

Nytt ämne: **Integralekvationer**

The diagram shows the integral equation $g(x) y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) y(t) dt$ with several annotations in light gray. A bracket labeled "known" spans the left side $g(x) y(x)$. A bracket labeled "unknown" spans the right side $f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) y(t) dt$. A small square box is placed above the integral sign. A bracket labeled "upper limit" points to the upper limit b of the integral. A bracket labeled "unknown" points to the integrand $K(x,t) y(t)$. A bracket labeled "Complex Parameter" points to the parameter λ . A bracket labeled "Kernel" points to the kernel function $K(x,t)$.

$$g(x) y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) y(t) dt$$

Först litet bakgrund...

Fysikens grundläggande ekvationer är **differentialekvationer**

Klassisk fysik

Partikelmekanik: Hamiltons ekvationer

Elektrodynamik: Maxwells ekvationer

Hydrodynamik: Navier-Stokes ekvation

(Allmän) relativitetsteori: Einsteins fältekvationer

Kvantfysik

Kvantmekanik (icke-relativistisk): Schrödingerekvationen

Kvantfältteori (relativistisk): Diracekvationen (med gaugefält),...

... och många, många fler i studiet av olika modellsystem ("effektiva teorier")

Differentialekvationer kan skrivas om som integralekvationer

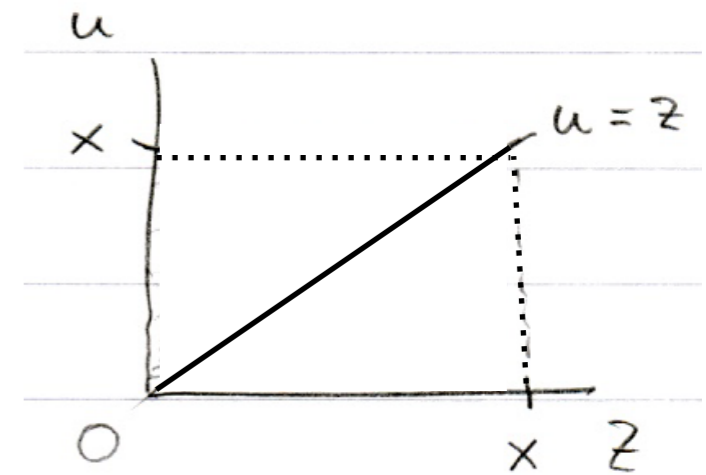
EX $y''(x) = g(x, y(x))$

INTEGRERA!

$$y'(x) = \int_0^x g(z, y(z)) dz + C_1$$

INTEGRERA EN GÅNG TILL!

$$y(x) = \int_0^x du \int_0^u dz g(z, y(z)) + C_1 x + C_2$$



Differentialekvationer kan skrivas om som integralekvationer

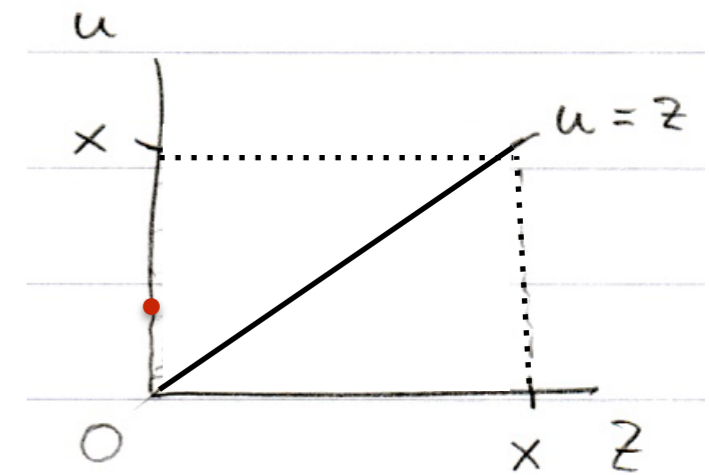
EX $y''(x) = g(x, y(x))$

INTEGRERA!

$$y'(x) = \int_0^x g(z, y(z)) dz + C_1$$

INTEGRERA EN GÅNG TILL!

$$y(x) = \int_0^x du \int_0^u dz g(z, y(z)) + C_1 x + C_2$$



Differentialekvationer kan skrivas om som integralekvationer

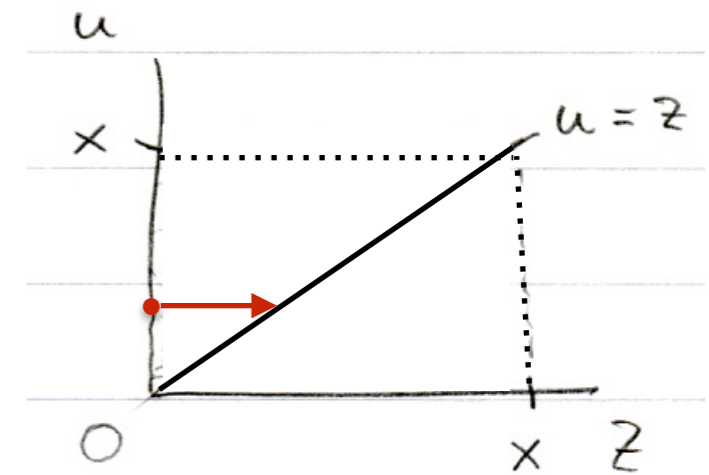
EX $y''(x) = g(x, y(x))$

INTEGRERA!

