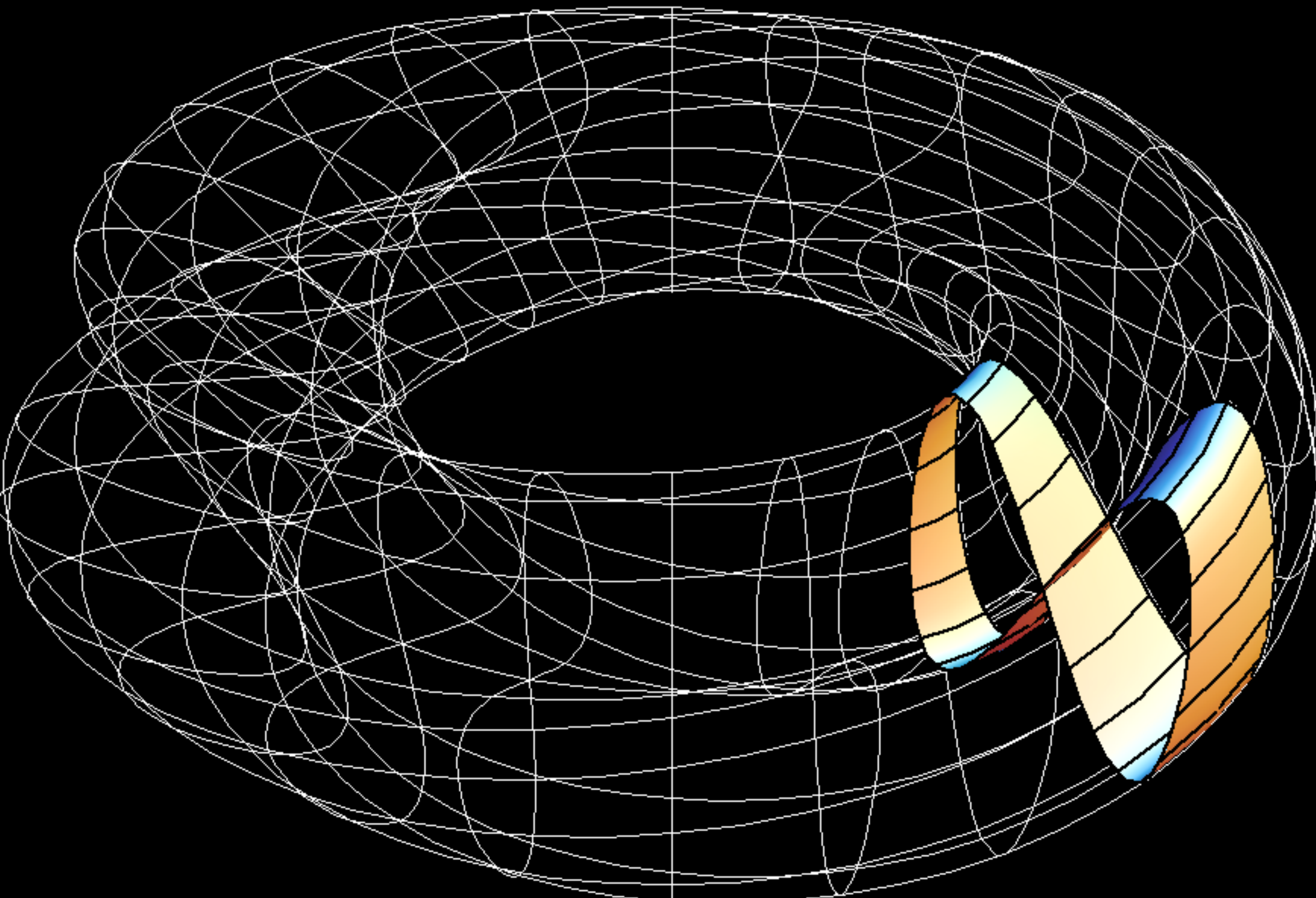
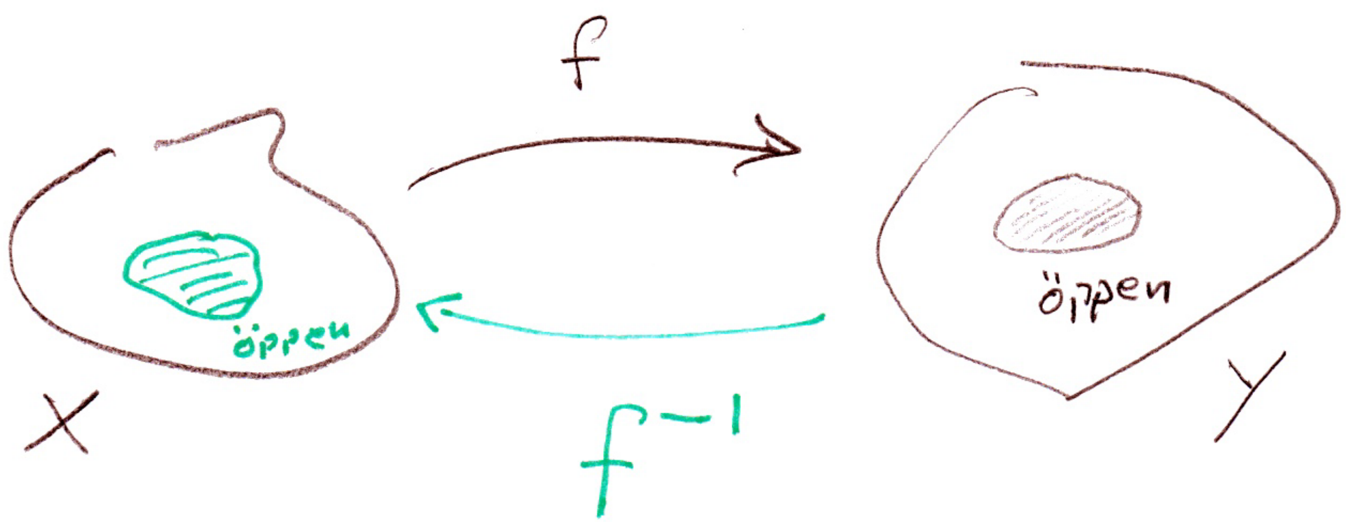
Föreläsning 18/12 (I)

