Haldane.
Continuum dynamics of the 1-D Heisenberg antiferromagnet.
Physics Letters A, 93(9):464, 1983;

1983

Materiefaser och fasövergångar: bakgrund

Materiefaser och fasövergångar: bakgrund



Vattenfall, Eldfjord, Norge

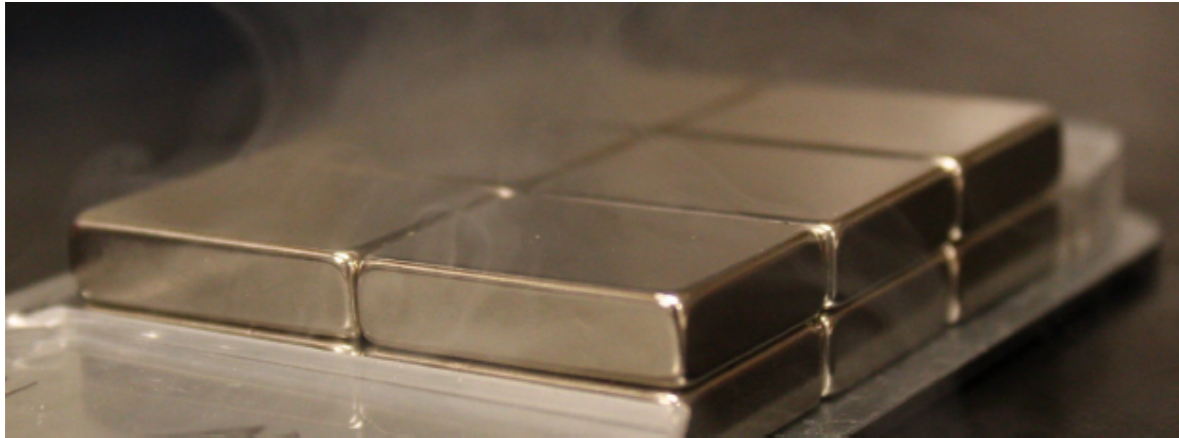
Materiefaser och fasövergångar: bakgrund



