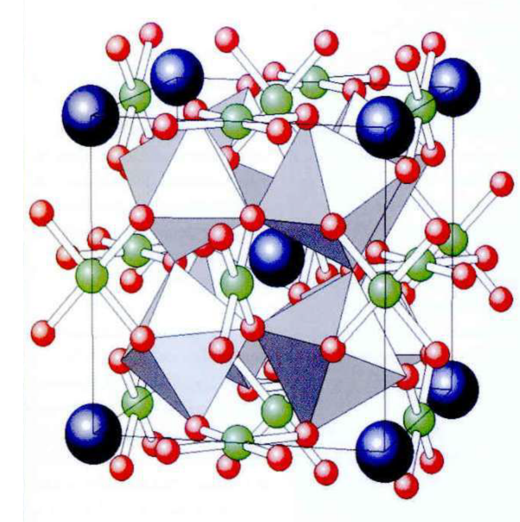
Diskreta symmetrier i fysiken
några exempel

punktgrupper (inversion, spegling,…)
rymdgrupper
tidsreversering *(varning!)*
….



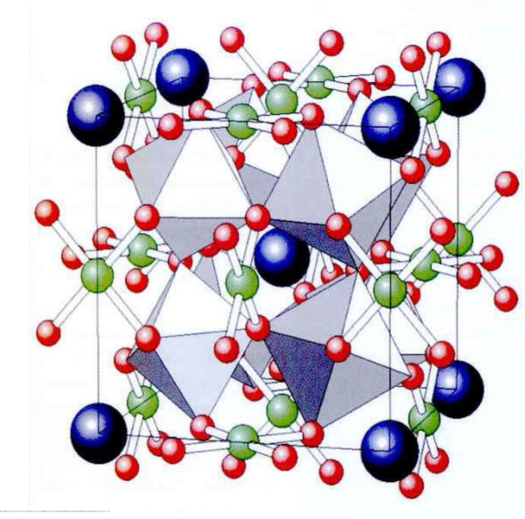
Punktgrupper: grupper av diskreta transformationer som lämnar en punkt invariant (t.ex. den cykliska gruppen C_n)

$$\mathbb{Z}_2 \simeq C_2 = \{e, a\}, \quad a^2 = e$$

Inversion = reflektion i en punkt : $\vec{r} \xrightarrow{a} -\vec{r}$

Spegling = reflektion i ett $\underbrace{\text{plan}}_{xy\text{-plan}}$: $\begin{cases} x \xrightarrow{a} x \\ y \rightarrow y \\ z \rightarrow -z \end{cases}$

Punktgrupper: grupper av diskreta transformationer
som lämnar en punkt invariant (t.ex. den cykliska gruppen C_n)



$Z_2 \simeq C_2 = \{e, a\}$, $a^2 = e$

Inversion = reflektion i en punkt : $\vec{r} \xrightarrow{a} -\vec{r}$

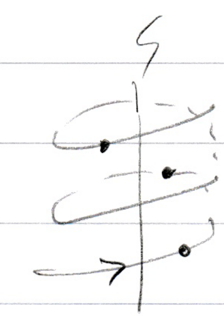
Spegling = reflektion i ett plan : $\underbrace{\text{plan}}_{xy\text{-plan}}$ $\left\{ \begin{array}{l} x \xrightarrow{a} x \\ y \to y \\ z \to -z \end{array} \right.$

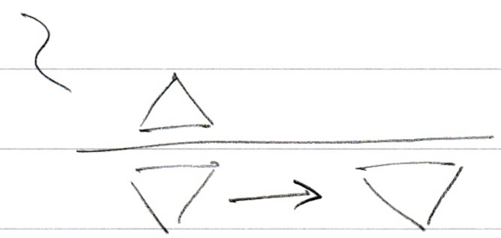
Rymdgrupper

Gruppen vars element beskriver

"Symmetri" { DISKRETA TRANSLATIONER
ROTATIONER & REFLEKTIONER } PUNKTGRUPPER (en punkt invariant)

"icke-symmetri" { SKRUVAXEL & GLIDPLANSTRANSFORMATIONER





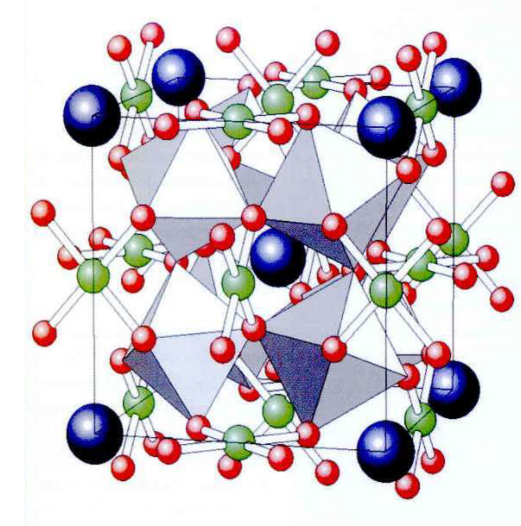
"fraktionell translation"

2 rymdgrupper i 1D
17 –"– 2D
230 –"– 3D

kombinationer av 32 kristallografiska punktgrupper
och 14 Bravais gitter + "skruv" & "glidplan"

genererar translationer $\vec{R} = n_1\vec{a}_1 + n_2\vec{a}_2 + n_3\vec{a}_3$

Punktgrupper: grupper av diskreta transformationer som lämnar en punkt invariant (t.ex. den cykliska gruppen C_n)



$Z_2 \simeq C_2 = \{e, a\}$, $a^2 = e$

Inversion = reflektion i en punkt: $\vec{r} \xrightarrow{a} -\vec{r}$

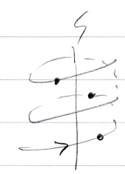
Spegling = reflektion i ett $\underbrace{\text{plan}}_{xy\text{-plan}}$: $\begin{cases} x \xrightarrow{a} x \\ y \to y \\ z \to -z \end{cases}$

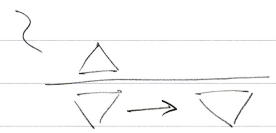
Rymdgrupper

Gruppen vars element beskriver

"Symmorfa" { DISKRETA TRANSLATIONER
ROTATIONER & REFLEKTIONER } PUNKTGRUPPER (en punkt invariant)