Topologins ABC: Några grundläggande begrepp…



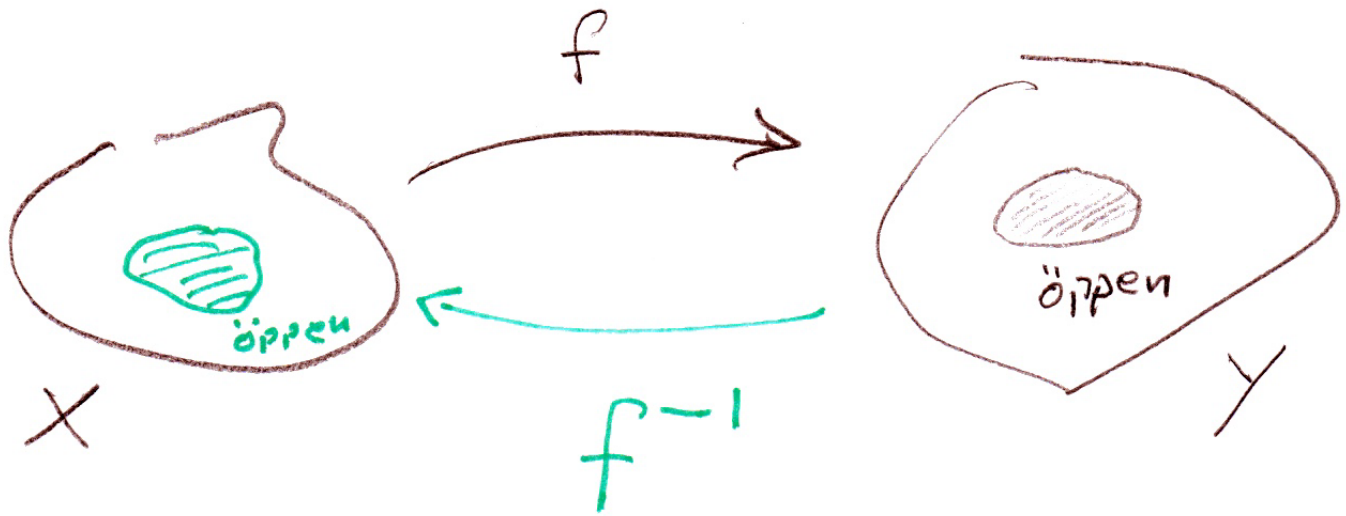
För att "på riktigt" diskutera topologi behöver man (som för all matematik!) precisa definitioner, t.ex.

kontinuerlig funktion (def. enl. topologi):



För att "på riktigt" diskutera topologi behöver man (som för all matematik!) precisa definitioner, t.ex.

kontinuerlig funktion (def. enl. topologi):



… här gör vi det litet enklare!

... vi behöver ändå
några precisa definitioner!

TOPOLOGI: Några grundbegrepp

GIVET $(X, \mathcal{T})$

MÄNGD

$\mathcal{T} = \{$ NÅGON UPPSÄTTNING DELMÄNGDER $\mathcal{O}_i$ TILL X, $i = 1, 2, \ldots \}$

$(X, \mathcal{T})$ ÄR ETT TOPOLOGISKT RUM MED TOPOLOGIN $\mathcal{T}$ OM

(1) $\emptyset$ OCH X ÄR ELEMENT I $\mathcal{T}$

(2) VARJE UNION $\bigcup_i \mathcal{O}_i \in \mathcal{T}$

(3) VARJE ÄNDLIGT SNITT $\bigcap_i \mathcal{O}_i \in \mathcal{T}$

för att undvika "diskret topologi"

Elementen $\mathcal{O}_i$ i $\mathcal{T}$ kallas "öppna delmängder".
(Sammanfaller med "öppen delmängd" i ett metriskt rum.)
Varje metriskt rum (mängd med en metrik) är topologiskt, men omvändningen gäller inte.

Föreläsning 18/12 (I) TOPOLOGI: Några grundbegrepp

GIVET (X, T)

MÄNGD

$T = \left\{ \begin{array}{l} \text{NÅGON UPPSÄTTNING DELMÄNGDER} \\ \mathcal{O}_i \text{ TILL } X,\ i = 1, 2, \ldots \end{array} \right\}$

(X, T) ÄR ETT TOPOLOGISKT RUM MED TOPOLOGIN T OM

(1) $\emptyset$ OCH X ÄR ELEMENT I T

(2) VARJE UNION $\bigcup_i \mathcal{O}_i \in T$

(3) VARJE ÄNDLIGT SNITT $\bigcap_i \mathcal{O}_i \in T$

för att undvika "diskret topologi"

VIKTIGT SPECIALFALL AV TOPOLOGISKT RUM:

TOPOLOGISK MÅNGFALD

= TOPOLOGISKT RUM $(\mathcal{M}, T_{\mathcal{M}})$ DÄR $T_{\mathcal{M}} = \{\mathcal{O}_\alpha \in \mathcal{M}, \alpha = 1, 2, \ldots\}$ MED EGENSKAPEN ATT VARJE $\mathcal{O}_\alpha \in T_{\mathcal{M}}$ ÄR HOMOMORF TILL EN ÖPPEN MÄNGD $U_\alpha \in \mathbb{R}^n$

$$\exists f_\alpha : \mathcal{O}_\alpha \xrightarrow[\text{HOMOMORF}]{} U_\alpha$$

f_α ÄR HOMOMORF OM f_α ÄR KONTINUERLIG OCH HAR EN KONTINUERLIG INVERS.

Föreläsning 18/12 (I)

TOPOLOGI: Några grundbegrepp

GIVET (X, T)

MÄNGD

$T = \{$ NÅGON UPPSÄTTNING DELMÄNGDER O_i TILL X, $i = 1, 2, \ldots \}$

(X, T) ÄR ETT TOPOLOGISKT RUM MED TOPOLOGIN T OM

(1) $\emptyset$ OCH X ÄR ELEMENT I T

(2) VARJE UNION $\bigcup_i O_i \in T$

(3) VARJE ÄNDLIGT SNITT $\bigcap_i O_i \in T$

↑ för att undvika "diskret topologi"

VIKTIGT SPECIALFALL AV TOPOLOGISKT RUM:

TOPOLOGISK MÅNGFALD

= TOPOLOGISKT RUM $(\mathcal{M}, T_{\mathcal{M}})$ DÄR $T_{\mathcal{M}} = \{O_\alpha \in \mathcal{M}, \alpha = 1, 2, \ldots\}$

MED EGENSKAPEN ATT VARJE $O_\alpha \in T_{\mathcal{M}}$ ÄR HOMOMORF

TILL EN ÖPPEN MÄNGD $U_\alpha \in \mathbb{R}^n$

$$\exists f_\alpha : O_\alpha \xrightarrow[\text{HOMOMORF}]{} U_\alpha$$

en topologisk mångfald liknar $\mathbb{R}^n$ *lokalt*

f_α ÄR HOMOMORF OM f_α ÄR KONTINUERLIG OCH HAR EN KONTINUERLIG INVERS.