$$y'(x) = \int_0^x g(z, y(z)) dz + C_1$$

INTEGRERA EN GÅNG TILL!

$$y(x) = \int_0^x du \int_0^u dz g(z, y(z)) + C_1 x + C_2$$



Differentialekvationer kan skrivas om som integralekvationer

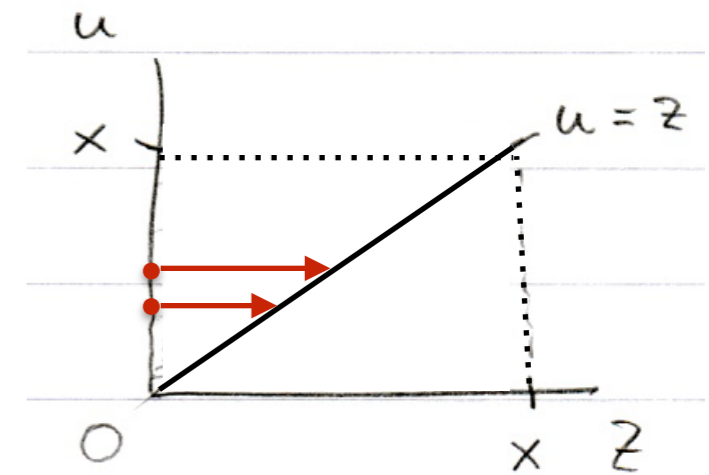
EX $y''(x) = g(x, y(x))$

INTEGRERA!

$$y'(x) = \int_0^x g(z, y(z)) dz + C_1$$

INTEGRERA EN GÅNG TILL!

$$y(x) = \int_0^x du \int_0^u dz g(z, y(z)) + C_1 x + C_2$$



Differentialekvationer kan skrivas om som integralekvationer

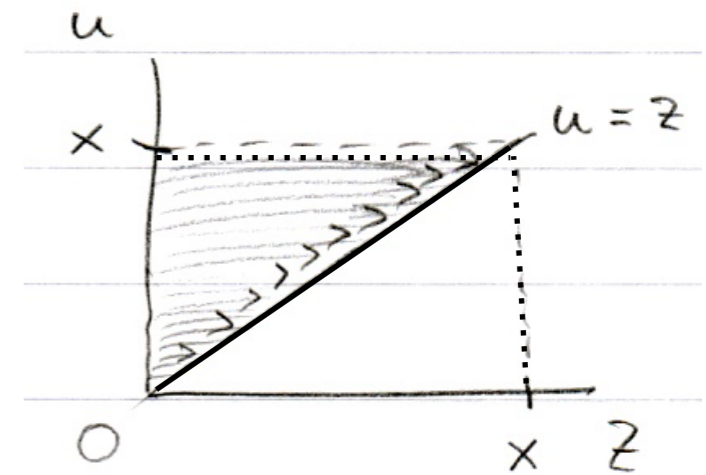
EX $y''(x) = g(x, y(x))$

INTEGRERA!

$$y'(x) = \int_0^x g(z, y(z)) dz + C_1$$

INTEGRERA EN GÅNG TILL!

$$y(x) = \int_0^x du \int_0^u dz g(z, y(z)) + C_1 x + C_2$$



Differentialekvationer kan skrivas om som integralekvationer

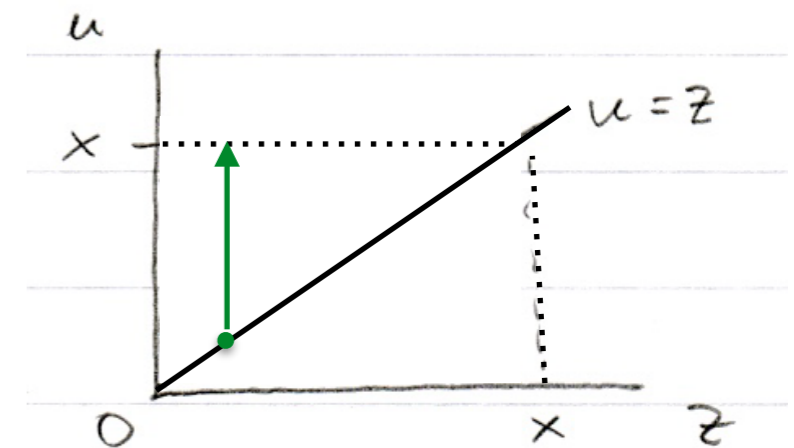
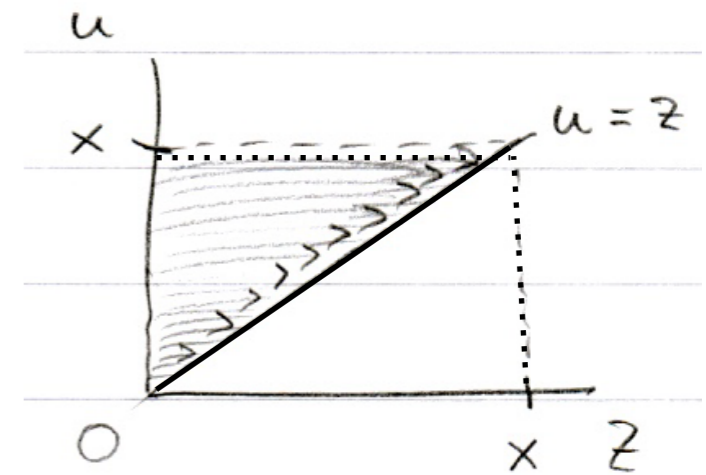
EX $y''(x) = g(x, y(x))$