Vattenfall, Eldfjord, Norge



Materiefaser och fasövergångar: bakgrund



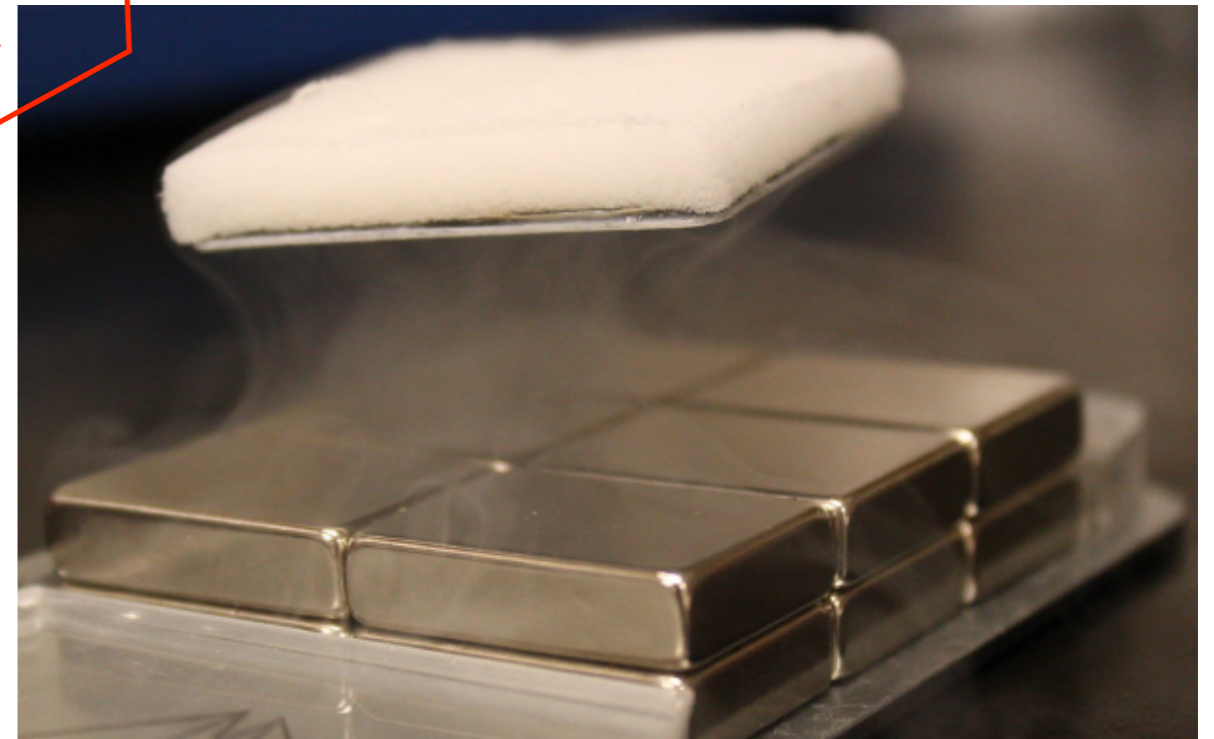
metallisk fas

Materiefaser och fasövergångar: bakgrund



metallisk fas

$$T < T_c$$

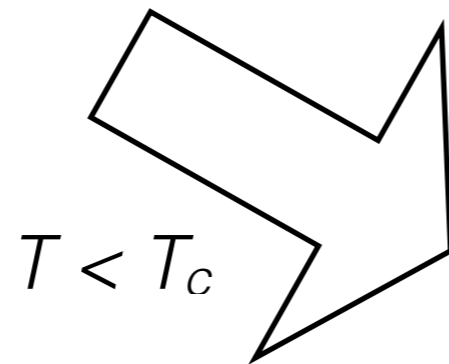


supraledande fas

Materiefaser och fasövergångar: bakgrund

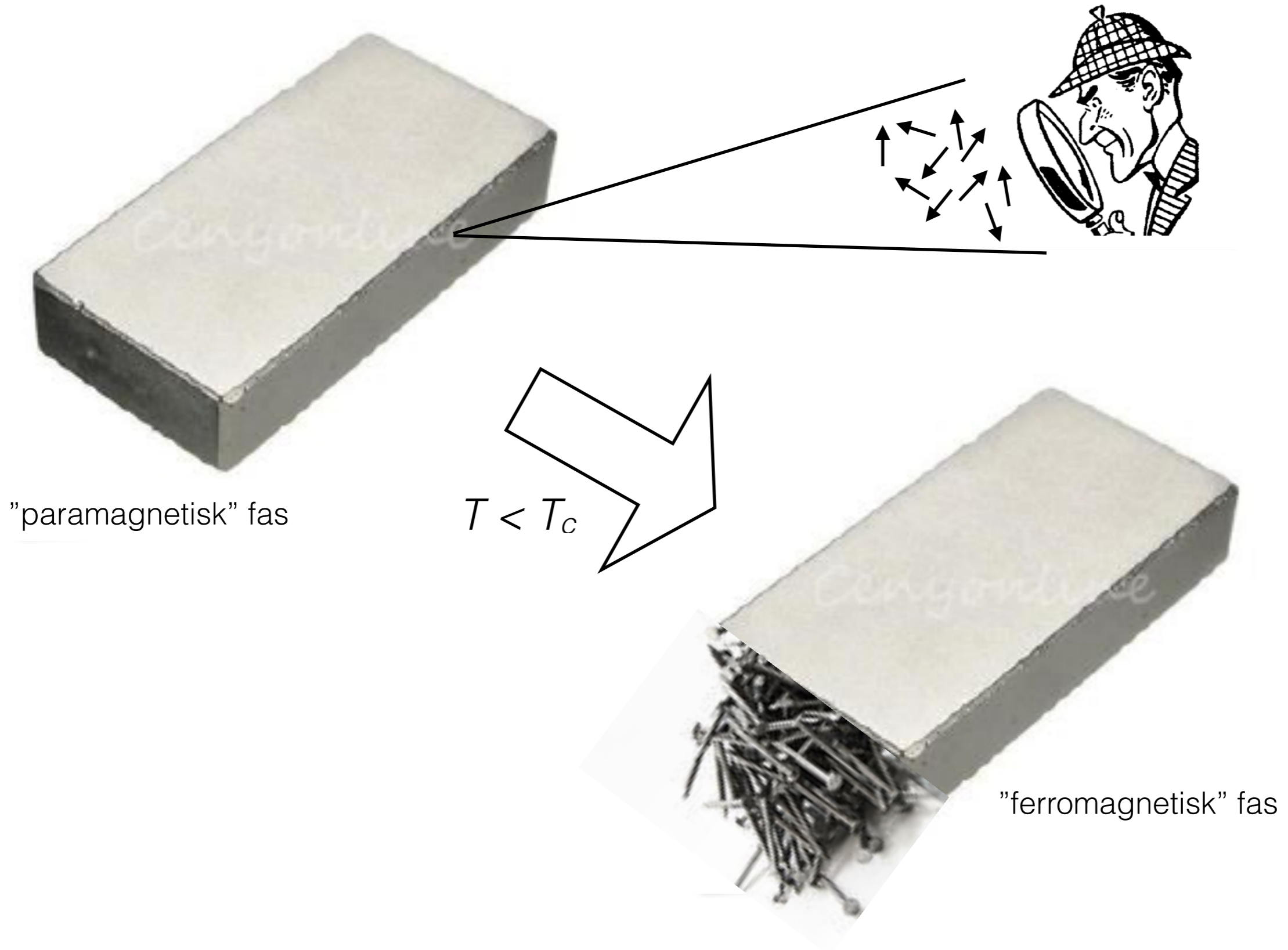


"paramagnetisk" fas

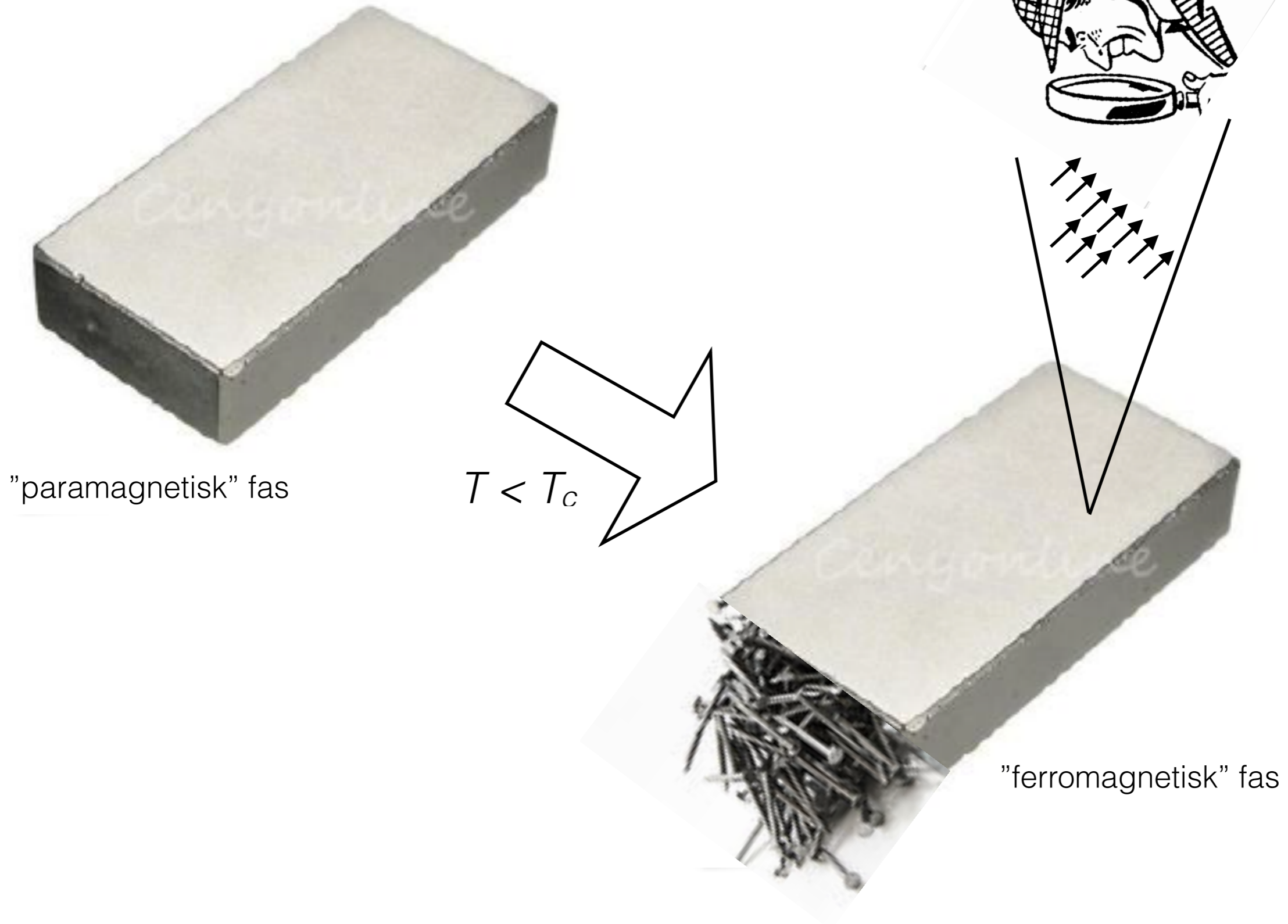


"ferromagnetisk" fas

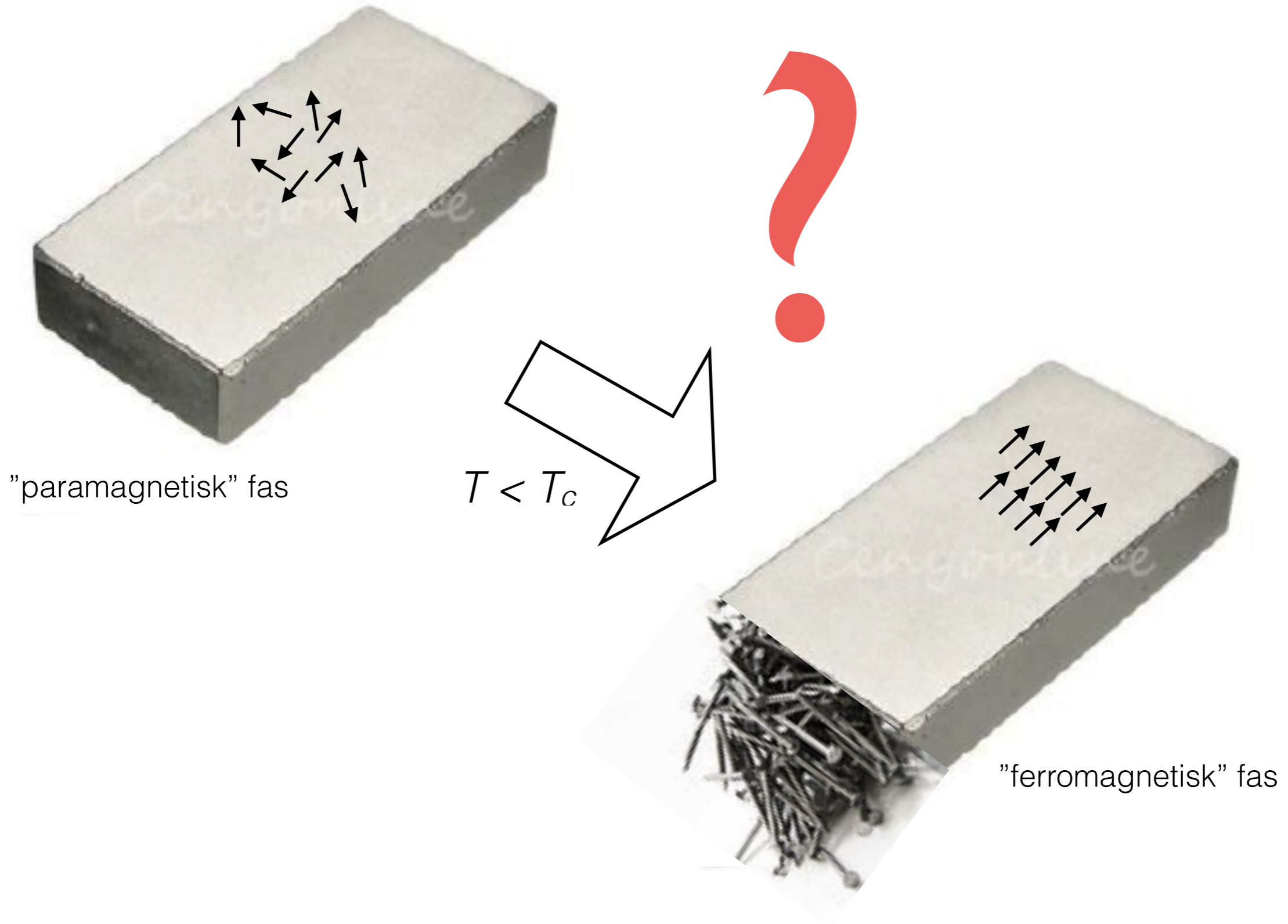
Materiefaser och fasövergångar: bakgrund



Materiefaser och fasövergångar: bakgrund



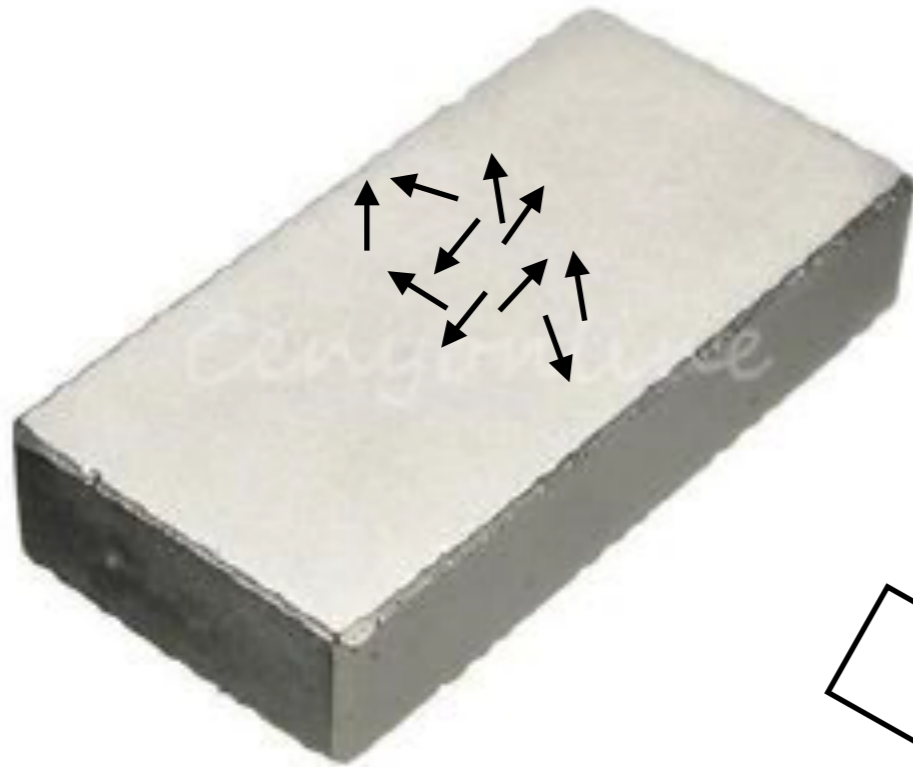
Materiefaser och fasövergångar: bakgrund



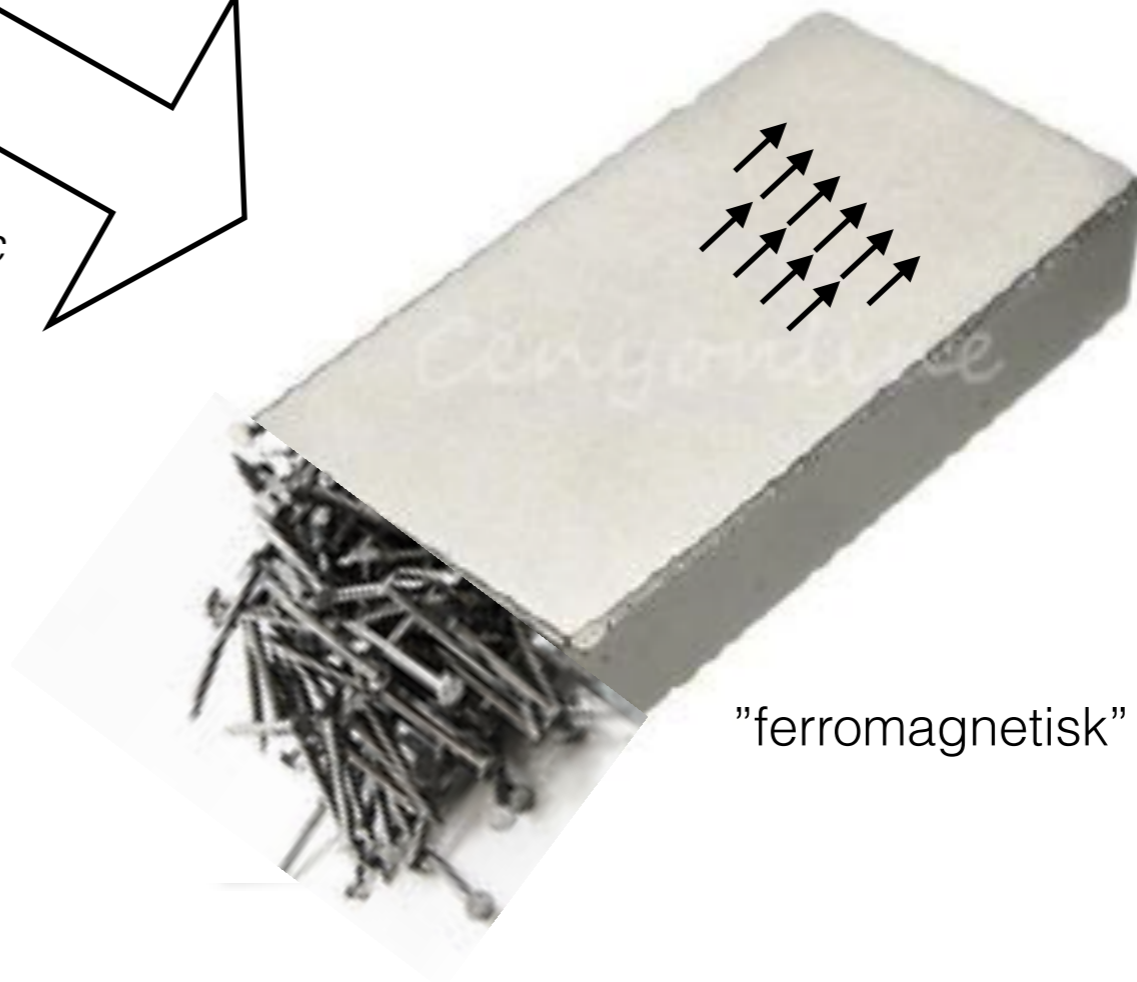
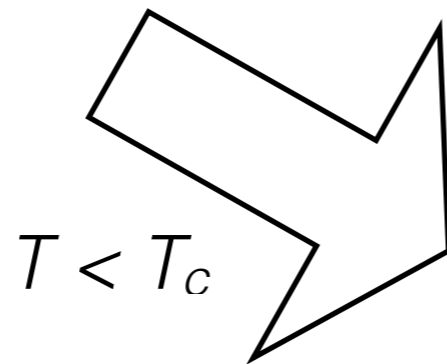
Naturen försöker minimera den fria energin $F = E - TS$

energi

entropi
(mått på
oordning)