Föreläsning 18/12 (I)

TOPOLOGI: Några grundbegrepp

GIVET (X, T)

X = MÄNGD

$T = \{$NÅGON UPPSÄTTNING DELMÄNGDER $\mathcal{O}_i$ TILL X, $i = 1, 2, \ldots\}$

(X, T) ÄR ETT TOPOLOGISKT RUM MED TOPOLOGIN T OM

(1) $\emptyset$ OCH X ÄR ELEMENT I T

(2) VARJE UNION $\bigcup_i \mathcal{O}_i \in T$

(3) VARJE ÄNDLIGT SNITT $\bigcap_i \mathcal{O}_i \in T$

↑ för att undvika "diskret topologi"

$(f_\alpha, \mathcal{O}_\alpha)$ = "KARTA" AV $\mathcal{O}_\alpha$

$\{(f_\alpha, \mathcal{O}_\alpha)\}_{\alpha = 1, 2, \ldots}$ = "ATLAS" AV $\mathcal{M}$

Om atlasen innehåller bara en karta kallas $\mathcal{M}$ "trivial".

VIKTIGT SPECIALFALL AV TOPOLOGISKT RUM:

TOPOLOGISK MÅNGFALD

= TOPOLOGISKT RUM $(\mathcal{M}, T_{\mathcal{M}})$ DÄR $T_{\mathcal{M}} = \{\mathcal{O}_\alpha \in \mathcal{M}, \alpha = 1, 2, \ldots\}$ MED EGENSKAPEN ATT VARJE $\mathcal{O}_\alpha \in T_{\mathcal{M}}$ ÄR HOMOMORF TILL EN ÖPPEN MÄNGD $U_\alpha \in \mathbb{R}^n$

$$\exists f_\alpha : \mathcal{O}_\alpha \xrightarrow[\text{HOMOMORF}]{} U_\alpha$$

f_α ÄR HOMOMORF OM f_α ÄR KONTINUERLIG OCH HAR EN KONTINUERLIG INVERS.

en topologisk mångfald liknar $\mathbb{R}^n$ *lokalt*

Föreläsning 18/12 (I) # TOPOLOGI: Några grundbegrepp

GIVET (X, T)

MÄNGD

$T = \{$NÅGON UPPSÄTTNING DELMÄNGDER $\mathcal{O}_i$ TILL X, $i = 1, 2, \ldots\}$

(X, T) ÄR ETT TOPOLOGISKT RUM MED TOPOLOGIN T OM

(1) $\emptyset$ OCH X ÄR ELEMENT I T

(2) VARJE UNION $\bigcup_i \mathcal{O}_i \in T$

(3) VARJE ÄNDLIGT SNITT $\bigcap_i \mathcal{O}_i \in T$

för att undvika "diskret topologi"

$(f_\alpha, \mathcal{O}_\alpha)$ = "KARTA" AV $\mathcal{O}_\alpha$

$\{(f_\alpha, \mathcal{O}_\alpha)\}_{\alpha=1,2,\ldots}$ = "ATLAS" AV $\mathcal{M}$

Om atlasen innehåller bara en karta kallas $\mathcal{M}$ "trivial".

VIKTIGT SPECIALFALL AV TOPOLOGISKT RUM:

TOPOLOGISK MÅNGFALD

= TOPOLOGISKT RUM $(\mathcal{M}, T_\mathcal{M})$ DÄR $T_\mathcal{M} = \{\mathcal{O}_\alpha \in \mathcal{M}, \alpha = 1, 2, \ldots\}$

MED EGENSKAPEN ATT VARJE $\mathcal{O}_\alpha \in T_\mathcal{M}$ ÄR HOMOMORF

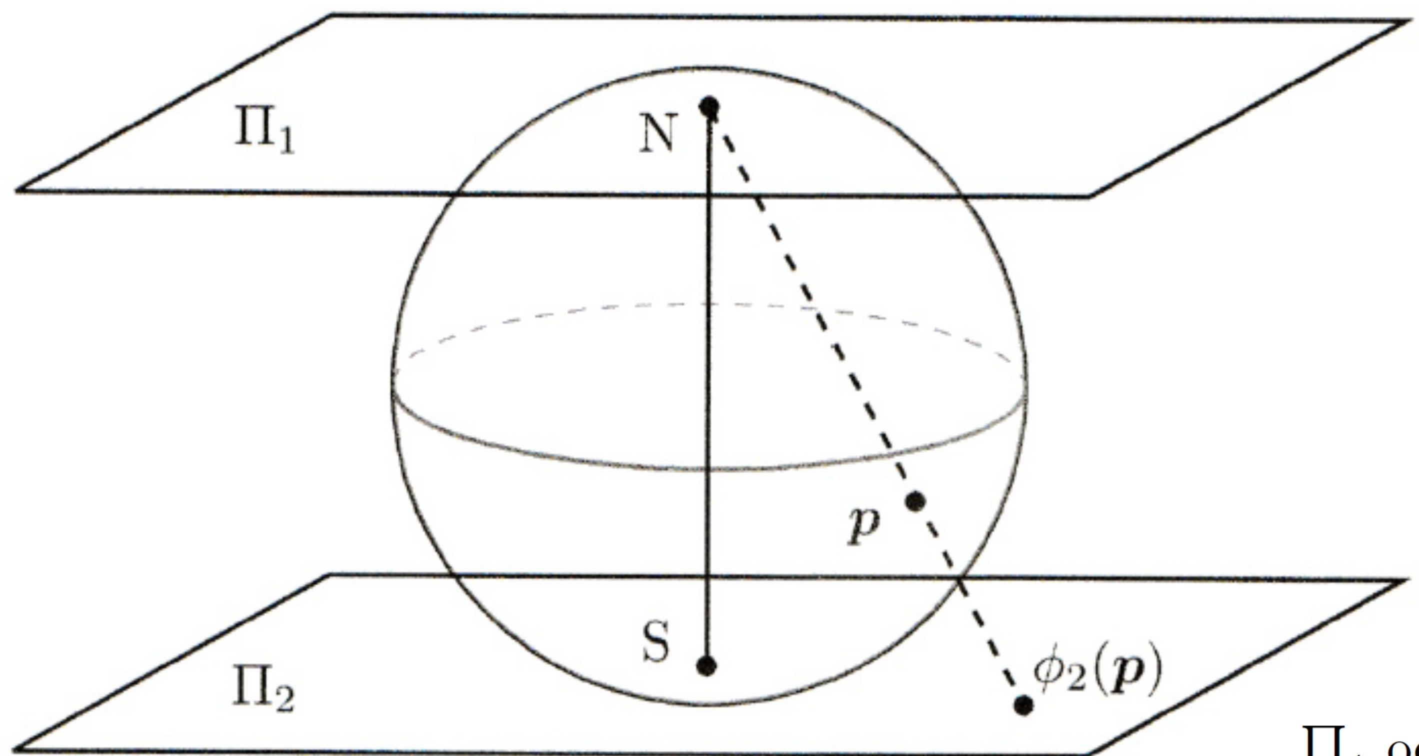
TILL EN ÖPPEN MÄNGD $U_\alpha \in \mathbb{R}^n$