INTEGRERA!

$$y'(x) = \int_0^x g(z, y(z)) dz + C_1$$

INTEGRERA EN GÅNG TILL!

$$y(x) = \int_0^x du \int_0^u dz g(z, y(z)) + C_1 x + C_2$$



Differentialekvationer kan skrivas om som integralekvationer

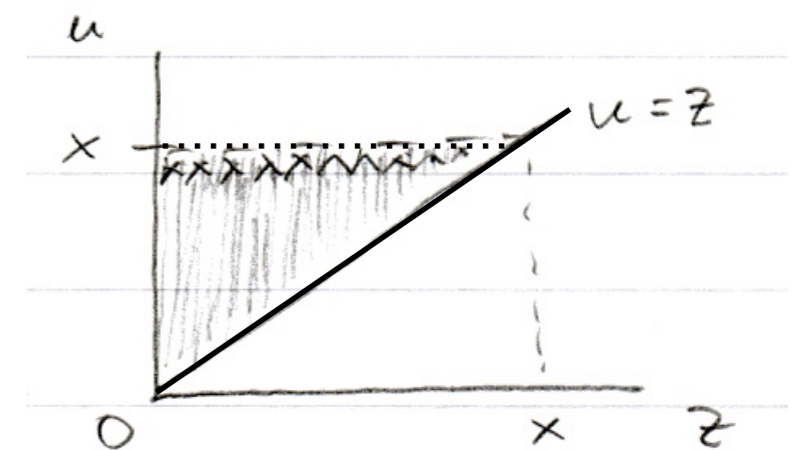
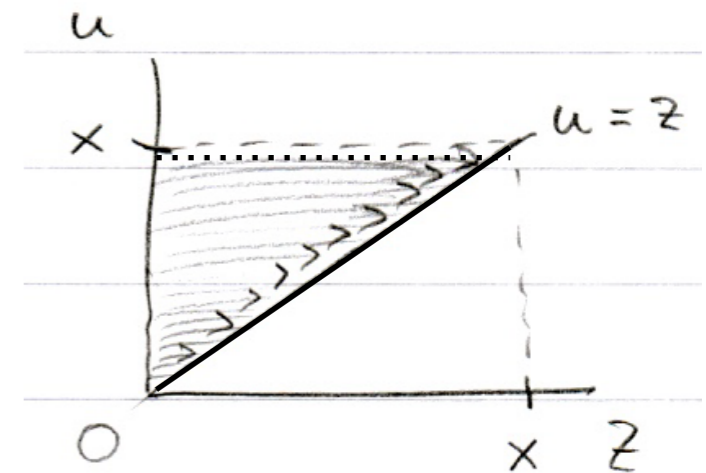
EX $y''(x) = g(x, y(x))$

INTEGRERA!

$$y'(x) = \int_0^x g(z, y(z)) dz + C_1$$

INTEGRERA EN GÅNG TILL!

$$y(x) = \int_0^x du \int_0^u dz g(z, y(z)) + C_1 x + C_2$$



Differentialekvationer kan skrivas om som integralekvationer

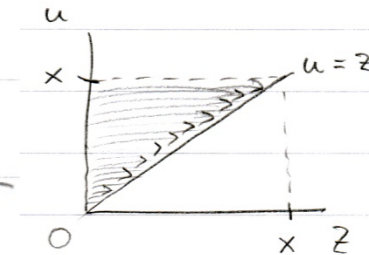
EX $y''(x) = g(x, y(x))$

INTEGRERA!

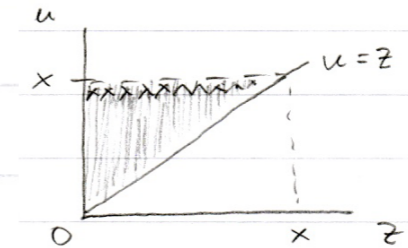
$$y'(x) = \int_0^x g(z, y(z)) dz + C_1$$

INTEGRERA EN GÅNG TILL!

$$y(x) = \int_0^x du \int_0^u dz g(z, y(z)) + C_1 x + C_2$$



$$= \int_0^x dz g(z, y(z)) \int_z^x du + C_1 x + C_2$$



$$= \int_0^x (x-z) g(z, y(z)) dz + C_1 x + C_2$$

Differentialekvationer kan skrivas om som integralekvationer

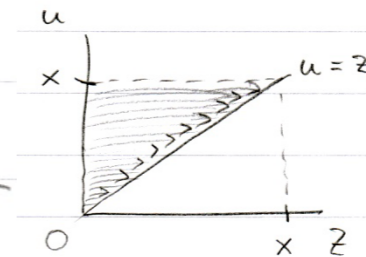
EX $y''(x) = g(x, y(x))$

INTEGRERA!