"icke-symmorfa" { SKRUVAXEL & GLIDPLANSTRANSFORMATIONER





"fraktionell translation"

2 rymdgrupper i 1D
17 -"- 2D
230 -"- 3D

kombinationer av 32 kristallografiska punktgrupper och 14 Bravais gitter + "skruv" & "glidplan"

genererar translationer $\vec{R} = n_1\vec{a}_1 + n_2\vec{a}_2 + n_3\vec{a}_3$

Wikipedia har utmärkta artiklar om
punktgrupper: http://www.wikiwand.com/en/Point_group
rymdgrupper: http://www.wikiwand.com/en/Space_group

föreläsning 16/12 (I)

En central diskret symmetri i fysiken :
TIDSREVERSERING

Fysikens fundamentala lagar är invarianta under $t \to -t$

Men ... tiden har en riktning ! Från förflutet till framtid !

?

"Gömd tidspil"? Entropi? Big Bang?...

TIDSREVERSERING är en lurig symmetritransformation!

$$t \to -t \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \vec{r} \to \vec{r} \\ \vec{p} \to -\vec{p} \\ \vec{L} \to -\vec{L} \\ \vec{E} \to \vec{E} \\ \vec{B} \to -\vec{B} \end{cases}$$

Klassisk fysik : tidsreversering är inte en kanonisk transformation

Poisson parentes

$$\{x_i, p_j\} \xrightarrow{t \to -t} -\{x_i, p_j\}$$

Kvantmekanik : Schrödingerekvationen är inte invariant under $t \to -t$

$$H\Psi(t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi(t) \underset{t \to -t}{\Longrightarrow} H\Psi(-t) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi(-t)$$

Tidsreversering är en lurig symmetritransformation!

Hur definiera **kvantmekanisk** tidsreversing så att vi får tillbaks den förväntade tidsreversingsinvariansen?

Kvantmekanik : Schrödingerekvationen är inte invariant under $t \to -t$

$$H\Psi(t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi(t) \underset{t \to -t}{\Longrightarrow} H\Psi(-t) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(-t)$$

Hur definiera **kvantmekanisk** tidsreversing så att vi
får tillbaks den förväntade tidsreversingsinvariansen ?

Vi måste kombinera transformationen $t \longrightarrow -t$
med en **"intern" transformation**, kalla den T !

$$T\left(H\Psi(-t)\right) = T\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(-t)\right)$$

$$\underbrace{(THT^{-1})(T}_{=1}\Psi(-t)) = \underbrace{T(-i\hbar)}_{=i\hbar \text{ om } T = K = \text{komplexkonjugering}}\frac{\partial}{\partial t}T\Psi(-t)$$

$$\Rightarrow \underbrace{H^*}_{H'}\underbrace{\Psi^*(-t)}_{\Psi'(t)} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\Psi^*(-t)}_{\Psi'(t)}$$

Schrödingerekvationen invariant = "kovariant" ("samma form") under $\underbrace{\text{tidsreversering}}_{t \to -t \text{ och } K}$!

Eugene Wigner
1902 - 1995

Wigners teorem (1932):

Symmetritransformationer i ett Hilbertrum
är antingen **unitära** eller **antiunitära**

$\langle Su|Sv\rangle = \langle u|v\rangle$ $\langle Su|Sv\rangle = \langle v|u\rangle$

En antiunitär operator S kan skrivas som

$S = UK$

UNITÄR OPERATOR
(= matris i en rep av en symmetrigrupp)

KOMPLEX KONJUGERING !

$K^2 = 1$ $(\Rightarrow K = K^{-1})$

Wigners teorem (1932):

Symmetritransformationer i ett Hilbertrum
är antingen **unitära** eller **antiunitära**

$\langle Su|Sv\rangle = \langle u|v\rangle$ $\langle Su|Sv\rangle = \langle v|u\rangle$

En antiunitär operator S kan skrivas som

$$S = UK$$

UNITÄR OPERATOR
(= matris i en rep av en symmetrigrupp)

KOMPLEX KONJUGERING !
$K^2 = 1$ ($\Rightarrow K = K^{-1}$)

Den operator i kvantmekaniken som implementerar TIDSREVERSERING är antiunitär:

$$T = U_T K$$

Unitär operator som beror på vilken typ av teori som man jobbar med

Wigners teorem (1932):

Symmetritransformationer i ett Hilbertrum
är antingen **unitära** eller **antiunitära**

$\langle Su|Sv\rangle = \langle u|v\rangle$ $\qquad$ $\langle Su|Sv\rangle = \langle v|u\rangle$

En antiunitär operator S kan skrivas som

$$S = UK$$

UNITÄR OPERATOR
(= matris i en rep
av en symmetrigrupp)

KOMPLEX KONJUGERING!
$K^2 = 1$ ($\Rightarrow K = K^{-1}$)

Den operator i kvantmekaniken som implementerar
TIDSREVERSERING är antiunitär:

$$T = U_T K$$

Unitär operator som
beror på vilken typ
av teori som man jobbar med

$U_T = \mathbf{1}$ i exemplet med Schrödingerekvationen
OK för system utan spinn!

Låt oss försöka förstå tidsreversering av kvantmekaniskt spinn $(=\frac{1}{2}\hbar)$ hos fermioner (materiens byggstenar!)