$$\exists f_\alpha : \mathcal{O}_\alpha \xrightarrow[\text{HOMOMORF}]{} U_\alpha$$

en topologisk mångfald liknar $\mathbb{R}^n$ *lokalt*

f_α ÄR HOMOMORF (DIFFEOMORF) OM f_α ÄR KONTINUERLIG (DERIVERBAR) OCH HAR EN KONTINUERLIG (DERIVERBAR) INVERS.

Exempel på en diffeomorfism: stereografisk projektion



$\prod_1$ och $\prod_2$ är två kopior av $\mathbb{R}^2$

$$\phi_i : O_i \to \mathbb{R}^2, \quad i = 1, 2 \qquad O_1 = S^2 - \{\mathbf{S}\} \qquad O_2 = S^2 - \{\mathbf{N}\}$$

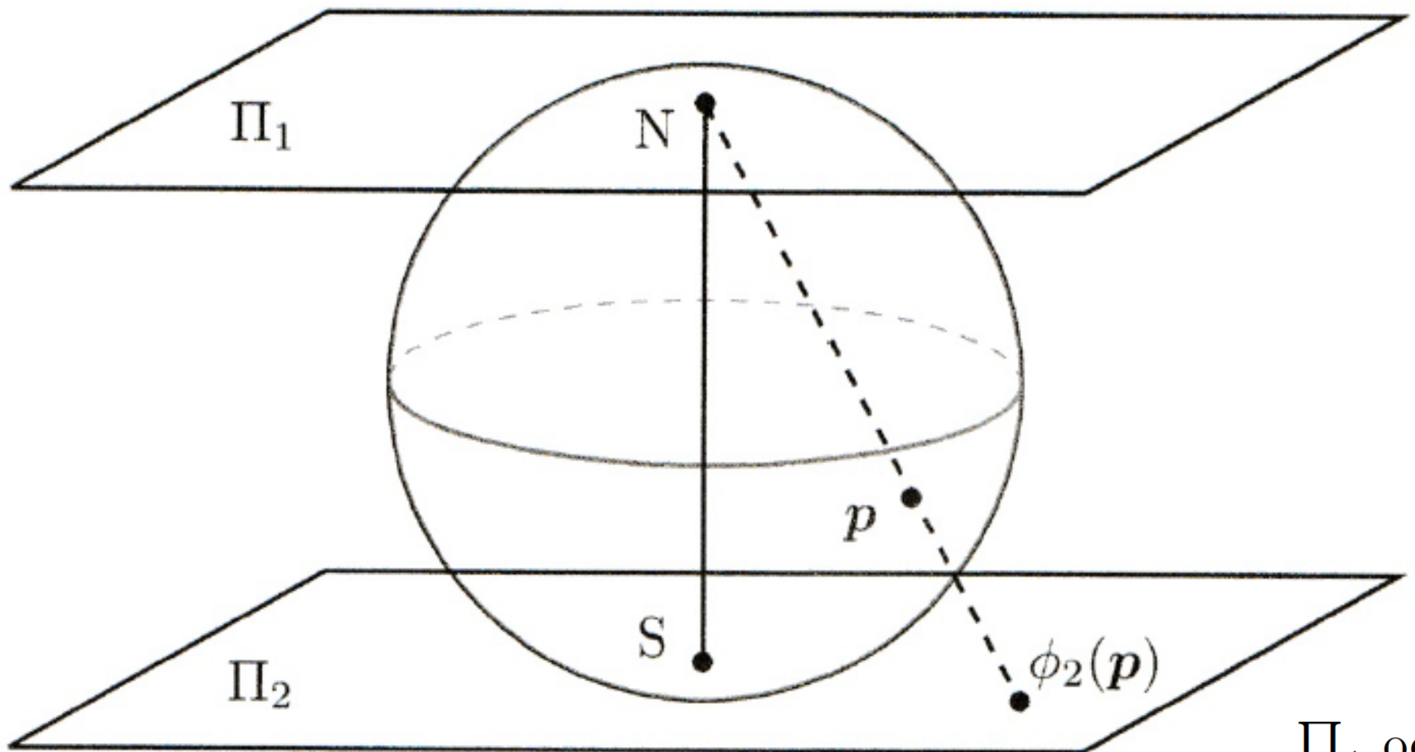
stereografisk projektion

$$g_{12} = \phi_1 \phi_2^{-1} : \mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\} \ \to \ \mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$$

$$g_{12} \in C^\infty \implies S^2 \text{ är en ”glatt mångfald”}$$

”överföringsfunktion”

Exempel på en diffeomorfism: stereografisk projektion



$\prod_1$ och $\prod_2$ är två kopior av $\mathbb{R}^2$

$$\phi_i : O_i \to \mathbb{R}^2, \quad i = 1, 2 \qquad O_1 = S^2 - \{\mathbf{S}\} \qquad O_2 = S^2 - \{\mathbf{N}\}$$