"paramagnetisk" fas

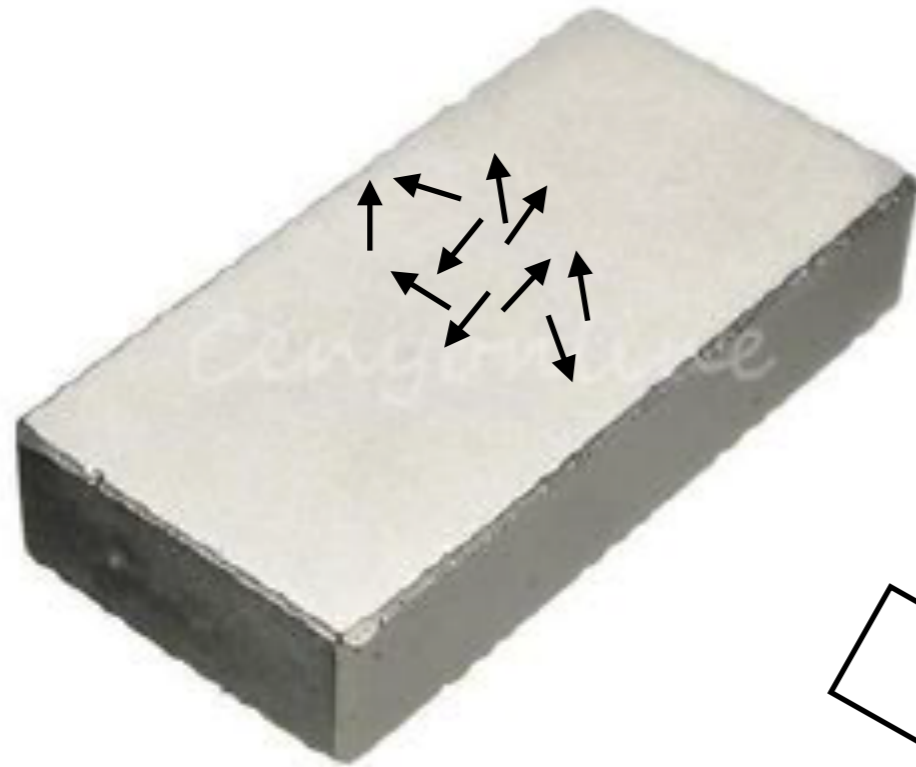


"ferromagnetisk" fas

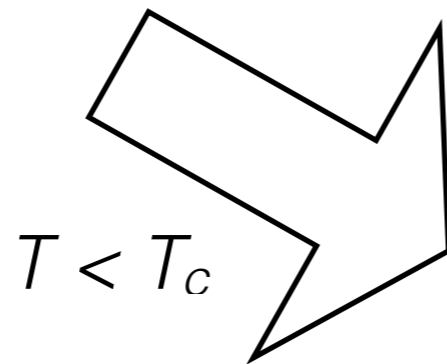
Naturen försöker minimera den fria energin $F = E - TS$

energi

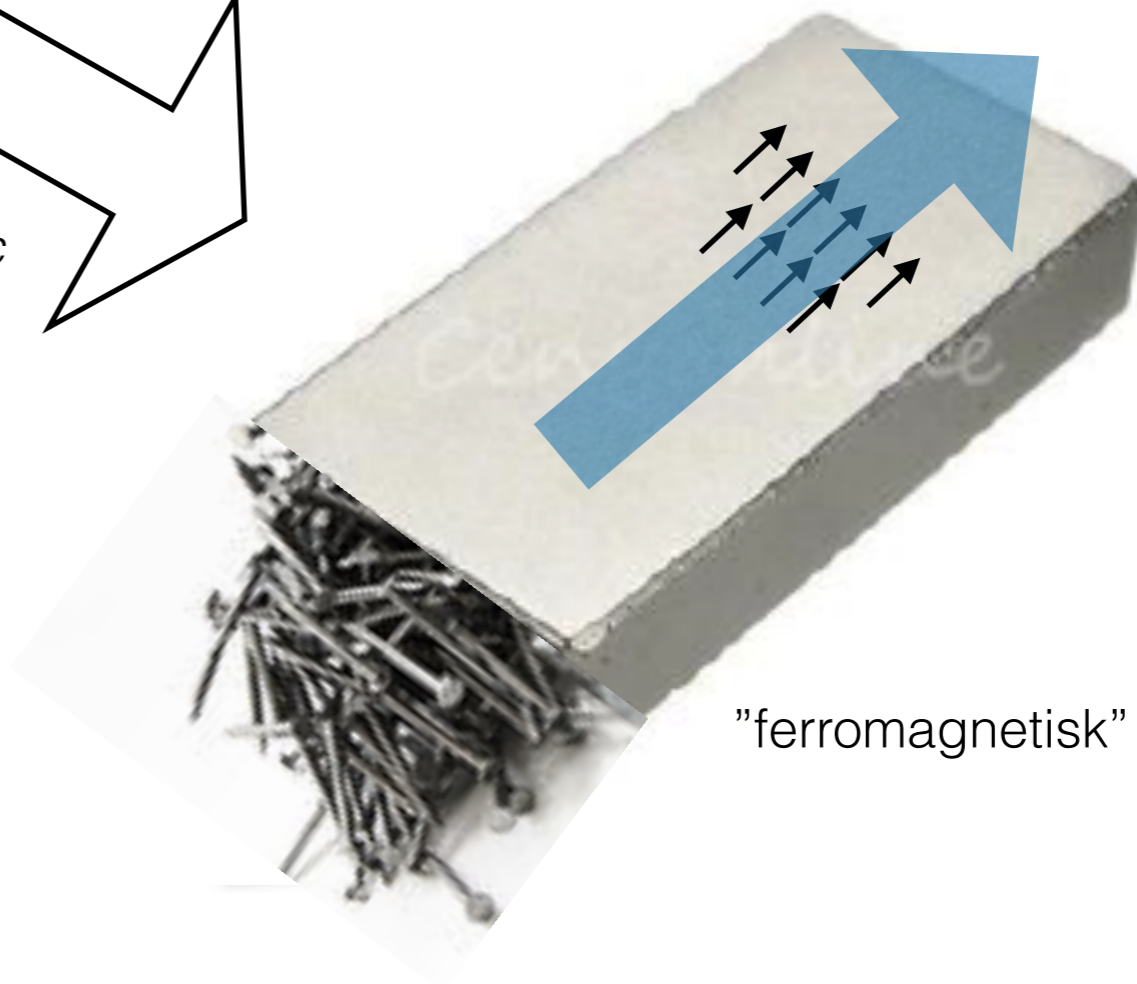
entropi
(mått på
oordning)



"paramagnetisk" fas



Magnetiseingen väljer ut en riktning:
bruten rotationssymmetri

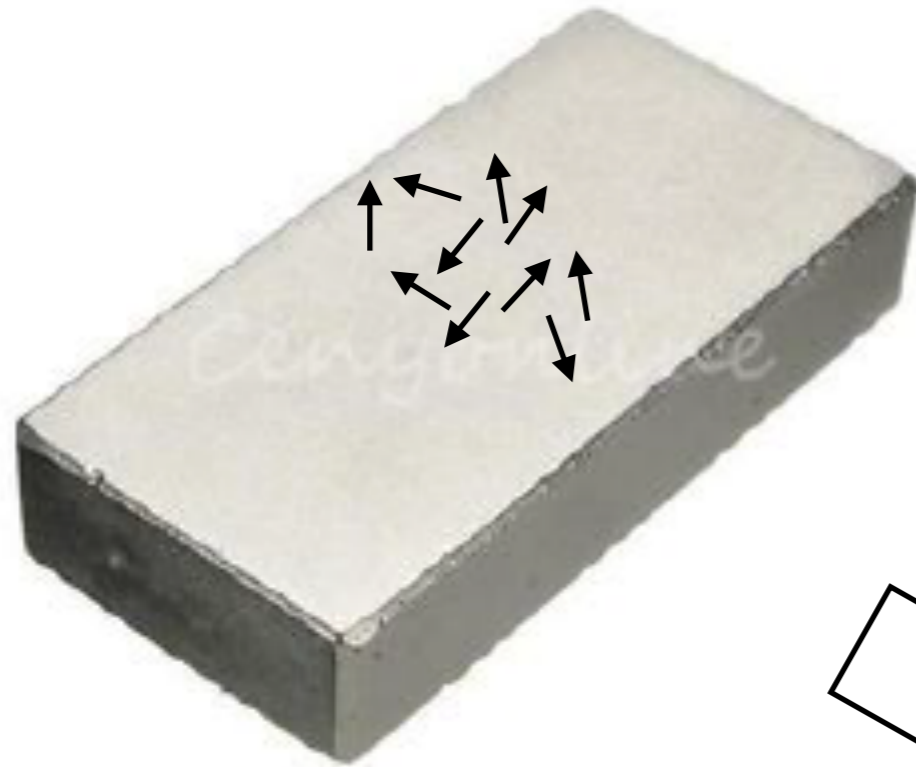


"ferromagnetisk" fas

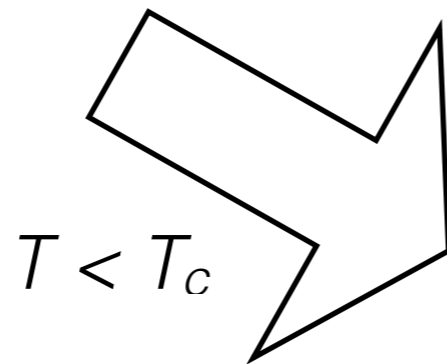
Naturen försöker minimera den fria energin $F = E - TS$

energi

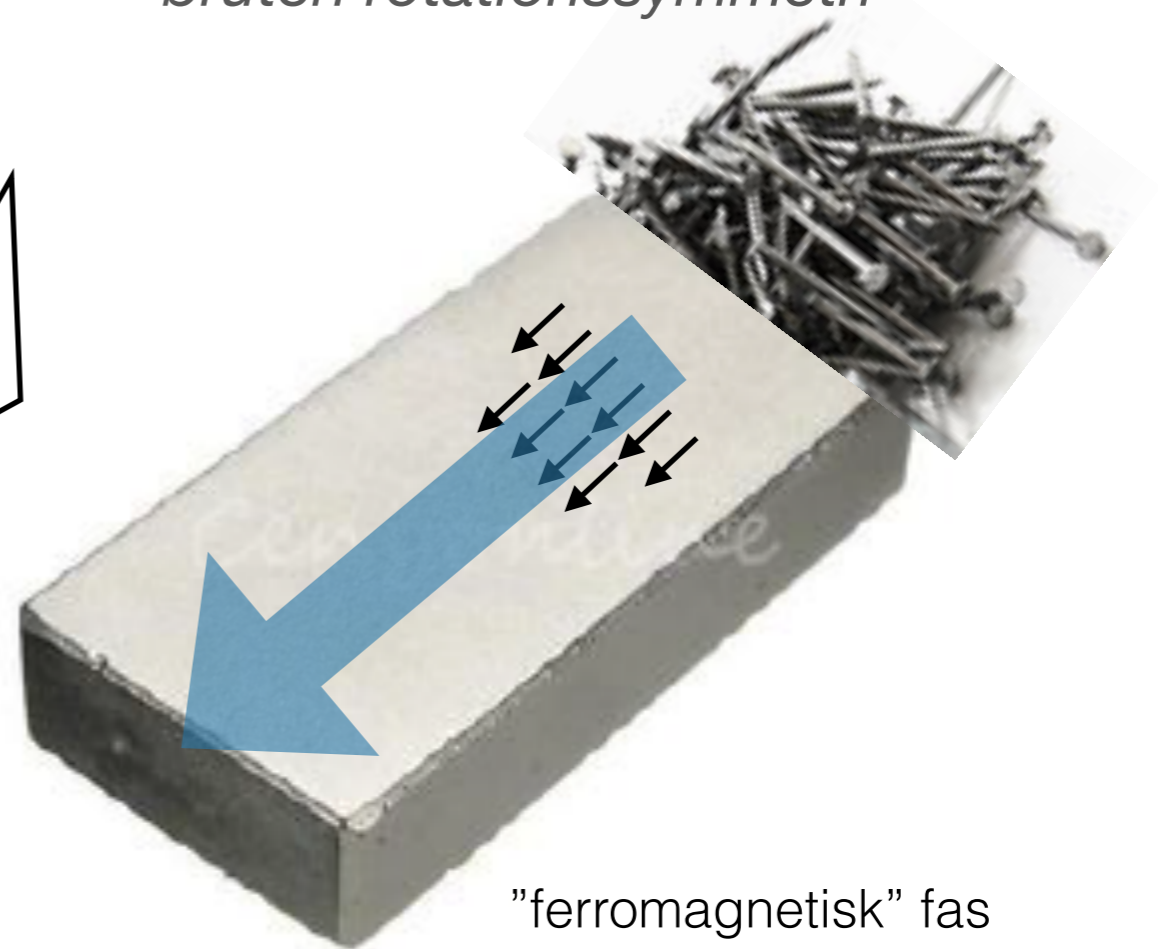
entropi
(mått på
oordning)