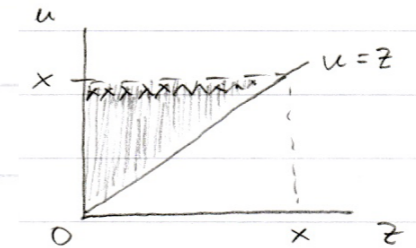
$$y'(x) = \int_0^x g(z, y(z)) dz + C_1$$

INTEGRERA EN GÅNG TILL!

$$y(x) = \int_0^x du \int_0^u dz g(z, y(z)) + C_1 x + C_2$$



$$= \int_0^x dz g(z, y(z)) \int_z^x du + C_1 x + C_2$$



$$= \int_0^x \underbrace{(x-z)}_{K(x,z) \text{ "integralkärna"}} g(z, y(z)) dz + \underbrace{C_1 x + C_2}_{f(x)}$$

Differentialekvationer kan skrivas om som integralekvationer

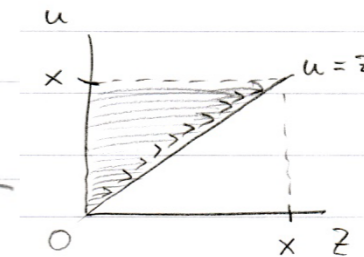
EX $y''(x) = g(x, y(x))$

INTEGRERA!

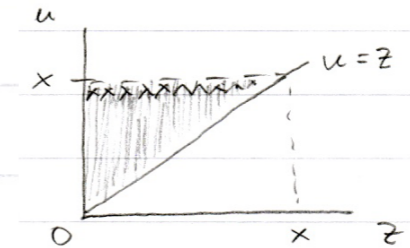
$$y'(x) = \int_0^x g(z, y(z)) dz + C_1$$

INTEGRERA EN GÅNG TILL!

$$y(x) = \int_0^x du \int_0^u g(z, y(z)) dz + C_1 x + C_2$$



$$= \int_0^x dz g(z, y(z)) \int_z^x du + C_1 x + C_2$$



$$= \int_0^x \underbrace{(x-z)}_x g(z, y(z)) dz + \underbrace{C_1 x + C_2}_{f(x)}$$

"integralkärna"

Differentialekvationer kan skrivas om som integralekvationer

EX $y''(x) = g(x, y(x))$

INTEGRERA!

$$y'(x) = \int_0^x g(z, y(z)) dz + C_1$$

INTEGRERA EN GÅNG TILL!

$$y(x) = f(x) + \int_0^x k(x, z) g(z, y(z)) dz$$

Inbyggda randvillkor:
fixeras genom val av C_1 och C_2

icke-linjär Volterra ekvation av andra typen

Den okända funktionen y förekommer både innanför och utanför integraltecknet. Allmänt: en integralekvation **definieras** av att den okända funktionen förekommer innanför integraltecknet.

Fyra klasser av linjära integralekvationer

Fredholms integralekvation av första typen

$$f(x) = \int_a^b k(x,t) \varphi(t) dt$$

Fredholm av andra typen

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) \varphi(t) dt$$

$\lambda \in \mathbb{C}$

Volterra av första typen

$$f(x) = \int_a^x k(x,t) \varphi(t) dt$$

Volterra av andra typen

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k(x,t) \varphi(t) dt$$

Fyra klasser av linjära integralekvationer

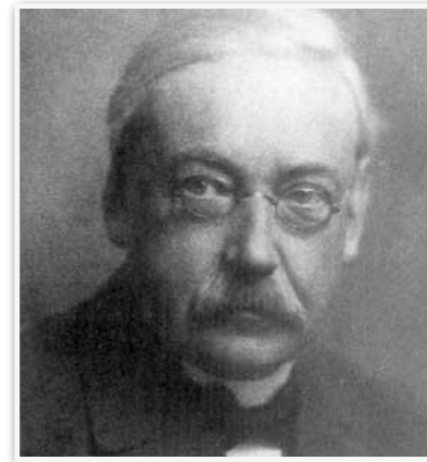
Fredholms integralekvation av första typen

$$f(x) = \int_a^b k(x,t) \varphi(t) dt$$

Fredholm av andra typen

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) \varphi(t) dt$$

$\lambda \in \mathbb{C}$



Ivar Fredholm
1866-1927

Volterra av första typen

$$f(x) = \int_a^x k(x,t) \varphi(t) dt$$

Volterra av andra typen

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k(x,t) \varphi(t) dt$$

Fyra klasser av linjära integralekvationer

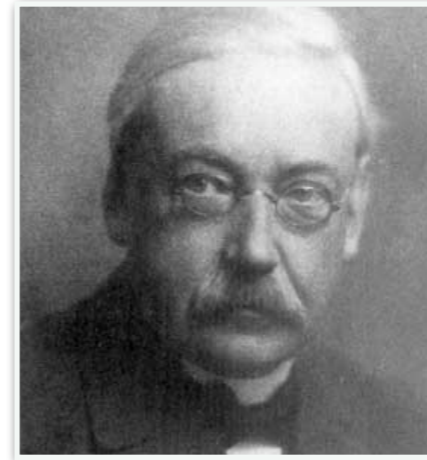
Fredholms integralekvation av första typen

$$f(x) = \int_a^b k(x,t) \varphi(t) dt$$

Fredholm av andra typen

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) \varphi(t) dt$$

↑
∈ ℱ



Ivar Fredholm
1866-1927

Jfr. linjär responsteori

$$X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,t) F(t) dt$$

↑
RESPONS

↑
GREENFUNKTION

↑
STÖRNING

ANTAG ATT X ÄRE KÄND (LIKSOM G)