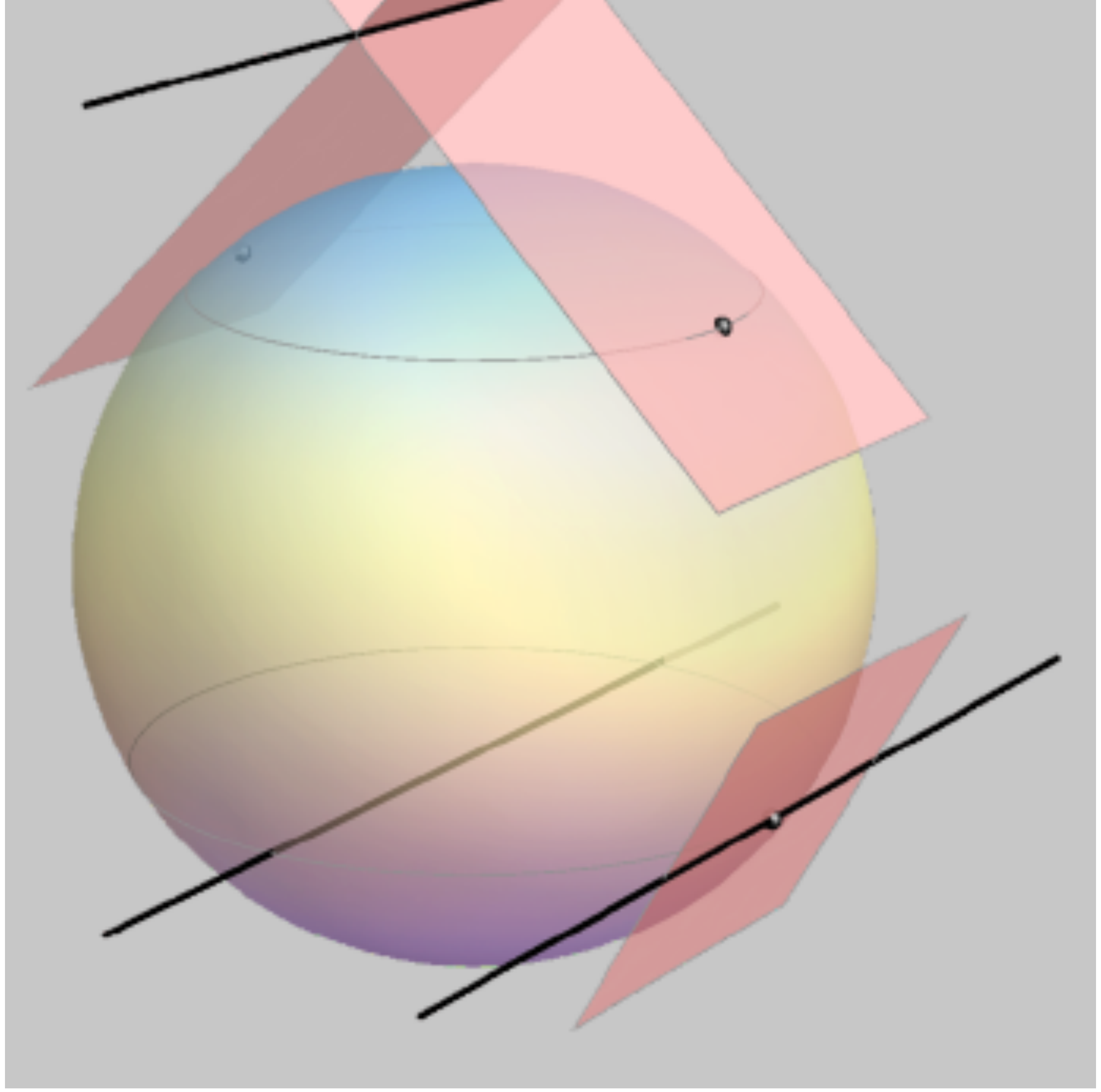
stereografisk projektion

$$g_{12} = \phi_1 \phi_2^{-1} : \mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$$

$$g_{12} \in C^\infty \implies S^2 \text{ är en ”glatt mångfald”}$$

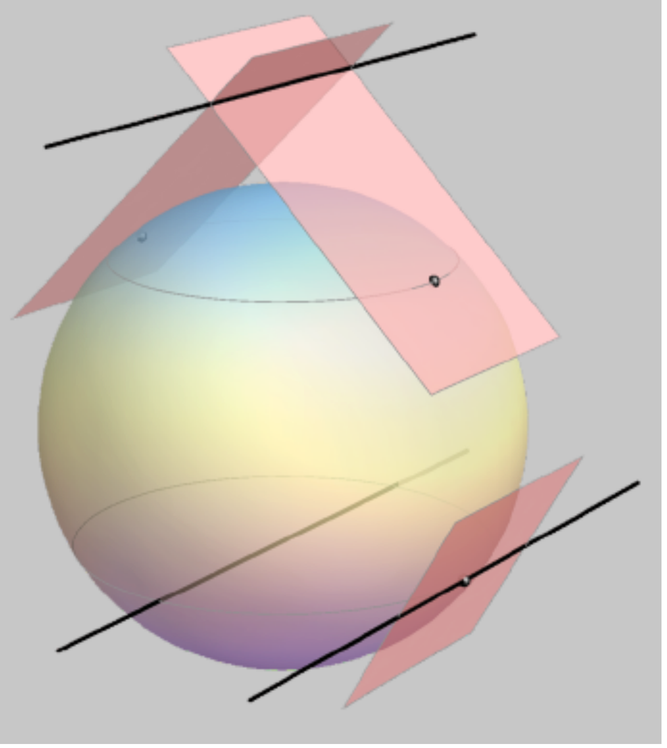
villkor för Gauss-Bonnet teoremet

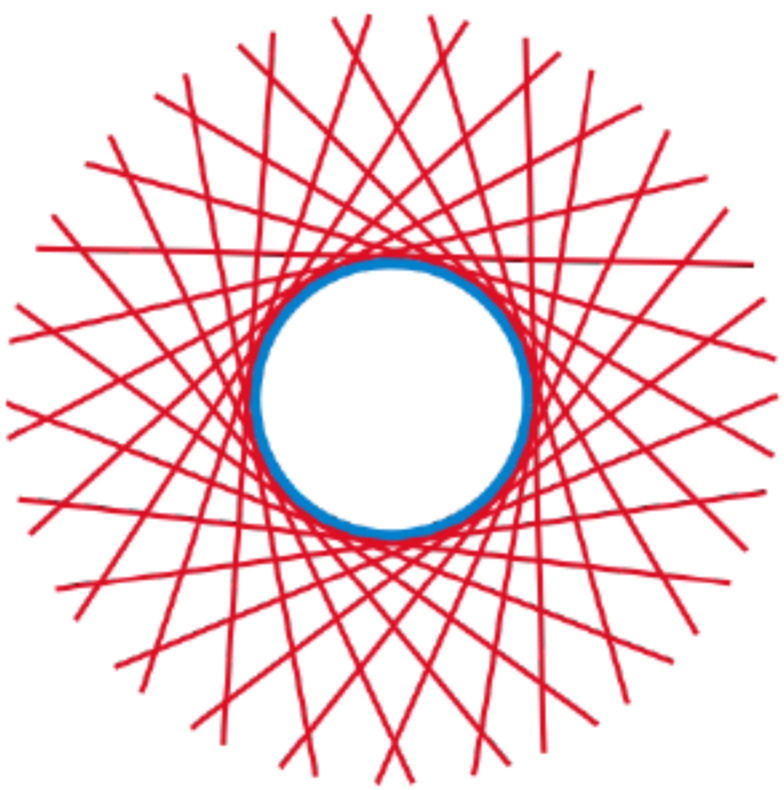
”överföringsfunktion”