"paramagnetisk" fas

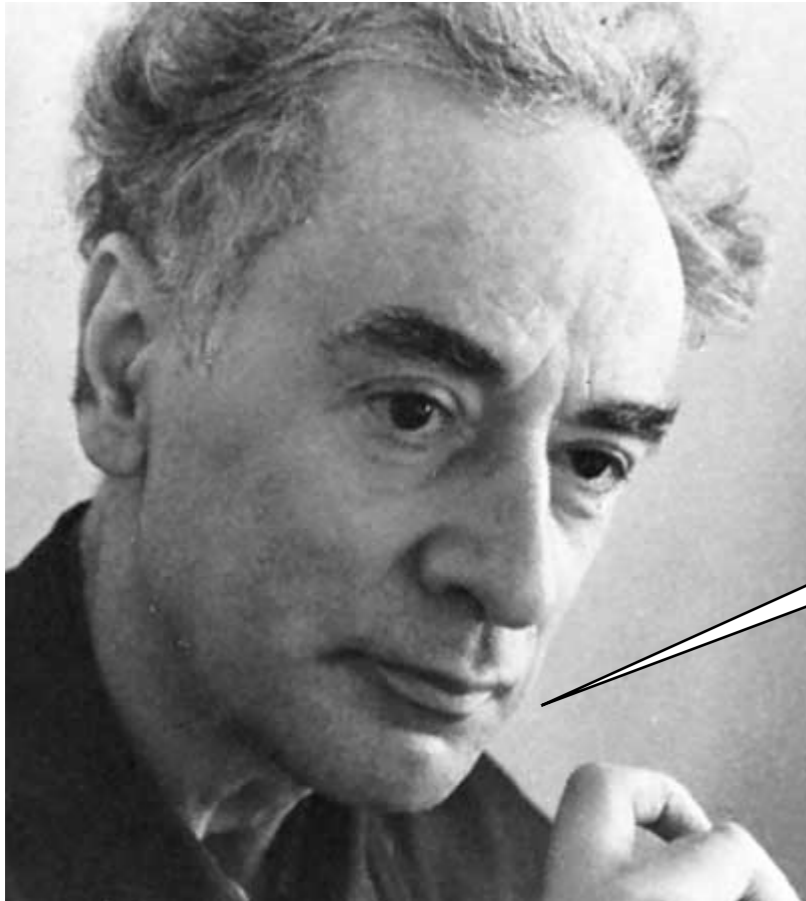


Magnetiseingen väljer ut en riktning:
bruten rotationssymmetri



"ferromagnetisk" fas

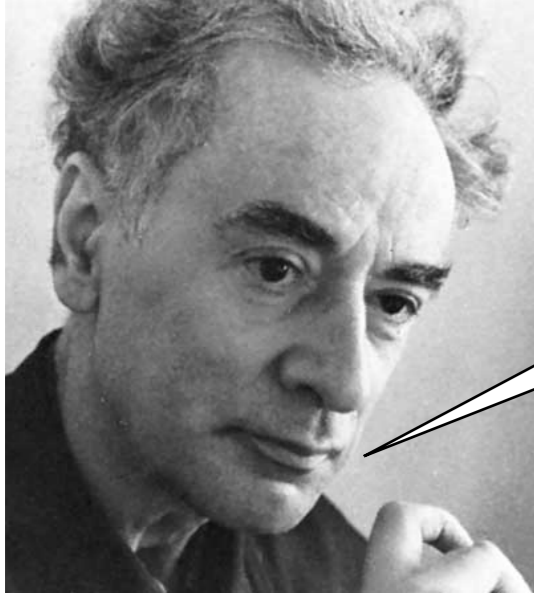
Materiefaser och fasövergångar: bakgrund



Lev D. Landau
1908-1968
(Nobelpris i fysik 1962)

”Fasövergångar hos kondenserad materia åtföljs av förändrad(e) **symmetri(er)**. Materiens faser kan klassificeras efter vilka **symmetrier** som förekommer.”

Materiefaser och fasövergångar: bakgrund



Lev D. Landau
1908-1968
(Nobelpris i fysik 1962)

”Fasövergångar hos kondenserad materia åtföljs av förändrad(e) **symmetri(er)**. Materiens faser kan klassificeras efter vilka **symmetrier** som förekommer.”

”Materien uppvisar också faser utan symmetribrott men med olika **topologiska invarianter**.”

”Fasövergångar kan drivas av ’**topologiska defekter**’ utan att symmetrier ändras ”



David J. Thouless



F. Duncan M. Haldane



David J. Thouless



J. Michael Kosterlitz

Topologi: en 3 min snabbkurs

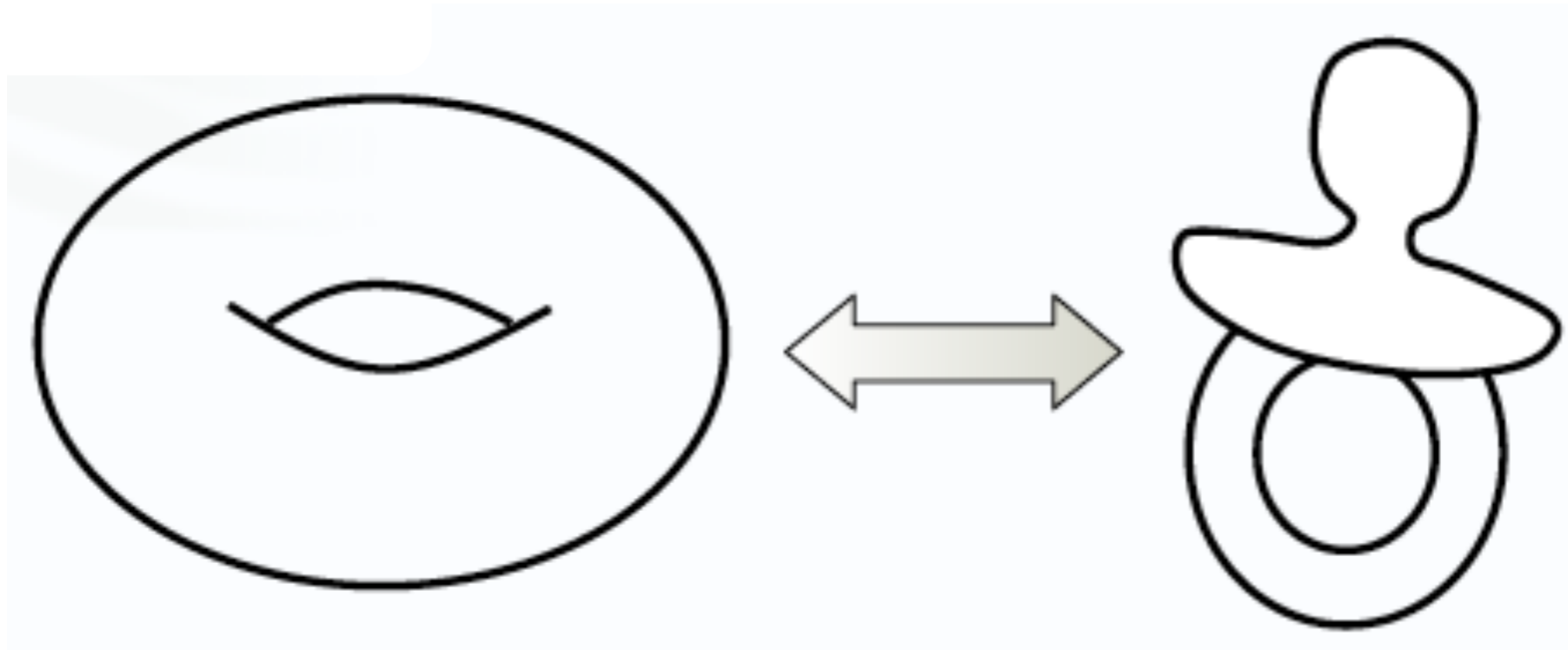
Topologi: en 3 min snabbkurs

Fråga: Vad är topologi?

Svar: En gren av matematiken som studerar egenskaper hos former som inte ändras under *kontinuerliga deformationer*

”klämma och dra”: OK

”klippa eller klistra”: ej OK



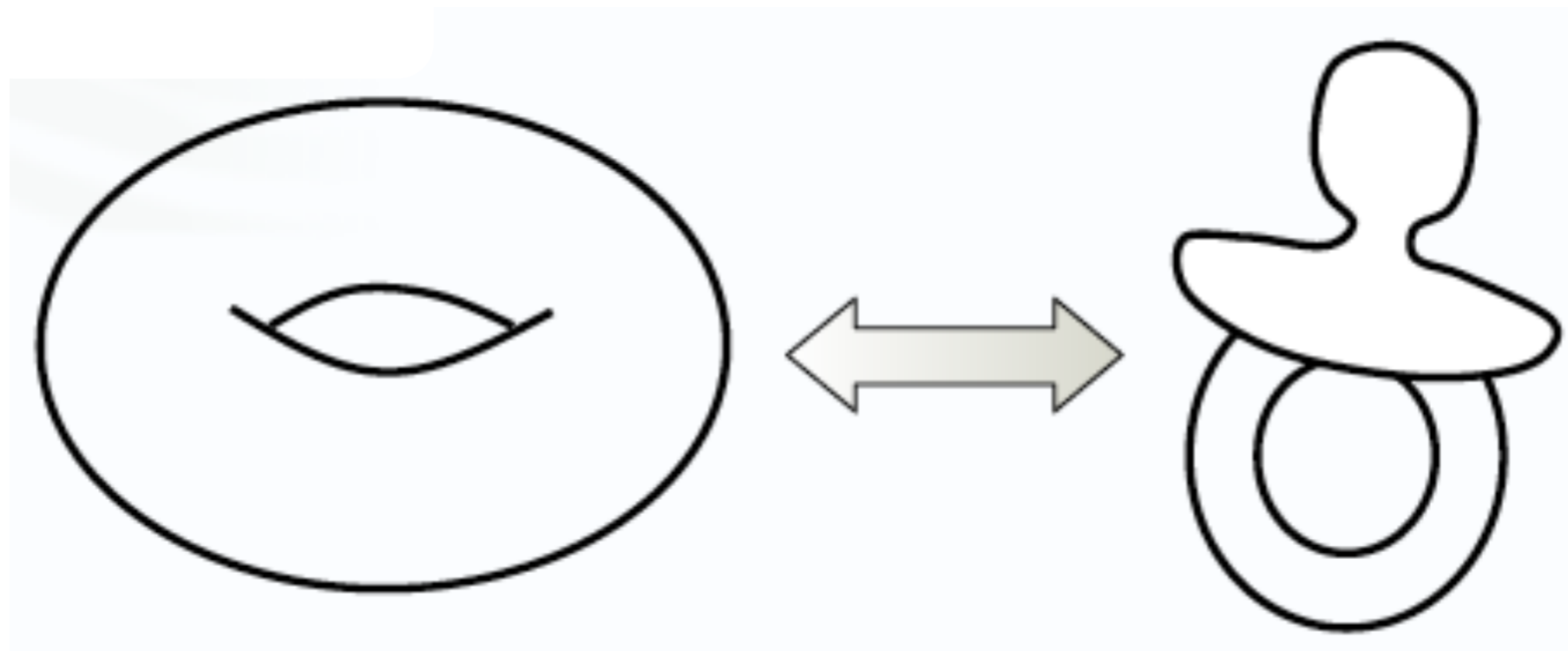
Topologi: en 3min snabbkurs

Fråga: Vad är topologi?

Svar: En gren av matematiken som studerar
egenskaper hos former som inte ändras
under *kontinuerliga deformationer*

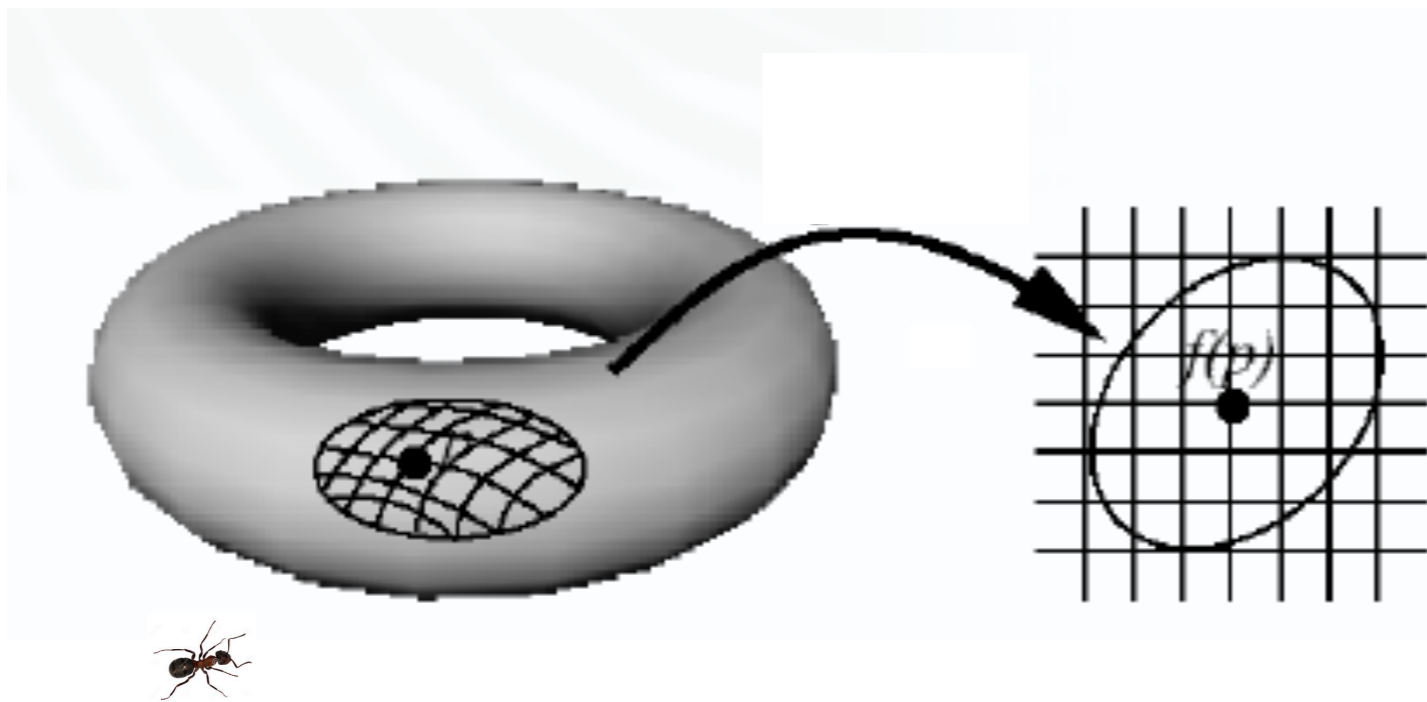
"klämma och dra": OK
"klippa eller klistra": ej OK