HUR IDENTIFIERA F ? → FREDHOLM AV FÖRSTA TYPEN

Särskilt viktig integralekvation: **Fredholm av andra typen**

$$\varphi(x) = f(x) = \lambda \int_a^b K(x,t) \varphi(t) dt$$

$$g(x) y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) y(t) dt$$

Diagram illustrating the components of the Fredholm equation of the second kind:

- $g(x)$: known
- $y(x)$: unknown
- $f(x)$: known
- λ : Complex Parameter
- $K(x,t)$: Kernel
- a : lower limit
- b : upper limit

Fredholm av andra typen med separabel kärna

$$\varphi(x) = f(x) = \lambda \int_a^b K(x,t) \varphi(t) dt$$

ANTAG : K SEPARABEL (VANLIGT SPECIALFALL)

$$K(x,t) = \sum_{j=1}^n M_j(x) N_j(t)$$

Fredholm av andra typen med separabel kärna

$$\varphi(x) = f(x) = \lambda \int_a^b K(x,t) \varphi(t) dt$$

⇓

ANTAG: K SEPARABEL (VANLIGT SPECIALFALL)

$$K(x,t) = \sum_{j=1}^n M_j(x) N_j(t)$$

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^n c_j M_j(x) \quad (1)$$

$$c_j \equiv \int_a^b N_j(t) \varphi(t) dt$$

MULTIPLICERA (1) MED $N_i(x)$ OCH INTEGRERA: $\int_a^b \dots dx$

⇓

$$c_i = b_i + \lambda \sum_{j=1}^n a_{ij} c_j$$

$$b_i = \int_a^b N_i(x) f(x) dx, \quad a_{ij} = \int_a^b N_i(x) M_j(x) dx \quad (2)$$

Fredholm av andra typen med separabel kärna

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^n c_j M_j(x) \quad (1)$$

$$c_j \equiv \int_a^b N_j(x) \varphi(x) dx$$

multiplikera (1) med $N_i(x)$ och integrera: $\int_a^b \dots dx$

$$c_i = b_i + \lambda \sum_{j=1}^n a_{ij} c_j$$

$$b_i = \int_a^b N_i(x) f(x) dx, \quad a_{ij} = \int_a^b N_i(x) M_j(x) dx \quad (2)$$

skriv på matrisform: $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

unik icke-trivial
lösning endast om
 $\det |I - \lambda A| \neq 0$

\Downarrow

$$(I - \lambda A)c = b \quad (3)$$

LÖS FÖR c ! STOPPA IN I (1)! PRODUKTET LÖST!

Fredholm av andra typen med separabel kärna

Finns det alltid en lösning?

Svar: "Fredholmalternativet"

Fredholm av andra typen med separabel kärna

Finns det alltid en lösning?

Svar: "Fredholmalternativet"



För varje $\lambda \neq 0$: **Antingen** så har den inhomogena ekvationen ($f \neq 0$) en unik lösning för varje val av f **eller** så har den homogena ekvationen ($f = 0$) åtminstone en icke-trivial lösning.

Fredholm av andra typen med separabel kärna

Finns det alltid en lösning?

Svar: "Fredholmalternativet"



För varje $\lambda \neq 0$: **Antingen** så har den inhomogena ekvationen ($f \neq 0$) en unik lösning för varje val av f **eller** så har den homogena ekvationen ($f = 0$) åtminstone en icke-trivial lösning.

Generalisering?

Varje "tillräckligt snäll" integralkärna kan skrivas som

$$K(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n M_j(x) N_j(t)$$

Fredholm av andra typen med separabel kärna

Finns det alltid en lösning?

Svar: "Fredholmalternativet"



För varje $\lambda \neq 0$: **Antingen** så har den inhomogena ekvationen ($f \neq 0$) en unik lösning för varje val av f **eller** så har den homogena ekvationen ($f = 0$) åtminstone en icke-trivial lösning.

Generalisering?

Varje "tillräckligt snäll" integralkärna kan skrivas som

$$K(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n M_j(x) N_j(t)$$

styckvis kontinuerlig (?)
Hilbert (1904)



Fredholm av andra typen med separabel kärna

Finns det alltid en lösning?

Svar: "Fredholmalternativet"



För varje $\lambda \neq 0$: **Antingen** så har den inhomogena ekvationen ($f \neq 0$) en unik lösning för varje val av f **eller** så har den homogena ekvationen ($f = 0$) åtminstone en icke-trivial lösning.

Generalisering?

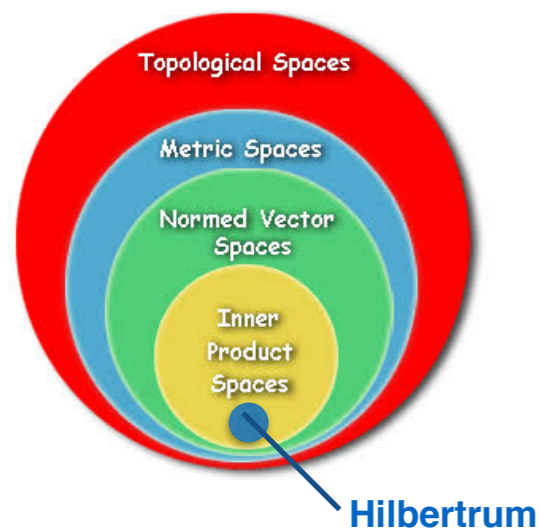
styckvis kontinuerlig (?)
Hilbert (1904)



Varje "tillräckligt snäll" integralkärna kan skrivas som

$$K(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n M_j(x) N_j(t)$$

Teori för Hilbertrum



Fredholm av andra typen med separabel kärna

Finns det alltid en lösning?