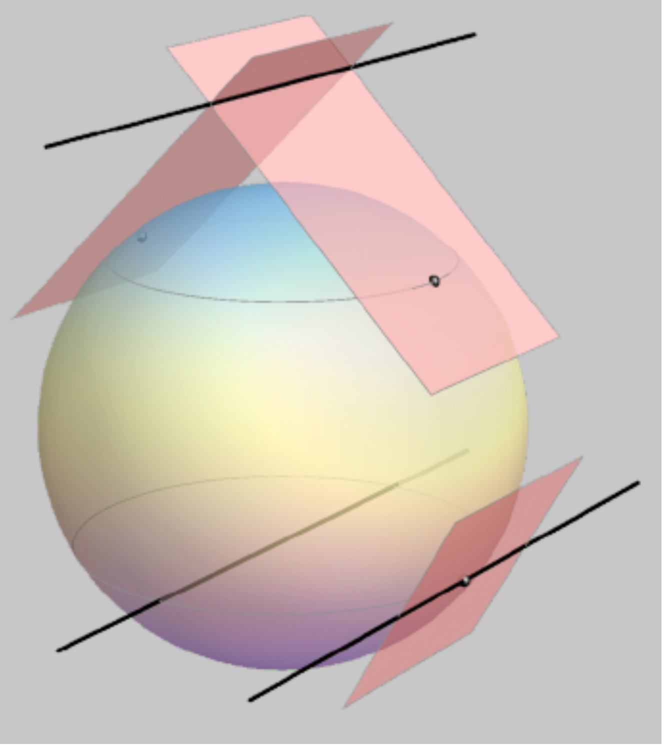


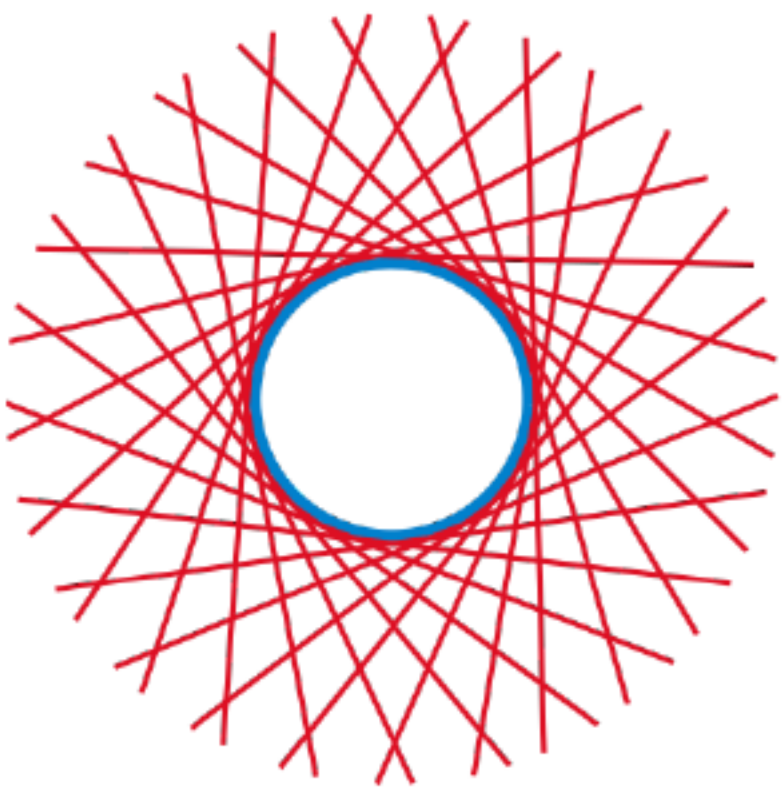
Givet en glatt mångfald så kan vi i varje punkt associera ett *tangentrum*