"topologisk invariant"



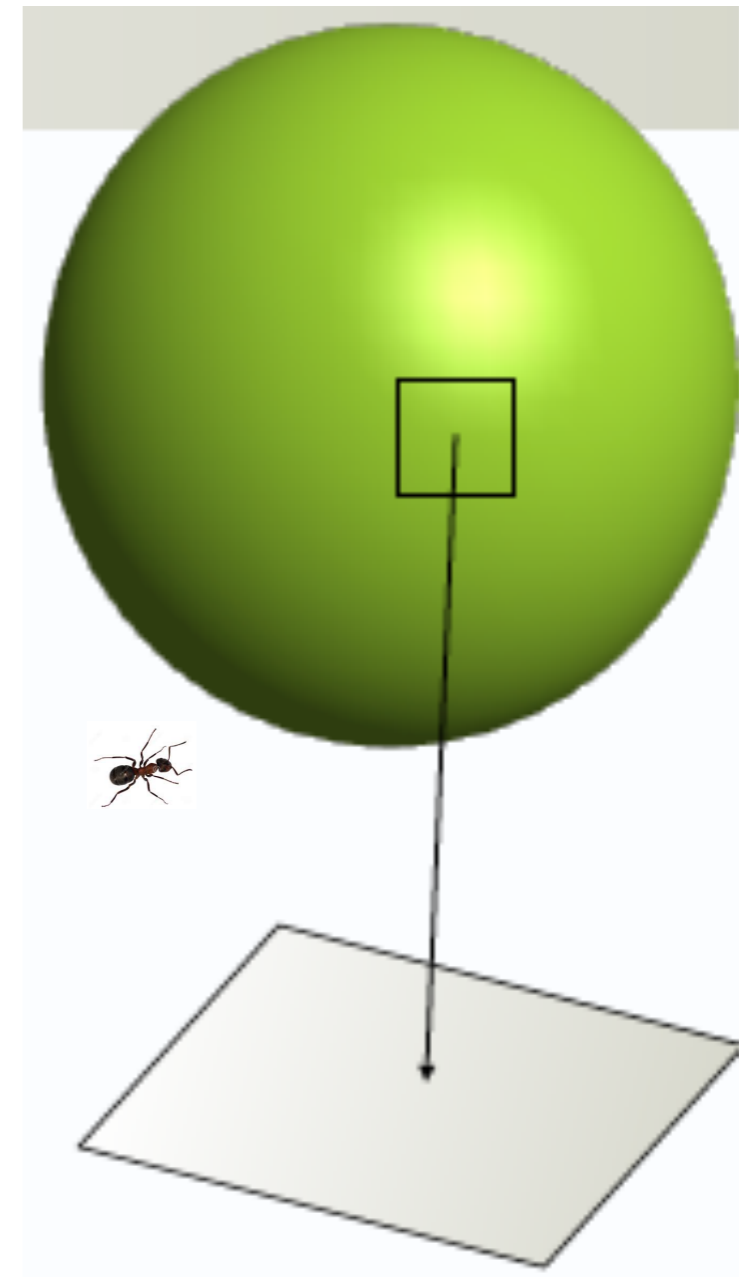
Ex: # hål "n"
(här: n=1)

Topologi: en 3 min snabbkurs



Topologiska invarianter är **heltal** som karakteriserar **globala egenskaper** hos former

”Form” kan generaliseras till mer komplexa begrepp, t.ex. (i fysiken): ”mångfald av kvantmekaniska tillstånd”



NOBEL PRIZE IN PHYSICS GOES TO ANOTHER WEIRD THING NOBODY UNDERSTANDS

Nobel physics prize awarded to three for topology work
October 4, 2016 by Karl Ritter

SVENSKA DAGBLADET

Sverige

”Hur kan en kanelbulle förvandlas till kaffekopp?”

Årets Nobelpris i fysik tilldelas tre britter för forskning om exotisk materia i kvantvärlden.

2016 Nobel Prize in Physics: The Revelation of Topological Phases of Matter

Research used to guide light around sharp corners; photonic transitions for enabling future quantum computation and nanosciences

The New York Times | <https://nyti.ms/2dANF49>

SCIENCE

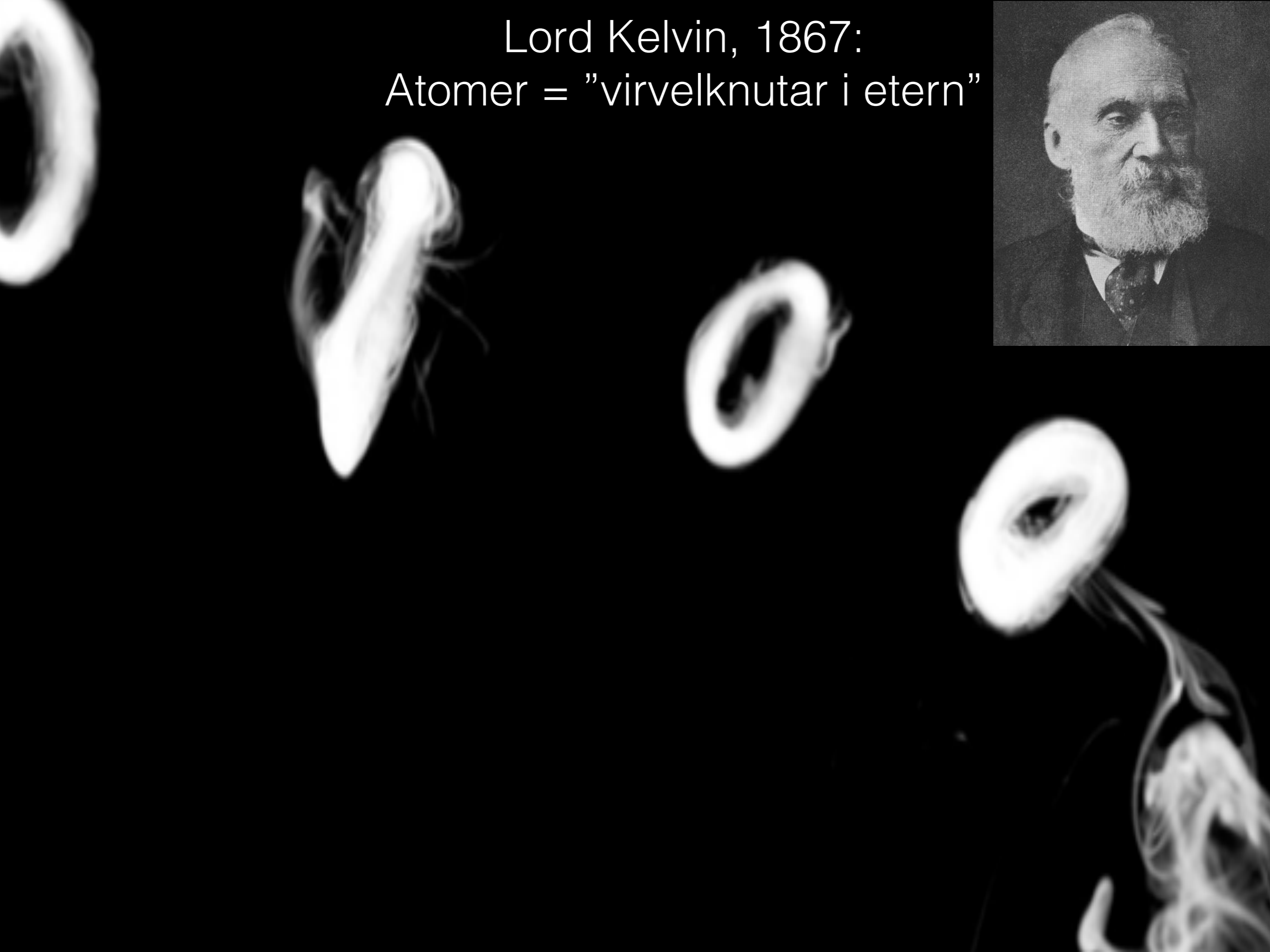
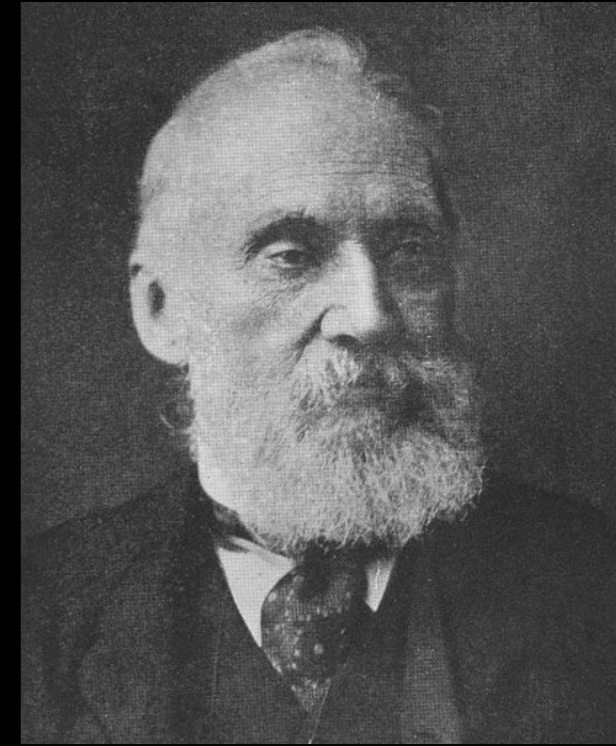
3 Who Studied Unusual States of Matter Win Nobel Prize in Physics