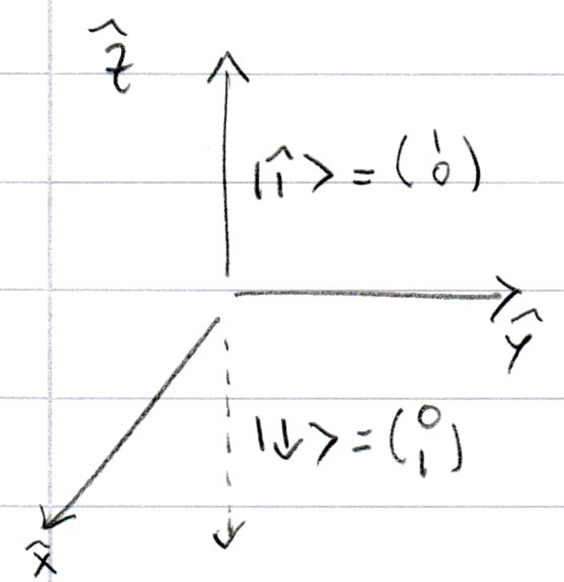
$\uparrow$ $\hbar \equiv 1$ ("naturliga enheter")

En halvtalig spinnoperator representeras av Paulimatrisen

$$\vec{S} = \frac{1}{2}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) = (S_z, S_y, S_z)$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\hat{z}$ = KVANTISERINGSAXEL (konvention)



$$\begin{cases} S_z|\uparrow\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ S_z|\downarrow\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Tidsreversering av Paulimatriserna:

$$T\sigma_i T^{-1} = -\sigma_i \quad , \quad i = x, y, z \qquad (1)$$

$T = U_T K$

ty spinn byter tecken
under tidsreversering

$$T^{-1} = (U_T K)^{-1} = K^{-1} U_T^{-1} = K U_T^{-1} \qquad (2)$$

$$K\sigma_x K^{-1} = \sigma_x K K^{-1} = \sigma_x \qquad (3)$$

$$K\sigma_z K^{-1} = \sigma_z K K^{-1} = \sigma_z \qquad (4)$$

$$K\sigma_y K^{-1} = K\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}K^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} K K^{-1} = -\sigma_y \qquad (5)$$

PÅSTÅENDE (1) – (5) $\Rightarrow \boxed{U_T = e^{i\phi}\sigma_y}$

kan väljas = 1

BEVIS $T\sigma_x T^{-1} = U_T K \sigma_x K U_T^{-1}$

$= U_T \sigma_x (KK)^2 U_T^{-1}$

$= \sigma_y \sigma_x \sigma_y^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$= -\sigma_x$ ok!

$T\sigma_y T^{-1} = U_T K \sigma_y K U_T^{-1} = U_T(-\sigma_y)U_T^{-1}$

$= \sigma_y(-\sigma_y)\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$

$= -\sigma_y$ OK!

$T\sigma_z T^{-1} = \text{- - - - - - -}$ på samma sätt

$= -\sigma_z$ OK!

PÅSTÅENDE (1) – (5) $\Rightarrow$ $U_T = e^{i\phi}\sigma_y$

kan väljas = 1

BEVIS

$$T\sigma_x T^{-1} = U_T K \sigma_x K U_T^{-1}$$
$$= U_T \sigma_x (KK)^2 U_T^{-1}$$
$$= \sigma_y \sigma_x \sigma_y^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= -\sigma_x \quad \text{ok!}$$

$$T = \sigma_y K$$

$$T\sigma_y T^{-1} = U_T K \sigma_y K U_T^{-1} = U_T(-\sigma_y)U_T^{-1}$$
$$= \sigma_y(-\sigma_y)\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$
$$= -\sigma_y \quad \text{OK!}$$

$$T\sigma_z T^{-1} = \text{- - - - - -} \quad \text{på samma sätt}$$
$$= -\sigma_z \quad \text{OK!}$$

Hur transformerar $|\uparrow\rangle$ och $|\downarrow\rangle$ under $\widetilde{T}$?

$$\begin{cases} \widetilde{T}|\uparrow\rangle = \sigma_y K \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = i|\downarrow\rangle \\ \widetilde{T}|\downarrow\rangle = \sigma_y K \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -i|\uparrow\rangle \end{cases}$$

populärt val!

Om vi istället väljer fasfaktorn $e^{i\phi} = -i$ i definitionen av $U_{\widetilde{T}}$ så får vi $\widetilde{T}|\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle$ och $\widetilde{T}|\downarrow\rangle = -|\uparrow\rangle$.

Låt oss undersöka T^2 !

$$T = \sigma_y K = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} K$$

$$T^2 = (\sigma_y K)(\sigma_y K) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} K \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} K$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} K^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= -\mathbb{1} \quad !$$

Låt oss undersöka T^2 !

$$T = \sigma_y K = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} K$$

$$T^2 = (\sigma_y K)(\sigma_y K) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} K \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} K$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} K^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= -\mathbb{1} \quad !$$

$$\Downarrow$$

$$T^2 |\uparrow\rangle = - |\uparrow\rangle$$

$$T^2 |\downarrow\rangle = - |\downarrow\rangle$$

FYSIKENS VIKTIGASTE MINUSTECKEN !

$$T^2|\uparrow\rangle = -|\uparrow\rangle$$

$$T^2|\downarrow\rangle = -|\downarrow\rangle$$

FYSIKENS VIKTIGASTE MINUSTECKEN!

Symmetrigruppen för spinn är SU(2). SU(2) har en SPINOR REPRESENTATION som definierande rep. för spinn-$1/2$

Spinorer transformerar *inte* som vektorer!

Sensmoral om tidsreversing i kvantmekaniken:

$$t \to -t \;\&\; |\psi\rangle \to U_T \mathcal{K} |\psi\rangle$$

unitär
(beror på teorin)

komplexkonjugering

Pauli och Bohr leker med en snurra i Köpenhamn
för att försöka förstå sig på spinn (1925)

Vi vill se tillämpningar på fundamentala ortogonalitetsteoremet!

Fundamentala ortogonalitetsteoremet

$$\sum_g D^{(\mu)}_{ir}(g) D^{(\nu)*}_{js}(g) = \frac{[G]}{n_\mu} \delta^{\mu\nu} \delta_{ij} \delta_{rs}$$

$$\sum_{i=1}^{m} n_i^2 = [G]$$

ortogonalitet för karaktärer

\# konjugatklasser K

$$\sum_{i=1}^{K} k_i \chi_i^{(\mu)} \chi_i^{(\nu)*} = [G] \delta_{\mu\nu}$$

\# gruppelement i konjugatklass i

$$r = K$$

\# irreps = # konjugatklasser

"Masterformeln"

$$c_\nu = \frac{1}{[G]} \sum_{i=1}^{K} k_i \chi_i^{(\nu)*} \chi_i$$

multipliciteten av irrep $D^{(\nu)}$ i den givna rep:en D med karaktärer $\chi_1^{(\nu)}, \chi_2^{(\nu)}, \dots, \chi_k^{(\nu)}$ resp. $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_k$:

$$D = \bigoplus_{\nu=1}^{r} c_\nu D^{(\nu)}$$

\# gruppelement i konjugatklass k_i

Fundamentala ortogonalitetsteoremet

$$\sum_g D^{(\mu)}_{ir}(g)\, D^{(\nu)*}_{js}(g) = \frac{[G]}{n_\mu}\,\delta^{\mu\nu}\,\delta_{ij}\,\delta_{rs}$$

$$\sum_{i=1}^{m} n_i^2 = [G]$$

ortogonalitet för karaktärer

konjugatklasser K

$$\sum_{i=1}^{K} k_i\, \chi_i^{(\mu)}\, \chi_i^{(\nu)*} = [G]\,\delta_{\mu\nu}$$

gruppelement i konjugatklass i

$$r = K$$

irreps = # konjugatklasser

”Masterformeln”

$$c_\nu = \frac{1}{[G]}\sum_{i=1}^{K} k_i\, \chi_i^{(\nu)*}\, \chi_i$$

multipliciteten av irrep $D^{(\nu)}$ i den givna rep:en D med karaktärer $\chi_1^{(\nu)}, \chi_2^{(\nu)}, \dots, \chi_K^{(\nu)}$ resp. $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_K$:

$$D = \bigoplus_{\nu=1}^{r} c_\nu D^{(\nu)}$$

gruppelement i konjugatklass k_i

"Masterformeln"

$$c_\nu = \frac{1}{[G]} \sum_{i=1}^{K} k_i \chi_i^{(\nu)*} \chi_i$$

Masterformeln för en kontinuerlig grupp

$$= \frac{1}{[G]} \sum_g \chi^{(\nu)*}(g) \chi(g) \longrightarrow \frac{1}{\Lambda} \int_0^\Lambda d\lambda\, \chi^{(\nu)*}(g_\lambda) \chi(g_\lambda)$$

"Masterformeln"

$$c_\nu = \frac{1}{[G]} \sum_{i=1}^{K} k_i \, \chi_i^{(\nu)*} \chi_i$$

Masterformeln för en kontinuerlig grupp

$$= \frac{1}{[G]} \sum_g \chi^{(\nu)*}(g)\, \chi(g) \longrightarrow \frac{1}{\Lambda} \int_0^{\Lambda} d\lambda \, \chi^{(\nu)*}(g_\lambda)\, \chi(g_\lambda)$$

Vanligaste (och viktigaste!) typ av tillämpning i fysiken:

$$D = D^{(\alpha)} \otimes D^{(\beta)} = \bigoplus_{\nu=1}^{m} c_\nu D^{(\nu)}$$

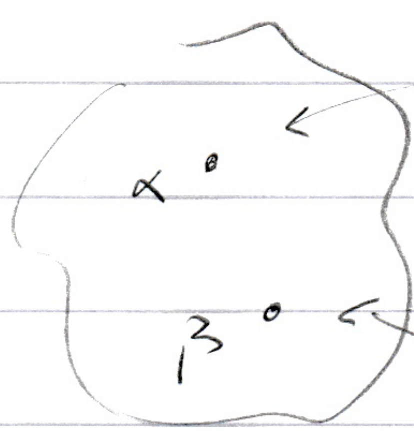
EXEMPEL

Betrakta 2-dim definierande rep av $SU(2)$

2-dim G modul med bas $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

spinntillstånd för spin-1/2 partikel

Givet två spin-1/2 partiklar "α" och "β" så kan vi bilda två G-moduler $V^{(\alpha)}$ och $V^{(\beta)}$ med bastillstånd $\{|\uparrow\rangle_\alpha, |\downarrow\rangle_\alpha\}$ resp. $\{|\uparrow\rangle_\beta, |\downarrow\rangle_\beta\}$.



$$|\varphi_s\rangle_\alpha = a_\alpha |\uparrow\rangle_\alpha + b_\alpha |\downarrow\rangle_\alpha$$

Spinntillstånd

$$|\varphi_s\rangle_\beta = a_\beta |\uparrow\rangle_\beta + b_\beta |\downarrow\rangle_\beta$$

EXEMPEL

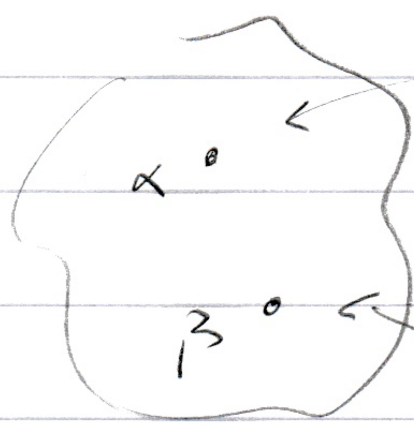
Betrakta 2-dim definierande rep av $SU(2)$

2-dim G modul med bas $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

spinntillstånd för spin-½ partikel

Givet två spin-½ partiklar "α" och "β" så kan vi bilda två G-moduler $V^{(\alpha)}$ och $V^{(\beta)}$ med bastillstånd $\{|\uparrow\rangle_\alpha, |\downarrow\rangle_\alpha\}$ resp. $\{|\uparrow\rangle_\beta, |\downarrow\rangle_\beta\}$.

i vilken irrep:en $D^{(\alpha)}$ verkar



$$|\varphi_s\rangle_\alpha = a_\alpha |\uparrow\rangle_\alpha + b_\alpha |\downarrow\rangle_\alpha$$

Spinntillstånd

$$|\varphi_s\rangle_\beta = a_\beta |\uparrow\rangle_\beta + b_\beta |\downarrow\rangle_\beta$$