här: tangentplan

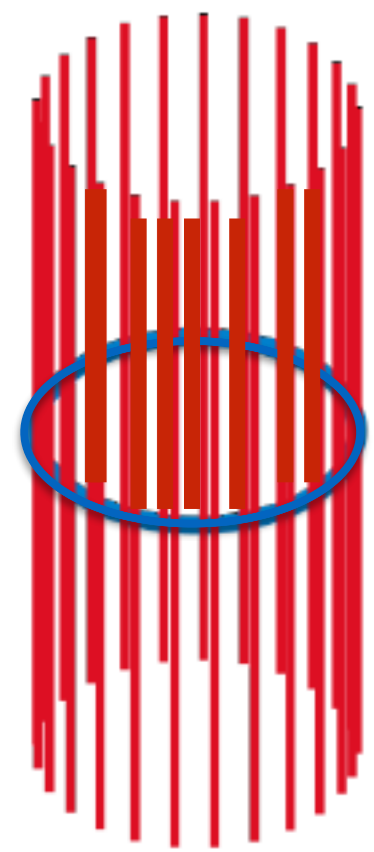




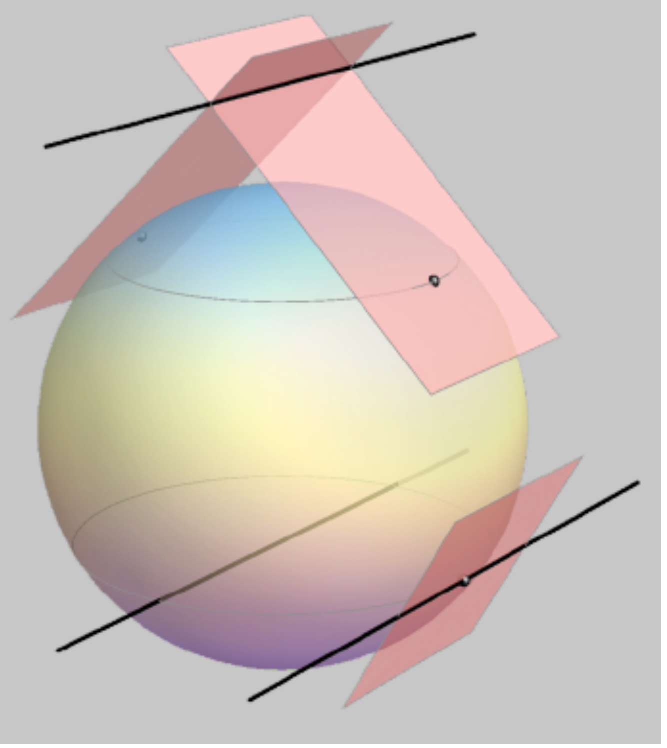


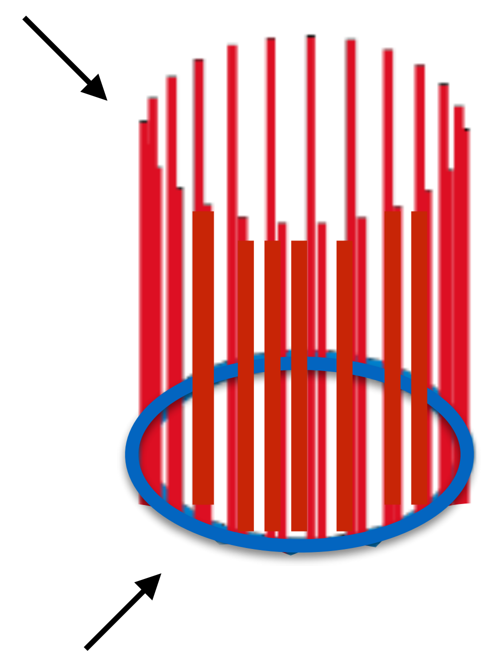


”räta ut” tangentrummen
så att de inte överlappar



tangentknippe



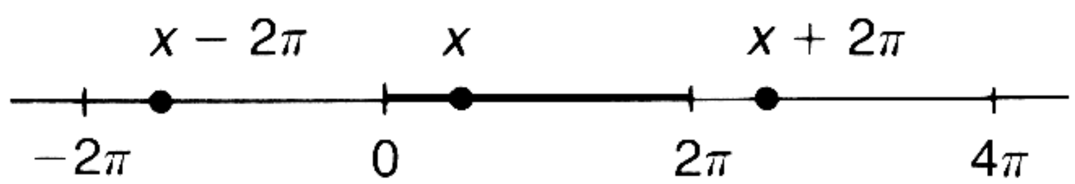


tangentknippe

specialfall av
fiberknippe
= topologiskt rum
som lokalt ser ut
som produkten av
två topologiska rum:
cylinder $= S^1 \times \mathbb{R}$

Vi kan använda **ekvivalensrelationer** till att konstruera **topologiska mångfalder**

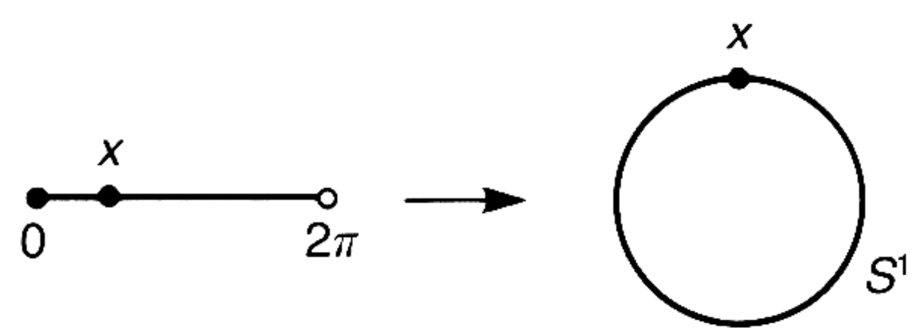
Exempel: givet $\boldsymbol{R}$, definiera en **ekvivalensrelation** $x \sim y$: $y = x + 2\pi n$



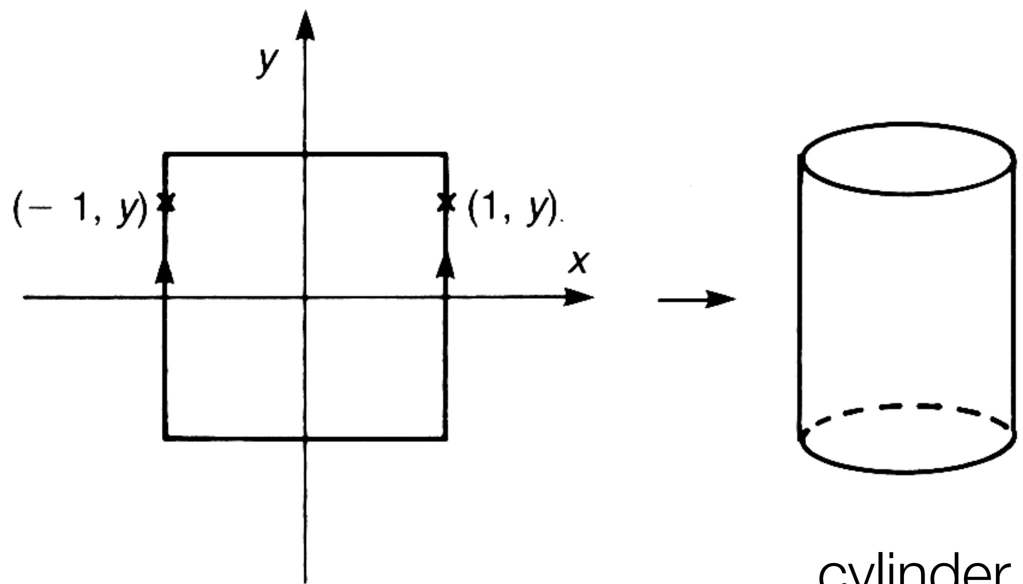
ekvivalensklasser: $(x) = \{\ldots, x - 2\pi, x, x + 2\pi, x + 4\pi, \ldots\}$

kvotmängden R/~ består av alla ekvivalensklasser (x)