By DENNIS OVERBYE and SEWELL CHAN OCT. 4, 2016

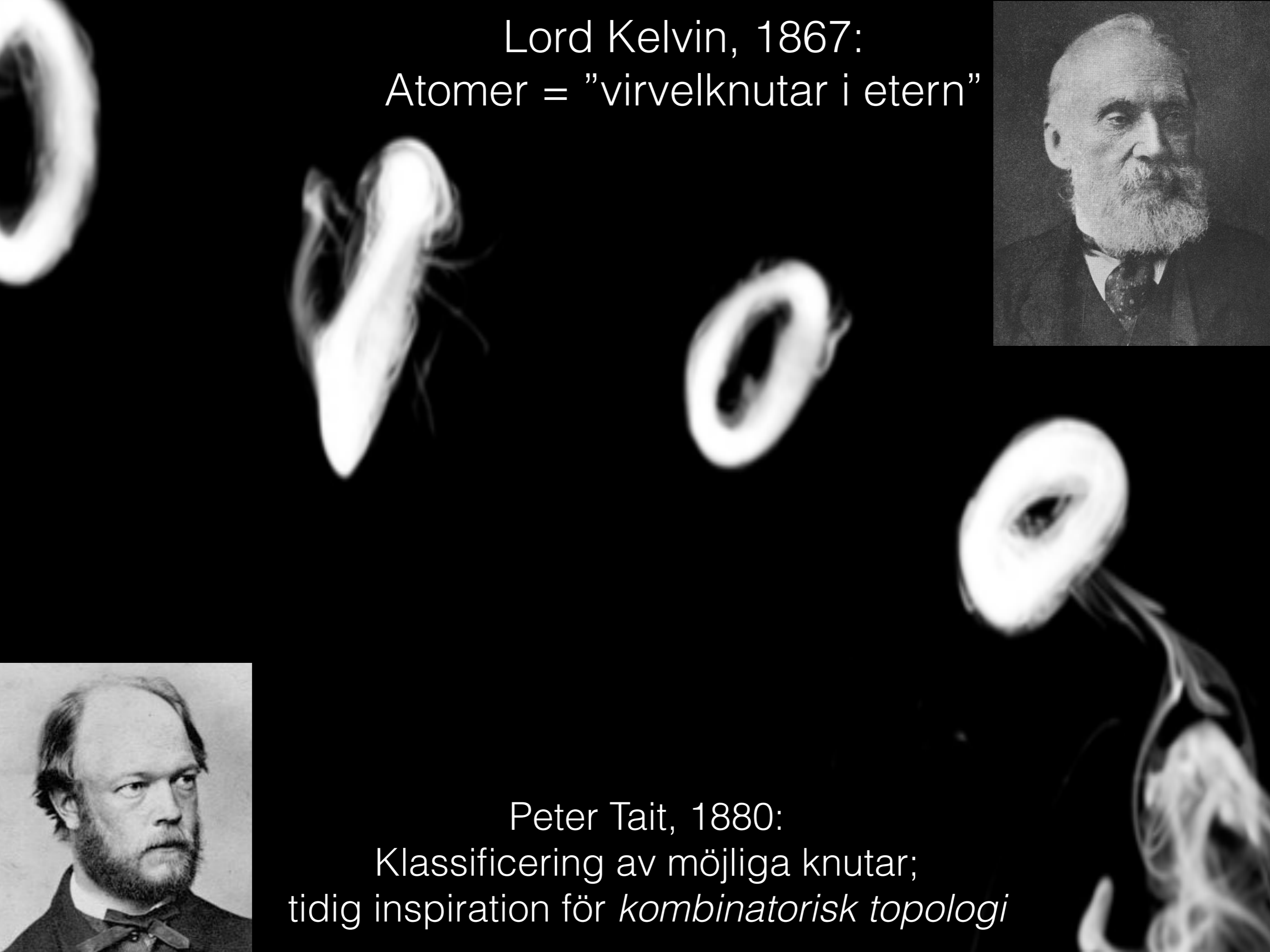
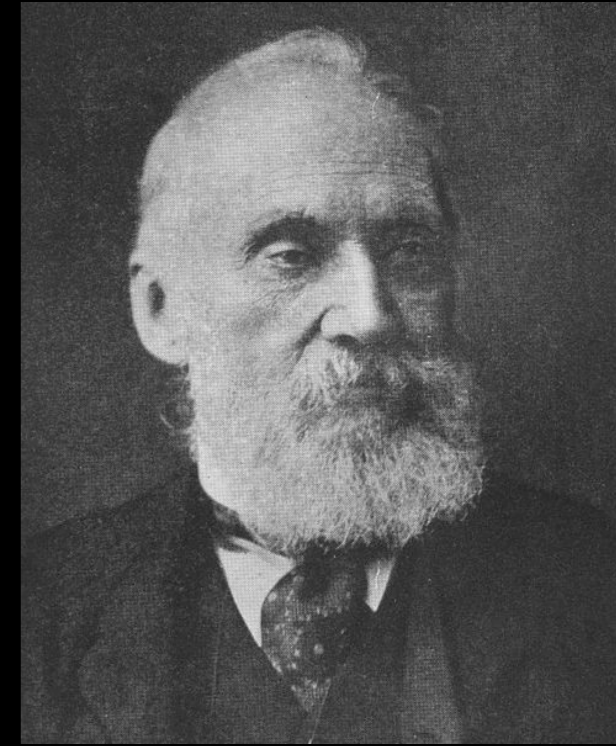
Three physicists born in Britain but now working in the United States were awarded the Nobel Prize in Physics on Tuesday for research into the bizarre properties of matter in extreme states, including superconductors, superfluids and thin magnetic films.



Lord Kelvin, 1867:
Atomer = "virvelknutar i etern"



Lord Kelvin, 1867:
Atomer = "virvelknutar i etern"



Peter Tait, 1880:
Klassificering av möjliga knutar;
tidig inspiration för *kombinatorisk topologi*

Växelbruket mellan fysik och topologi har en lång historia...

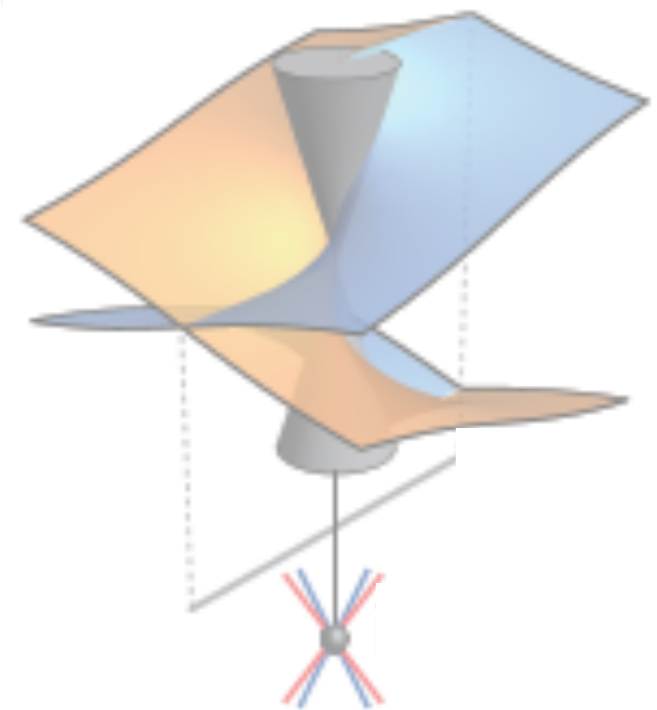
Magnetiska monopoler, Dirac 1931

Kvantiserade virvlar i supraflytande helium, Onsager 1949

Topologiska faser i kvantmekaniken, Aharonov & Bohm 1959

Gravitationell kollaps och rum-tid singulariteter, Penrose 1965

Nobelpris 2020



Växelbruket mellan fysik och topologi har en lång historia...

Magnetiska monopoler, Dirac 1931

Kvantiserade virvlar i supraflytande helium, Onsager 1949

Topologiska faser i kvantmekaniken, Aharonov & Bohm 1959

Gravitationell kollaps och rum-tid singulariteter, Penrose 1965

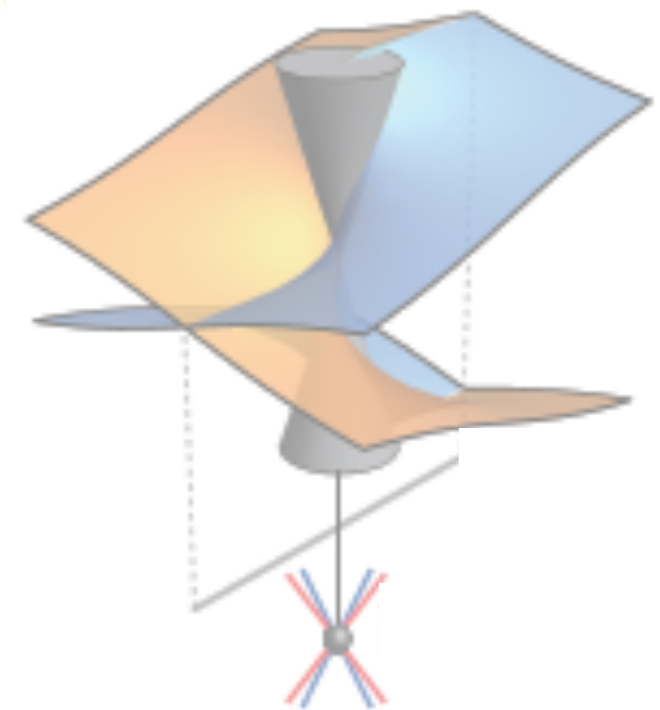
Topologiska fasövergångar, Kosterlitz & Thoules 1973

Topologiska materiefaser, Thouless, Kohmoto, Nightingale, den Nijs 1982

Symmetriskyddade topologiska faser, Haldane 1983

Nobelpris 2020

Nobelpris 2016



Växelbruket mellan fysik och topologi har en lång historia...

Magnetiska monopoler, Dirac 1931

Kvantiserade virvlar i supraflytande helium, Onsager 1949

Topologiska faser i kvantmekaniken, Aharonov & Bohm 1959

Gravitationell kollaps och rum-tid singulariteter, Penrose 1965

Topologiska fasövergångar, Kosterlitz & Thoules 1973

Topologiska materiefaser, Thouless, Kohmoto, Nightingale, den Nijs 1982

Symmetriskyddade topologiska faser, Haldane 1983

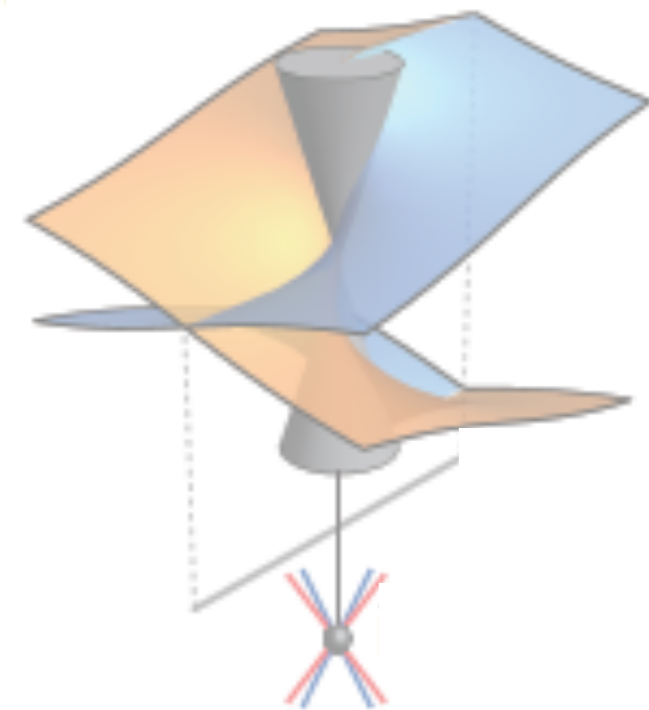
Gaugeteorier och fyrdimensionell topologi, Donaldson 1983

Topologisk kvantfältteori, Witten 1989

... och mycket mer!

Nobelpris 2020

Nobelpris 2016



Växelbruket mellan fysik och topologi har en lång historia...

Magnetiska monopoler, Dirac 1931

Kvantiserade virvlar i supraflytande helium, Onsager 1949

Topologiska faser i kvantmekaniken, Aharonov & Bohm 1959

Gravitationell kollaps och rum-tid singulariteter, Penrose 1965

Topologiska fasövergångar, Kosterlitz & Thoules 1973

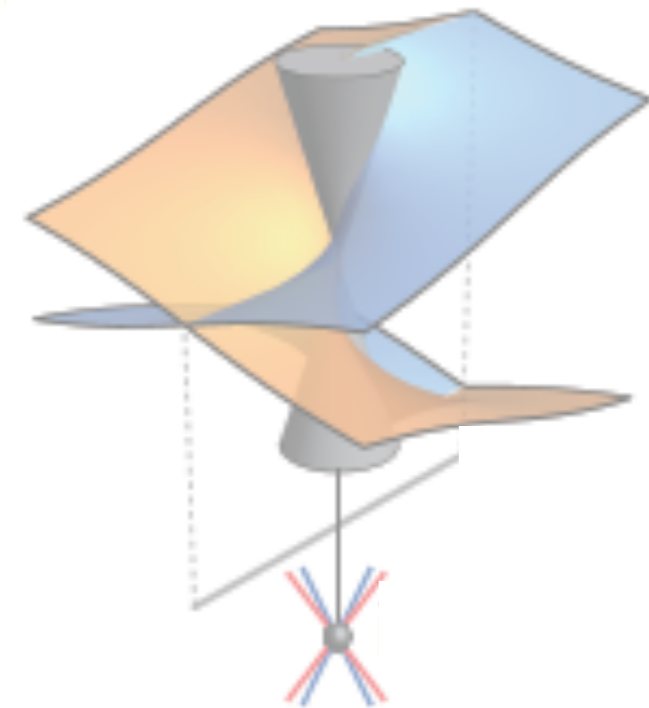
Topologiska materiefaser, Thouless, Kohmoto, Nightingale, den Nijs 1982

Symmetriskyddade topologiska faser, Haldane 1983

Gaugeteorier och fyrdimensionell topologi, Donaldson 1983

Topologisk kvantfältteori, Witten 1989

... och mycket mer!