EXEMPEL

Betrakta 2-dim definierande rep av $SU(2)$

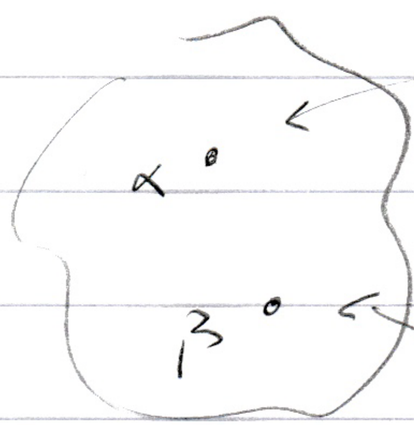
2-dim G modul med bas $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

spinntillstånd för spin-$1/2$ partikel

i vilken irrep:en $D^{(\beta)}$ verkar

Givet två spin-$1/2$ partiklar "α" och "β" så kan vi bilda två G-moduler $V^{(\alpha)}$ och $V^{(\beta)}$ med bastillstånd $\{|\uparrow\rangle_\alpha, |\downarrow\rangle_\alpha\}$ resp. $\{|\uparrow\rangle_\beta, |\downarrow\rangle_\beta\}$.

i vilken irrep:en $D^{(\alpha)}$ verkar



$$|\varphi_s\rangle_\alpha = a_\alpha |\uparrow\rangle_\alpha + b_\alpha |\downarrow\rangle_\alpha$$

Spinntillstånd

$$|\varphi_s\rangle_\beta = a_\beta |\uparrow\rangle_\beta + b_\beta |\downarrow\rangle_\beta$$

Spinntillstånd för det kombinerade systemet:

$$|\varphi_s\rangle_\alpha \otimes |\varphi_s\rangle_\beta = \begin{pmatrix} a_\alpha \\ b_\alpha \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a_\beta \\ b_\beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_\alpha \begin{pmatrix} a_\beta \\ b_\beta \end{pmatrix} \\ b_\alpha \begin{pmatrix} a_\beta \\ b_\beta \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_\alpha a_\beta \\ a_\alpha b_\beta \\ b_\alpha a_\beta \\ b_\alpha b_\beta \end{pmatrix}$$

$D = D^{(\alpha)} \otimes D^{(\beta)}$ verkar på en 4-dim. G-modul.

$\Rightarrow$ D består av 4×4 matriser

D är REDUCERBAR om det finns en bas i den 4-dim G-modulen i vilken ALLA matriser i D är blockdiagonala

$$\left(\begin{array}{c|c} \square & 0 \\ \hline 0 & \square \end{array}\right)$$

Varje block svarar mot en irrep (enligt definition!)

$$\underbrace{D^{(s=0)}}_{\substack{\text{1-dim} \\ \text{trivial} \\ \text{irrep}}}, \quad \underbrace{D^{(s=1/2)}}_{\substack{\text{2-dim} \\ \text{definierande} \\ \text{rep av } SU(2)}}, \quad \underbrace{D^{(s=1)}}_{\text{3-dim}}, \quad \underbrace{D^{(s=3/2)}}_{\text{4-dim}}, \ \ldots$$

($D^{(\alpha)}$ och $D^{(\beta)}$ är två kopior av $D^{(s=1/2)}$)

$$\underbrace{D^{(s=0)}}_{\substack{\text{1-dim}\\ \text{trivial}\\ \text{irrep}}}, \quad \underbrace{D^{(s=1/2)}}_{\substack{\text{2-dim}\\ \text{definierande}\\ \text{rep av } SU(2)}}, \quad \underbrace{D^{(s=1)}}_{\text{3-dim}}, \quad \underbrace{D^{(s=3/2)}}_{\text{4-dim}}, \ldots$$

($D^{(\alpha)}$ och $D^{(\beta)}$ är två kopior av $D^{(s=1/2)}$)

$$D = D^{(\alpha)} \otimes D^{(\beta)} = \bigoplus_s c_s D^{(s)} = D^{(s=0)} \oplus D^{(s=1)}$$

c_s: multiplicitetn av $D^{(s)}$ i D från MASTERFORMELN ✓

$$\begin{cases} c_{s=0} = 1 \\ c_{s=1/2} = 0 \\ c_{s=1} = 1 \\ c_{s \geq 3/2} = 0 \end{cases}$$

$$\underbrace{D^{(s=0)}}_{\substack{\text{1-dim}\\ \text{trivial}\\ \text{irrep}}},\quad \underbrace{D^{(s=1/2)}}_{\substack{\text{2-dim}\\ \text{definierande}\\ \text{rep av } SU(2)}},\quad \underbrace{D^{(s=1)}}_{\text{3-dim}},\quad \underbrace{D^{(s=3/2)}}_{\text{4-dim}},\ \ldots$$

($D^{(\alpha)}$ och $D^{(\beta)}$ är två kopior av $D^{(s=1/2)}$)