Svar: "Fredholmalternativet"



För varje $\lambda \neq 0$: **Antingen** så har den inhomogena ekvationen ($f \neq 0$) en unik lösning för varje val av f **eller** så har den homogena ekvationen ($f = 0$) åtminstone en icke-trivial lösning.

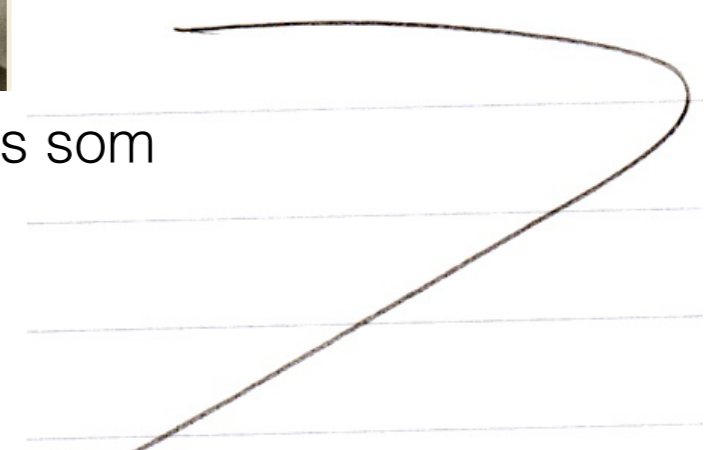
Generalisering?

styckvis kontinuerlig (?)
Hilbert (1904)



Varje "tillräckligt snäll" integralkärna kan skrivas som

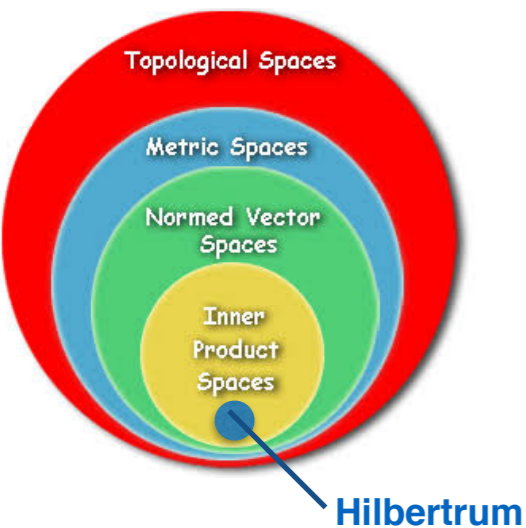
$$K(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n M_j(x) N_j(t)$$



Teori för Hilbertrum

fullständigt vektorrum \mathcal{H} med inre produkt norm

$$\|a\| = \sqrt{\langle a|a \rangle}$$



$$\lim_{\substack{i \rightarrow \infty \\ j \rightarrow \infty}} \|a_i - a_j\| = 0 \Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} \|a_i - a\| = 0$$

$\exists |a\rangle \in \mathcal{H}$

$\{ |a_i\rangle \}_{i=1}^{\infty}$ Cauchy sekvens

Tillbaks till Fredholm av andra typen...

Antag att $K(x,t)$ ej är separabel. Vad göra?

Vanligt alternativ: **Neumannserie** (störningsräkning)

The diagram shows the Fredholm equation of the second kind: $g(x) y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) y(t) dt$. Annotations in grey text identify the components: $g(x)$ is labeled "known"; $y(x)$ is labeled "unknown"; $f(x)$ is labeled "known"; λ is labeled "Complex Parameter"; \int_a^b is labeled "upper limit"; $K(x,t)$ is labeled "Kernel"; and $y(t)$ is labeled "unknown". A small square box is placed above the integral sign.

$$g(x) y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) y(t) dt$$

Neumannserie (störningsräkning)

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) \varphi(t) dt \quad (1)$$

GISSA EN LÖSNING!

$$\varphi(x) \approx f(x) \equiv \varphi_0(x) \quad (OK OM \lambda \text{ LITET, } [a,b] \text{ LITET, } \dots)$$

↑ "0: = BERÄKNINGENS APPROXIMATION"

dvs. ersätt $\varphi(t)$ i integranden i (1) med $\varphi_0(t)$

SÄTT IN I (1). DET MAN NÅ FÖR KALLAR VI φ_1

$$\varphi_1(x) \approx f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) \underbrace{f(t)}_{\varphi_0(t)} dt$$

dvs. ersätt $\varphi(t)$ i integranden i (1) med $\varphi_1(t)$

ITERERA! SÄTT IN φ_1 I (1), OSV. !

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b dt k(x,t) \left(f(t) + \lambda \int_a^b k(t,t') f(t') dt' \right)$$

FORTSÄTT SÅ!

Neumannserie (störningsräkning)

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) \varphi(t) dt \quad (1)$$

GISSA EN LÖSNING!

$$\varphi(x) \approx f(x) \equiv \varphi_0(x) \quad (\text{OK om } \lambda \text{ LITET, } [a,b] \text{ LITET, } \dots)$$

↑ "0: E DRÖMNINGENS APPROXIMATION"

SÄTT IN I (1). DET MAN NÅ IFRÅN KANAR VI φ_1

$$\varphi_1(x) \approx f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) \underbrace{f(t)}_{\varphi_0(t)} dt$$

ITERERA! SÄTT IN φ_1 I (1), ORU.!