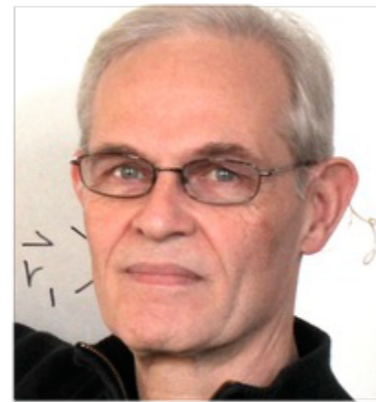
Topologiska materiefaser: TKNN invarianten



David J. Thouless



Mahito Kohmoto



M. Peter Nightingale

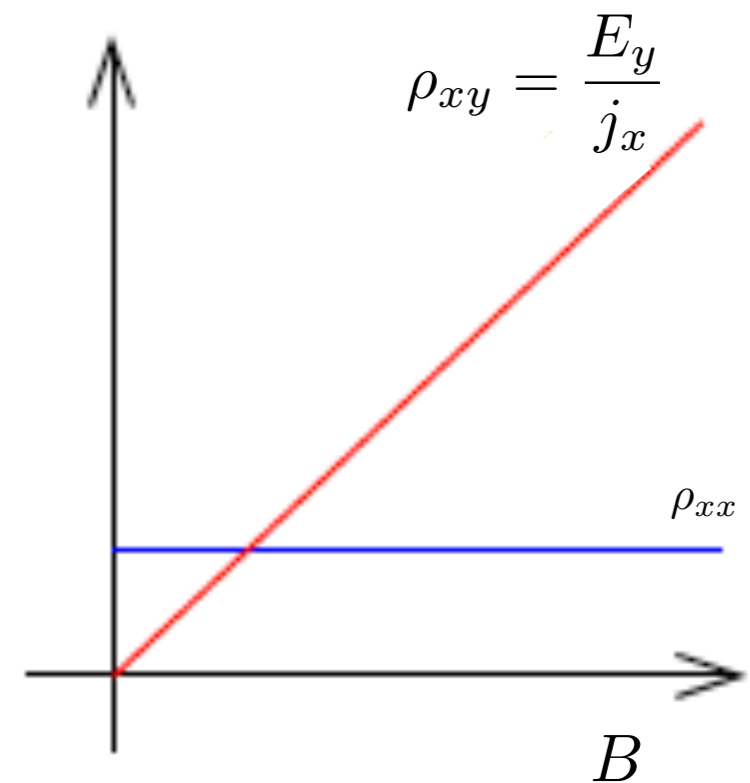
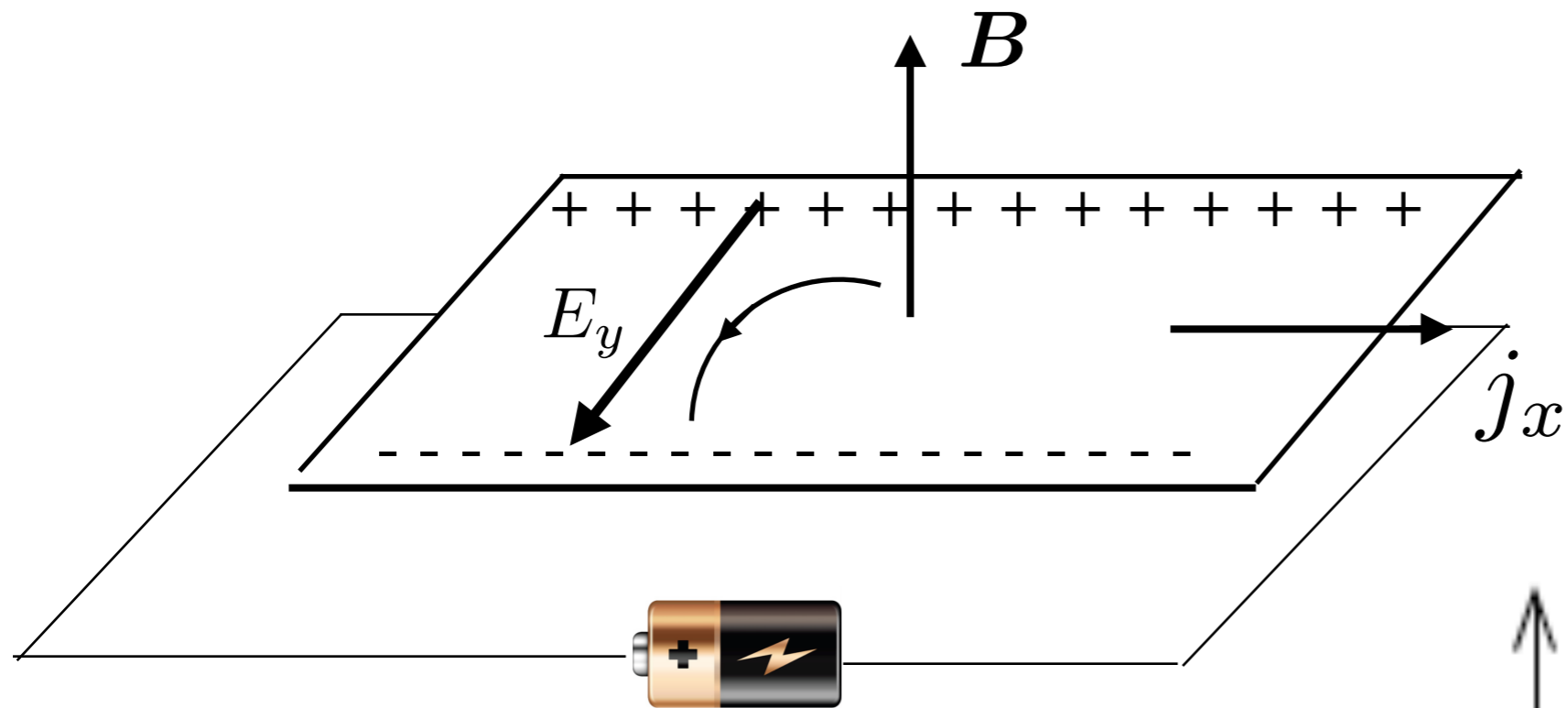


Marcel den Nijs

D. J. Thouless, M. Kohmoto, MP Nightingale, and M den Nijs.
Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential.
Physical Review Letters, 49(6):405, 1982.

Topologiska materiefaser: TKNN invarianten

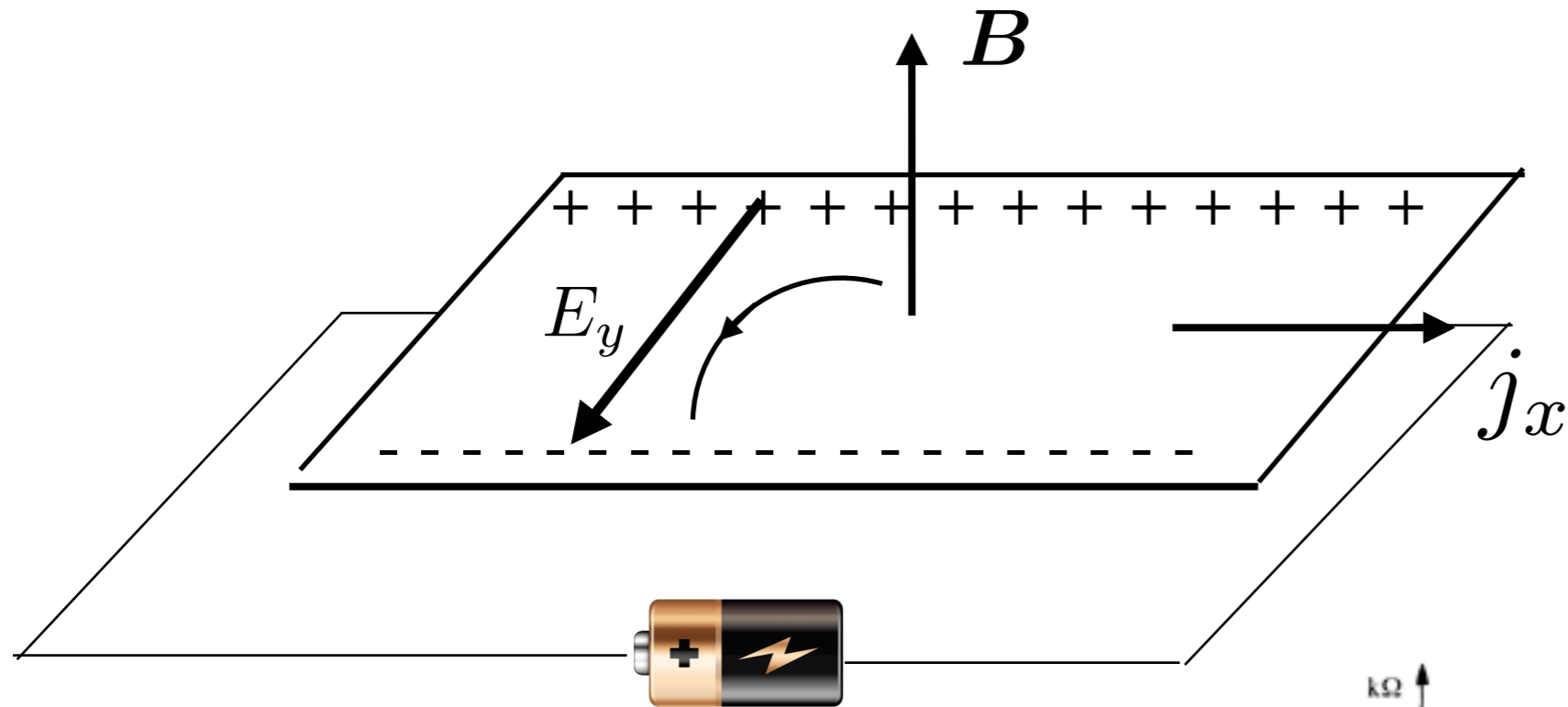
Bakgrund: Hall effekten (1878)



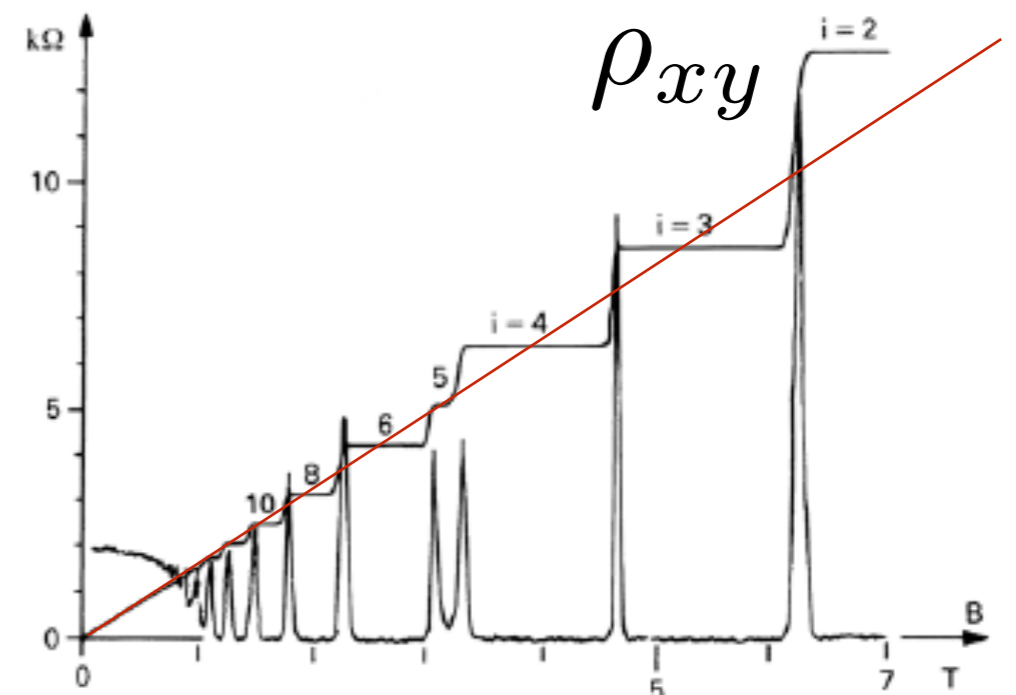
Topologiska materiefaser:TKNN invarianten

Bakgrund: **kvant** Hall effekten (1980)

$T < 4\text{K}$ (experiment)



Klaus von Klitzing
Nobelpris 1985



Topologiska materiefaser:TKNN invarianten

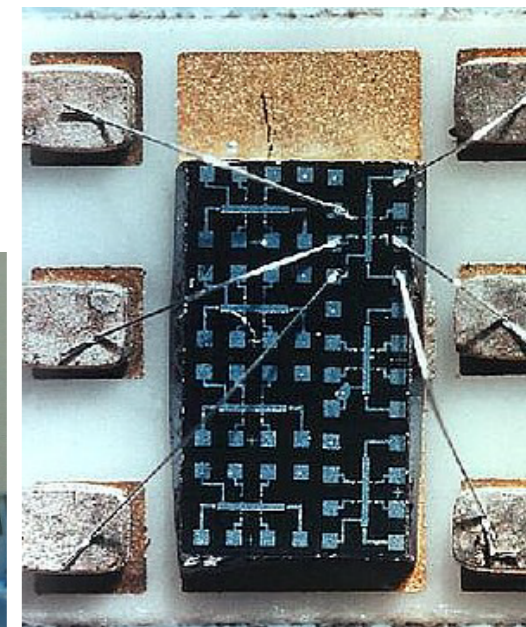
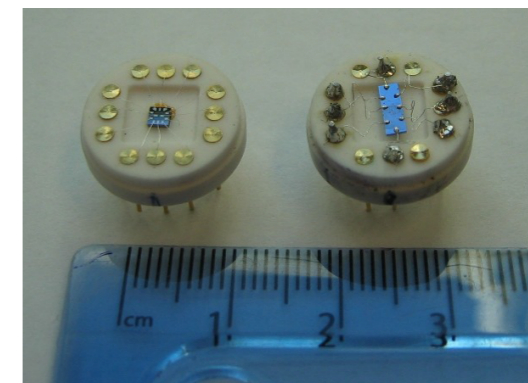
kvant Hall effekten (1980)

Experiment ger att värdet på Hall-resistiviteten ges av

$$\rho_{xy} = \frac{h}{e^2} \frac{1}{n} \pm 0.0000000001$$

heltal

oberoende av hur smutsigt materialet är, formen på provet, antal elektroner, etc...