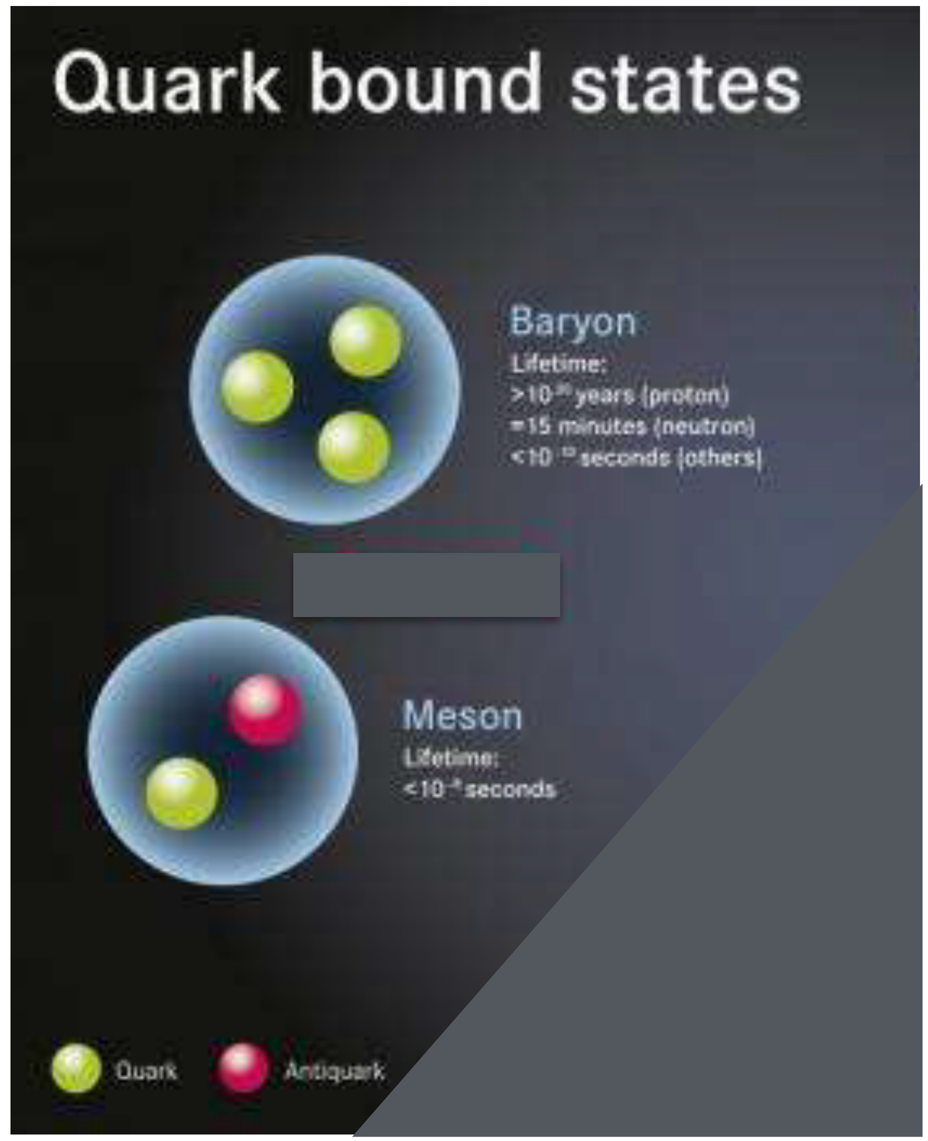
$$D = D^{(\alpha)} \otimes D^{(\beta)} = \bigoplus_S c_S D^{(S)} = D^{(S=0)} \oplus D^{(S=1)}$$

multiplíciteten av $D^{(S)}$ i D från MASTERFORMELN ✓

$$\begin{cases} c_{S=0} = 1 \\ c_{S=1/2} = 0 \\ c_{S=1} = 1 \\ c_{S\geq 3/2} = 0 \end{cases}$$

Totala spinnet för ett system med två spinn-1/2 partiklar är S=0 (singlet) eller S=1 (triplet)

En annan tillämpning
av ”Masterformeln”:



SU(2), KVARKAR & ISOSPINN

NUKLEONER

$$\begin{cases} |p\rangle = |\psi\rangle \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{isospinn} \uparrow \\ |n\rangle = |\psi\rangle \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \downarrow \end{cases}$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

kallas "isospinnkomponenter" och bildar en SU(2) Lie algebra

$$\begin{cases} I_3|p\rangle = I_3|\psi\rangle \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}|\psi\rangle \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ I_3|n\rangle = I_3|\psi\rangle \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}|\psi\rangle \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

KVARKAR: "up" (u), "down" (d), "charm" (c),
"strange" (s), "top" (t), "bottom" (b)

$$\begin{cases} |u\rangle = |\psi_q\rangle \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{I}_3 |u\rangle = \frac{1}{2}|u\rangle \\ |d\rangle = |\psi_q\rangle \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{I}_3 |d\rangle = -\frac{1}{2}|d\rangle \end{cases}$$

QCD (TEORIN FÖR STARK VÄXELVERKAN) ÄR INVARIANT UNDER ISOSPINNTRANSFORMATIONER

$$[H, \hat{I}_j] = 0 \quad j=1,2,3 \quad \Rightarrow \quad U_{\hat{n}}(\varphi) H U_{\hat{n}}^{-1}(\varphi) = H$$

(effektiv) QCD Hamiltonian

$$U_{\hat{n}}(\varphi) = e^{-\frac{1}{2} i \vec{\hat{I}} \cdot \hat{n} \varphi}$$

$$\vec{\hat{I}} \cdot \hat{n} = \hat{I}_1 n_1 + \hat{I}_2 n_2 + \hat{I}_3 n_3$$

$$|\hat{n}| = 1$$

$$\begin{cases} |p\rangle & \text{består av } 2\,|u\rangle \text{ och } 1\,|d\rangle \\ |n\rangle & \quad -''- \quad 1\,|u\rangle \text{ och } 2\,|d\rangle \end{cases}$$

$$|u\rangle_1 \otimes |u\rangle_2 \otimes \overset{|d\rangle_3}{\cancel{|u\rangle_3}} = |\psi_q\rangle_1 \otimes |\psi_q\rangle_2 \otimes |\psi_q\rangle_3 \otimes \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_2 \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_3}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}_{2\&3} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$2^3 = 8$ KOMPONENTER!?

MEN ISOSPINNTILLSTÅNDEN FÖR

$|p\rangle$ OCH $|n\rangle$ HAR TVÅ KOMPONENTER!

$$\begin{cases} |p\rangle \text{ består av } 2\,|u\rangle \text{ och } 1\,|d\rangle \\ |n\rangle \quad \text{—"—} \quad 1\,|u\rangle \text{ och } 2\,|d\rangle \end{cases}$$

$$|u\rangle_1 \otimes |u\rangle_2 \otimes \overset{|d\rangle_3}{\cancel{|u\rangle_3}} = |\psi_q\rangle_1 \otimes |\psi_q\rangle_2 \otimes |\psi_q\rangle_3 \otimes \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_2 \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_3}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}_{2\&3} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

?

$2^3 = 8$ KOMPONENTER !?

MEN ISOSPINNTILLSTÅNDEN FÖR

$|p\rangle$ OCH $|n\rangle$ HAR TVÅ KOMPONENTER!

$$\begin{cases} |p\rangle \text{ består av } 2\,|u\rangle \text{ och } 1\,|d\rangle \\ |n\rangle \quad \text{—"—} \quad 1\,|u\rangle \text{ och } 2\,|d\rangle \end{cases}$$

$$|u\rangle_1 \otimes |u\rangle_2 \otimes \overset{|d\rangle_3}{\cancel{|u\rangle_3}} = |\psi_q\rangle_1 \otimes |\psi_q\rangle_2 \otimes |\psi_q\rangle_3 \otimes \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_2 \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_3}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}_{2\&3} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Masterformeln!