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b dt K(x,t) \left(f(t) + \lambda \int_a^b K(t,t') f(t') dt' \right)$$

FÖRTSÄTT SÅ!

$$\varphi_n(x) = \sum_{i=0}^n \lambda^i u_i(x)$$

$$u_0(x) = f(x)$$

$$u_n(x) = \int_a^b \dots \int_a^b K(x,t_1) K(t_1,t_2) \dots K(t_{n-1},t_n) f(t_n) dt_n \dots dt_1$$

Neumannserie (störningsräkning)

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) \varphi(t) dt \quad (1)$$

GISSA EN LÖSNING!

$$\varphi(x) \approx f(x) \equiv \varphi_0(x) \quad (\text{om om } \lambda \text{ litet, } [a,b] \text{ litet, } \dots)$$

↑ "0: E ORDNINGENS APPROXIMATION"

SÄTT IN I (1), DET MAN NÅ FÖR KÄNNA VI φ_1

$$\varphi_1(x) \approx f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) \underbrace{f(t)}_{\varphi_0(t)} dt$$

ITERERA! SÄTT IN φ_1 I (1), ORV.!

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b dt K(x,t) \left(f(t) + \lambda \int_a^b K(t,t') f(t') dt' \right)$$

FORTSÄTT SÅ!

$$\varphi_n(x) = \sum_{i=0}^n \lambda^i u_i(x)$$

$$u_0(x) = f(x)$$

$$u_n(x) = \int_a^b \dots \int_a^b K(x,t_1) K(t_1,t_2) \dots K(t_{n-1},t_n) f(t_n) dt_n \dots dt_1$$

$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x)$ om serien konvergerar
tillräckligt villkor: $|\lambda| \|K\| < 1$ *

* definition av operatornorm: $\|A\| = \inf\{c \geq 0 : \|Av\| \leq c|v|, \forall v \in \mathcal{V}\}$

$$\underline{\text{EX}} \quad \varphi(x) = x + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t-x) \varphi(t) dt$$

SEPARABEL KÄRNA: $K(x,t) = t \cdot x^0 - t^0 \cdot x$

\Rightarrow PROBLEMET KAN LÖSAS ALGEBRAISKT

Lösning med Neumannserie

VÄLJ $\varphi_0(x) = x$

$\Rightarrow \varphi_1(x) = x + \frac{1}{3}$

INTEGRERA!

$\varphi_2(x) = x + \frac{1}{3} - \frac{x}{3}$

$\varphi_3(x) = x + \frac{1}{3} - \frac{x}{3} - \frac{1}{3!}$

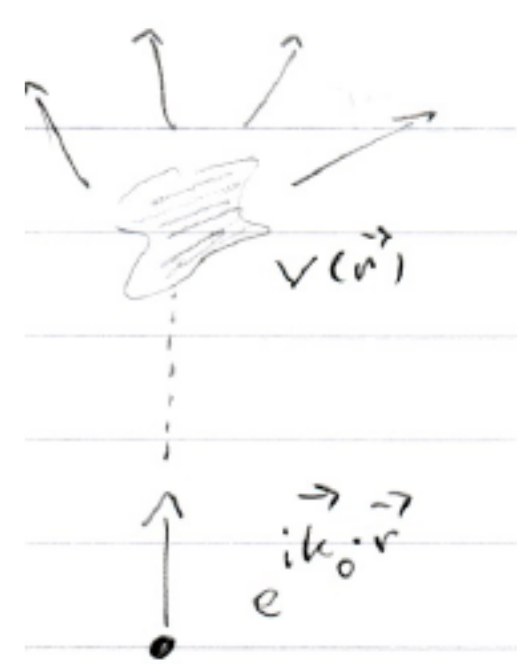
\Downarrow INDUKTION

$$\varphi_{2n}(x) = x + \sum_{s=1}^n (-1)^{s-1} \left(\frac{1}{3}\right)^s - x \sum_{s=1}^n (-1)^{s-1} \left(\frac{1}{3}\right)^s$$

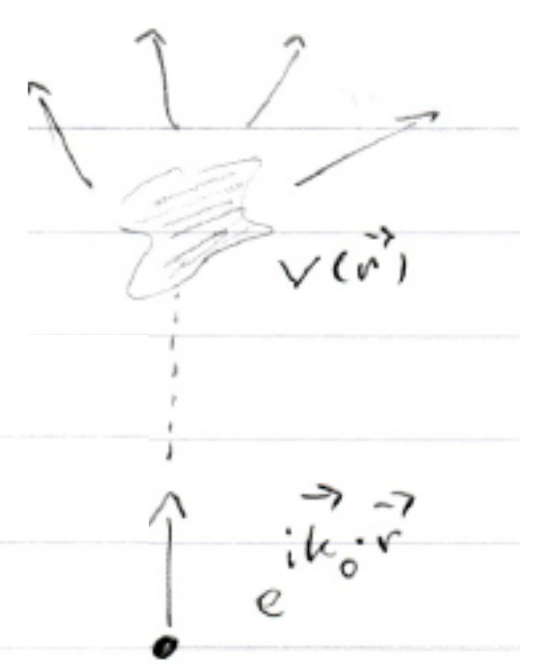
ANVÄND
 $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$