Topologiska materiefaser: TKNN invarianten

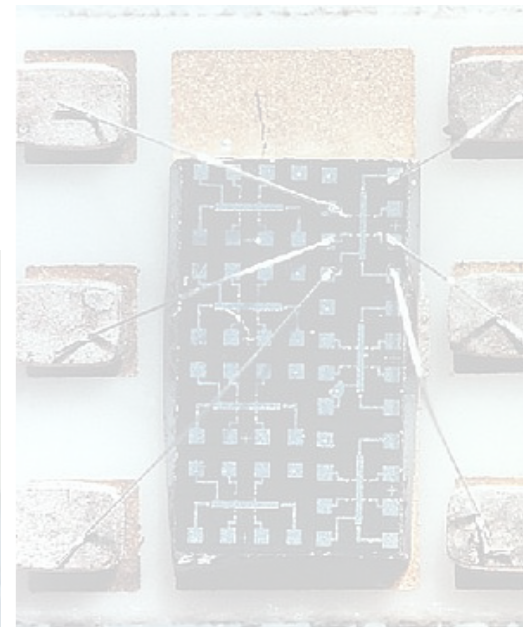
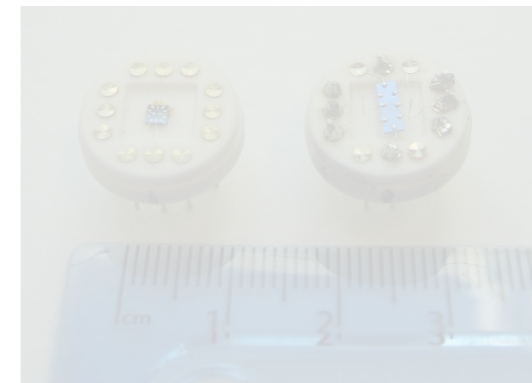
kvant Hall effekten (1980)

Experiment ger att värdet på Hall-resistiviteten ges av

$$\rho_{xy} = \frac{h}{e^2} \frac{1}{n} \pm 0.0000000001$$

oberoende av hur utsigt materiallet är, formen på provet, antal elektroner etc....

Mysterium!



Topologiska materiefaser:TKNN invarianten

Kvant Hall effekten har en *topologisk* förklaring!

”Uppvärmning”.... *Gauss-Bonnet-teoremet*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{M}} K dS = 2(1 - g)$$



Carl Friedrich Gauss
1777-1855

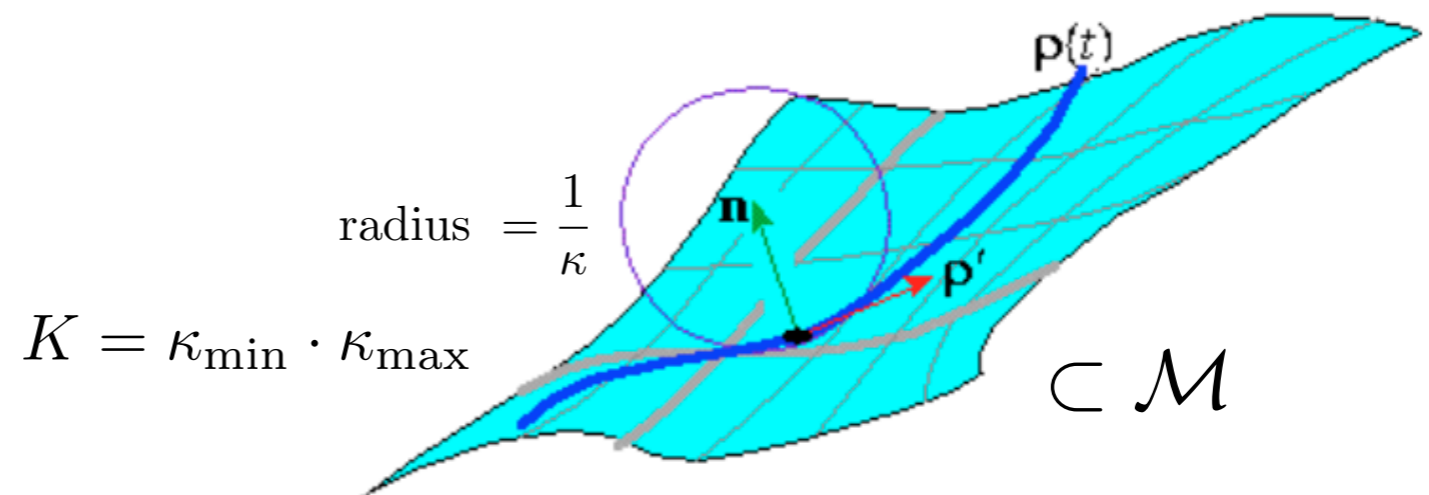


Pierre Ossian Bonnet
1819-1892

Topologiska materiefaser:TKNN invarianten

”Uppvärmning”.... *Gauss-Bonnet teoremet*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{M}} K dS = 2(1 - g)$$

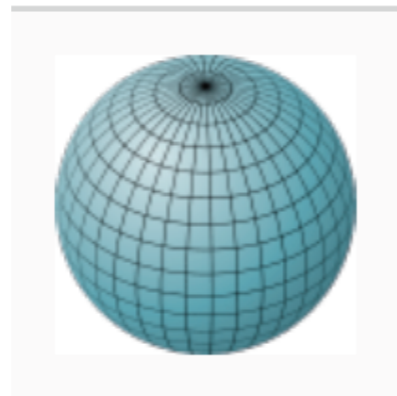


Topologiska materiefaser:TKNN invarianten

”Uppvärmning”.... *Gauss-Bonnet teoremet*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{M}} K dS = 2(1 - g)$$

$g = 0$



$g = 1$



$g = 2$



$g = 3$



Topologiska materiefaser:TKNN invarianten

”Chern teoremet”

Generaliserade Gauss-Bonnet teoremet

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{M}} \mathcal{F} \cdot d\mathbf{S} = C$$

Chern tal



Shing-Shen Chern
1911-2004

Topologiska materiefaser: TKNN invarianten

”Chern teoremet”

Generaliserade Gauss-Bonnet teoremet

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{M}} \mathcal{F} \cdot d\mathcal{S} = C$$

Chern tal

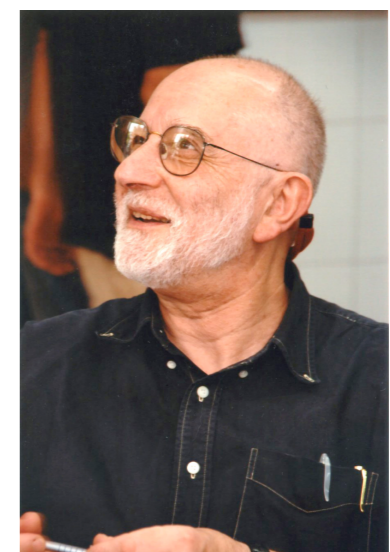
exempel: ”Berry krökning”

$$\mathcal{F}_n(\mathbf{k}) = -i \nabla_{\mathbf{k}} \times \langle u_{n,\mathbf{k}} | \nabla_{\mathbf{k}} | u_{n,\mathbf{k}} \rangle$$

mäter hur kvantmekaniska tillstånd förändras när man går runt i \mathcal{M}



Shing-Shen Chern
1911-2004



Michael Berry

Topologiska materiefaser: TKNN invarianten



David J. Thouless

Mahito Kohmoto

Peter Nightingale

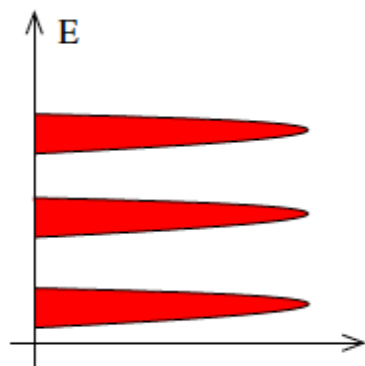
Marcel den Nijs

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{2\pi h} \sum_{n=1}^{\nu} \int_{\text{torus}} \mathcal{F}_n(\mathbf{k}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{e^2}{h} \sum_{n=1}^{\nu} C_n = \frac{e^2}{h} \nu$$

$\nu =$ antalet fyllda band

Cherntal $C_n = 1$

Recept: beräkna σ_{xy} på ett gitter (**periodisk potential**), använd Kubos formel på en torus (**magnetisk Brillouinzon**), antag fyllda energiband med gap



Topologiska materiefaser: TKNN invarianten



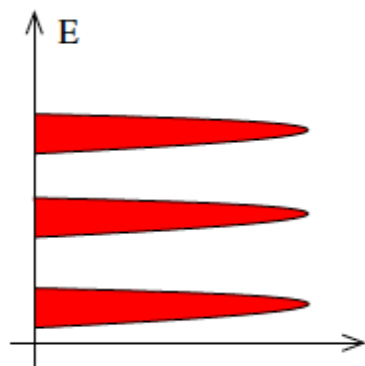
David J. Thouless Mahito Kohmoto Peter Nightingale Marcel den Nijs

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{2\pi h} \sum_{n=1}^{\nu} \int_{\text{torus}} \mathcal{F}_n(\mathbf{k}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{e^2}{h} \sum_{n=1}^{\nu} C_n = \frac{e^2}{h} \nu$$

$\nu =$ antalet fyllda band

Cherntal $C_n = 1$

Recept: beräkna σ_{xy} på ett gitter (**periodisk potential**), använd Kubos formel på en torus (**magnetisk Brillouinzon**), antag fyllda energiband med gap



Detta är en tillämpning av Chernteoremet! (Simon, 1983)

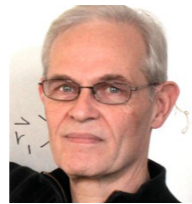
Topologiska materiefaser: TKNN invarianten



David J. Thouless



Mahito Kohmoto



Peter Nightingale



Marcel den Nijs



Kvant-Hall system uppvisar *topologiska materiefaser*. Olika Cherntal ("TKNN invarianter") svarar mot olika faser. Inget symmetribrott.

23 år senare... nästa genombrott: ”Fler topologiska materifaser!”



Charlie Kane

Gene Mele

C. Kane and E.J. Mele,
Phys. Rev. Lett. **95**, 146802 (2005)

Ny topologisk invariant för
2D system utan magnetfält!

Förutsägelse: ny topologisk
materiefas i HgTe material!



Soucheng Zhang

B. A. Bernevig, T. L. Hughes, and
S.-C. Zhang, *Science* **314**, 1757 (2006)



Laurens Molenkamp

M. König *et al.*, *Science* **318**, 766 (2007)

Observererat i HgTe kvantbrunnar!

Epilog

De teoretiska upptäckter som belönades med Nobelpriset i fysik 2016 har banat vägen för ny fysik: studiet av topologiska materiefaser och fasövergångar. Idag ett stort och aktivt forskningsområde: *Topologiska isolatorer, topologiska supraledare, topologiska metaller och halvmetaller, spinnvätskor, ...*

Centralt för teoribildning inom grundläggande fysik (*kvantsammanflätning, topologiska faser ur jämvikt, effekter från oordning och växelverkan, ...*), med spännande potential för framtida teknologier (*effektiva kvantminnen, högprecisionskretsar immuna mot defekter, topologisk spinntronic, ...*)