?

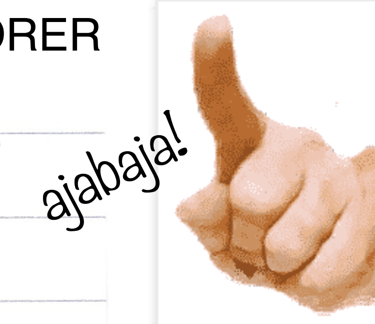
$2^3 = 8$ KOMPONENTER!?

MEN ISOSPINNTILLSTÅNDEN FÖR

$|p\rangle$ OCH $|n\rangle$ HAR TVÅ KOMPONENTER!

Masterformeln!

ISOSPINNFAKTORERNA AV $|u\rangle_1, |u\rangle_2, |u\rangle_3$ ÄR ~~VEKTORER~~ SPINORER

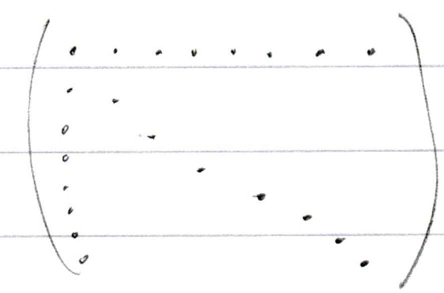


I G-MODULER V_1, V_2, V_3 I VILKA SU(2) IRREPS $D^{(1)}, D^{(2)}, D^{(3)}$ VERKAR.

$D^{(1)}, D^{(2)}, D^{(3)}$ ÄR EKVIVALENTA (TRE KOPIOR AV DEN DEFINIERANDE REP:EN TILL SU(2))

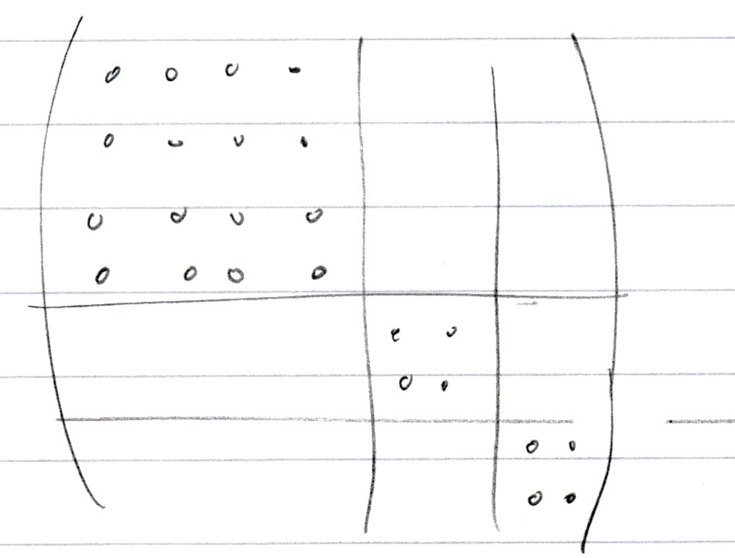
BILDA REP:EN SOM VERKAR I $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$:

$$D = D^{(1)} \otimes D^{(2)} \otimes D^{(3)} =$$



8x8 matriser

MASTERFORMELN →



$$= D_{\Delta} \; \cancel{\otimes} \; \oplus \; D_{\text{NUKLEON}} \; \cancel{\otimes} \; \oplus \; D_{\Delta'}$$

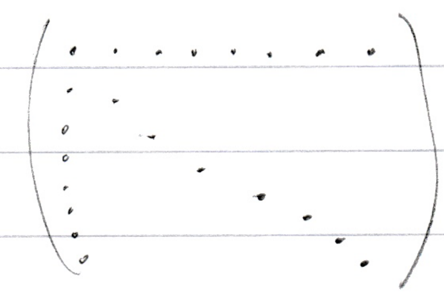
Masterformeln!

ISOSPINNFAKTORERNA AV $|u\rangle_1, |u\rangle_2, |u\rangle_3$ ÄR ~~VEKTORER~~ SPINORER I G-MODULER V_1, V_2, V_3 I VILKA $SU(2)$ IRREPS $D^{(1)}, D^{(2)}, D^{(3)}$ VERKAR.

$D^{(1)}, D^{(2)}, D^{(3)}$ ÄR EKVIVALENTA (TRE KOPIOR AV DEN DEFINIERANDE REP:EN TILL $SU(2)$)

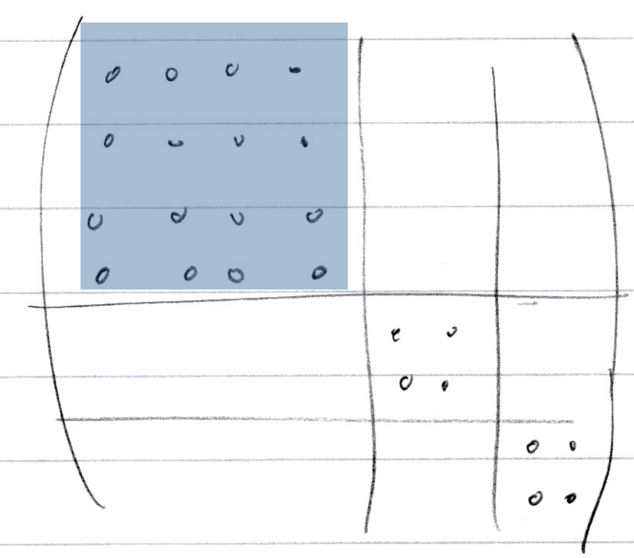
BILDA REP:EN SOM VERKAR I $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$:

$$D = D^{(1)} \otimes D^{(2)} \otimes D^{(3)} =$$



8x8 matriser

MASTERFORMELN



4-dim irrep i en SU(2)-modul
som spänns upp av isospinntillstånden
för en *Δ-resonans*

$$= D_{\Delta} \cancel{\otimes}\oplus D_{\text{NUKLEON}} \cancel{\otimes}\oplus D_{\Delta'}$$

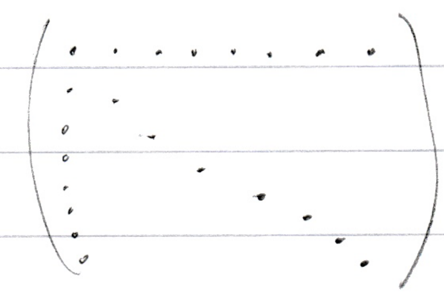
Masterformeln!