$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$

Viktigt fysikexempel:
Bornapproximationen för stationär spridningsteori



Viktigt fysikexempel: Bornapproximationen för stationär spridningsteori



TIDSOBEROENDE SCHRÖDINGEREKVATIONEN

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\vec{r}) + V(\vec{r}) \Psi(\vec{r}) = E \Psi(\vec{r}) \quad (1)$$

↑
ELASTISK PROCESS:
 $E = (\hbar k_0)^2 / 2m$ KONSTANT

$\Psi(\vec{r}, t) = e^{-iEt/\hbar} \Psi(\vec{r})$ DÄR $\Psi(\vec{r})$ ÄR LÖSNINGEN TILL (1)

$$(1) \Rightarrow \underbrace{(\nabla^2 + k_0^2)}_L \underbrace{\Psi(\vec{r})}_g = \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2} V(\vec{r}) \Psi(\vec{r})}_f$$

Viktigt fysikexempel: Bornapproximationen för stationär spridningsteori

TIDSOBEROENDE SCHRÖDINGEREKVATIONEN

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\vec{r}) + V(\vec{r}) \Psi(\vec{r}) = E \Psi(\vec{r}) \quad (1)$$

↑
ELASTISK PROCESS:
 $E = (\hbar k_0)^2 / 2m$ KONSTANT

$$\Psi(\vec{r}, t) = e^{-iEt/\hbar} \Psi(\vec{r}) \quad \text{DÄR } \Psi(\vec{r}) \text{ ÄR LÖSNINGEN TILL (1)}$$

$$(1) \Rightarrow \underbrace{(\nabla^2 + k_0^2)}_L \underbrace{\Psi(\vec{r})}_g = \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2} V(\vec{r}) \Psi(\vec{r})}_f$$

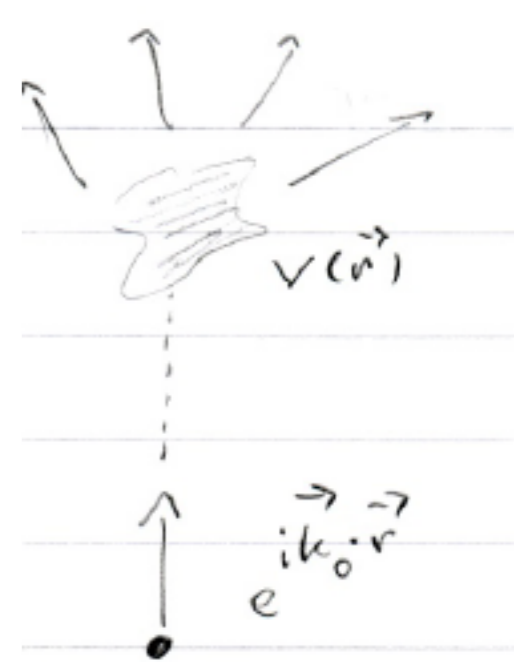
TEORI FÖR INHOMOGENA DIFF EKVATIONER:

$$Lg = f \Rightarrow g = \int G f \quad \text{DÄR } LG = \delta$$

$$\Rightarrow \Psi(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} G(\vec{r}, \vec{r}') \left(\frac{2m}{\hbar^2} V(\vec{r}') \Psi(\vec{r}') \right) d\vec{r}' \quad (2)$$

↑
RETARDERAD GREENFUNKTION TILL $L = \nabla^2 + k_0^2$

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = G(\vec{r} - \vec{r}') = - \frac{e^{ik_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (3)$$



$$V = 0 \Rightarrow \psi = 0 \quad ?!$$

NEJ! MÅSTE INFÖRA RANDVILLKORET $\psi(\vec{r}) = e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}}$ NÄR $V = 0$.

$$\Rightarrow \underbrace{\psi(\vec{r})}_{\psi(\vec{r})} = \underbrace{e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}}}_{f(\vec{r})} + \frac{2m}{\hbar^2} \int_{\mathbb{R}^3} \underbrace{G(\vec{r}, \vec{r}')}_{K(\vec{r}, \vec{r}')} \underbrace{V(\vec{r}')}_{V(\vec{r}')} \underbrace{\psi(\vec{r}')}_{\psi(\vec{r}')} d\vec{r}' \quad (4)$$

FÖR ATT RÄKNA PÅ DETTA, BÖRJA MED ATT SÄTTA IN (3) I (4):

$$\Rightarrow \psi(\vec{r}) = e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}} - \frac{m}{2\hbar^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i\vec{k}_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} V(\vec{r}') \psi(\vec{r}') d\vec{r}'$$

antag $|V(\vec{r}')| \ll E$
("V LITEN")

0: E ORDNINGENS APPROXIMATION

$$\psi(\vec{r}) \approx e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}} \equiv \psi_0(\vec{r})$$

Bornapproximationen:
Neumannserien trunckerad efter första approximationen

$$\Rightarrow \psi_1(\vec{r}) = e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}} - \frac{m}{2\hbar^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i\vec{k}_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} V(\vec{r}') e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}'} d\vec{r}'$$

1: A ORDNINGENS
APPROXIMATION

Det finns en omfattande teori för integralekvationer, t.ex. Schmidt-Hilbert teori för symmetriska kärnor ($K(x,t) = K(t,x)$), se Arfken *et al.*, avsnitt 21.4 (överkurs).