ISOSPINNFAKTORERNA AV $|u\rangle_1, |u\rangle_2, |u\rangle_3$ ÄR ~~VEKTORER~~ SPINORER I G-MODULER V_1, V_2, V_3 I VILKA SU(2) IRREPS $D^{(1)}, D^{(2)}, D^{(3)}$ VERKAR.

$D^{(1)}, D^{(2)}, D^{(3)}$ ÄR EKVIVALENTA (TRE KOPIOR AV DEN DEFINIERANDE REP:EN TILL SU(2))

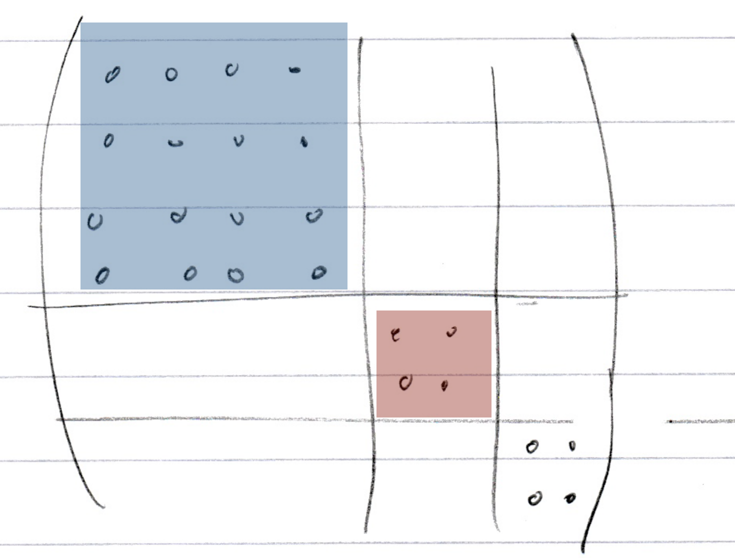
BILDA REP:EN SOM VERKAR I $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$:

$$D = D^{(1)} \otimes D^{(2)} \otimes D^{(3)} =$$



8x8 matriser

MASTERFORMELN



4-dim SU(2) irrep som spänns upp av isospinntillstånden för en *Δ-resonans* (med $I_z = -3/2, -1/2, 1/2, 3/2$)

2-dim SU(2) irrep som spänns upp av isospinntillstånden för en *nukleon* (med $I_z = -1/2, 1/2$)

$$= D_{\Delta} \cancel{\otimes} \oplus D_{\text{NUKLEON}} \cancel{\otimes} \oplus D_{\Delta'}$$

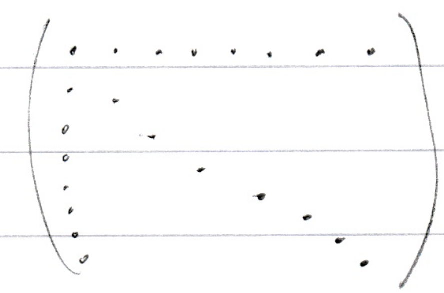
Masterformeln!

ISOSPINNFAKTORERNA AV $|u\rangle_1, |u\rangle_2, |u\rangle_3$ ÄR ~~VEKTORER~~ SPINORER I G-MODULER V_1, V_2, V_3 I VILKA SU(2) IRREPS $D^{(1)}, D^{(2)}, D^{(3)}$ VERKAR.

$D^{(1)}, D^{(2)}, D^{(3)}$ ÄR EKVIVALENTA (TRE KOPIOR AV DEN DEFINIERANDE REP:EN TILL SU(2))

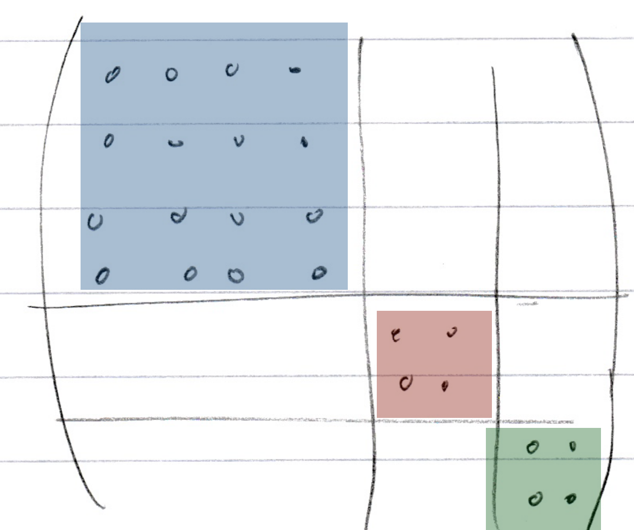
BILDA REP:EN SOM VERKAR I $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$:

$$D = D^{(1)} \otimes D^{(2)} \otimes D^{(3)} =$$



8x8 matriser

MASTERFORMELN



4-dim SU(2) irrep som spänns upp av isospinntillstånden för en *Δ-resonans* (med $I_z = -3/2, -1/2, 1/2, 3/2$)

2-dim SU(2) irrep som spänns upp av isospinntillstånden för en *nukleon* (med $I_z = -1/2, 1/2$)

2-dim SU(2) irrep som spänns upp av isospinntillstånden för en Δ'-resonans (med $I_z = -1/2, 1/2$)

$$= D_{\Delta} \; \cancel{\otimes} \oplus \; D_{\text{NUKLEON}} \; \cancel{\otimes} \oplus \; D_{\Delta'}$$

Den speciella tillämpning av ”Masterformeln” som illustrerats med de två exemplen (spinn resp. kvarkar!) – där den givna reducibla rep:en D är konstruerad genom att ta en direkt produkt av två eller flera irreps – kallas ***Clebsch-Gordan sönderläggning.***

Alfred Clebsch

Paul Gordan

För dem av er som kommer att läsa Masterskursen i kvantmekanik, se länken ClebschGordan på Canvas.