motsvarande topologiska mångfald kallas **kvotrum**

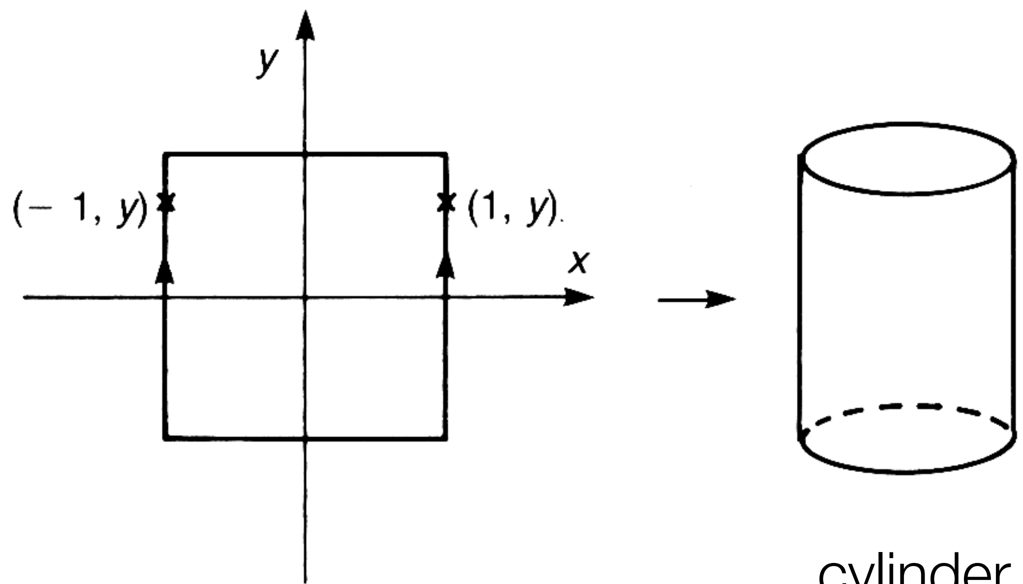


Andra sätt att använda **ekvivalensrelationer** för att konstruera **topologiska mångfalder**:

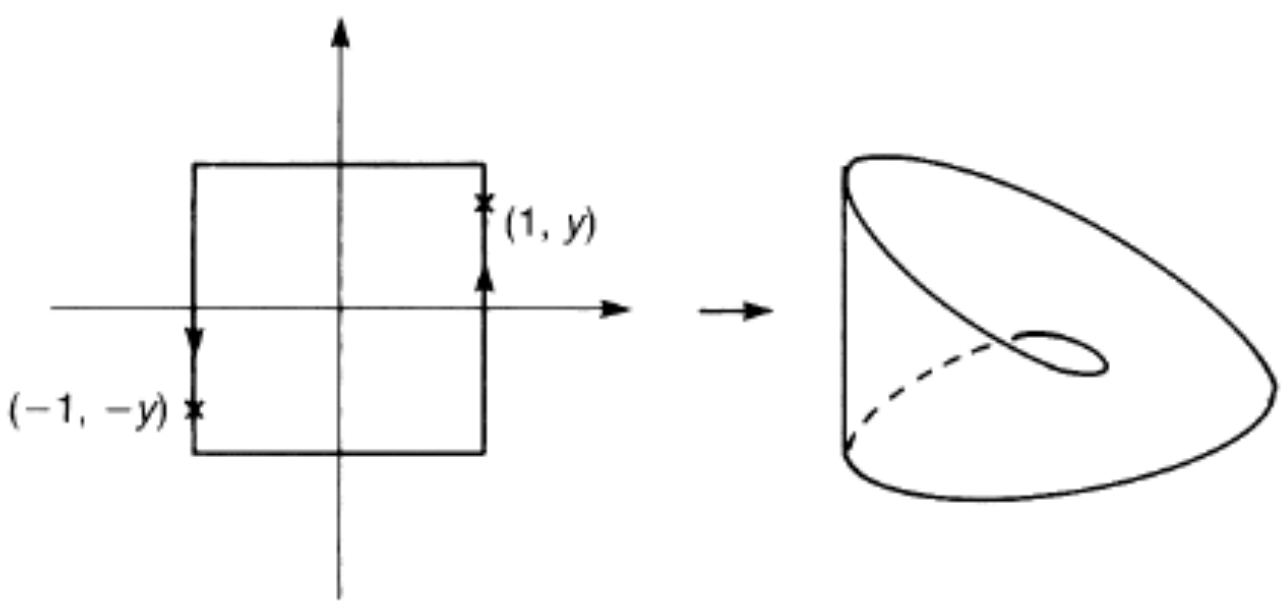


cylinder, orienterbar

Andra sätt att använda **ekvivalensrelationer** för att konstruera **topologiska mångfalder**:

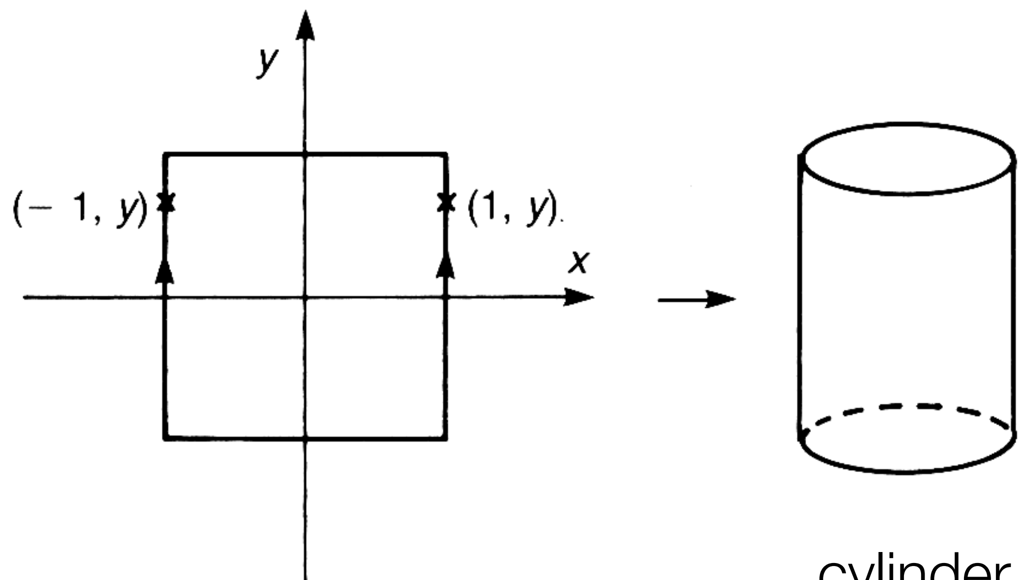


cylinder, orienterbar

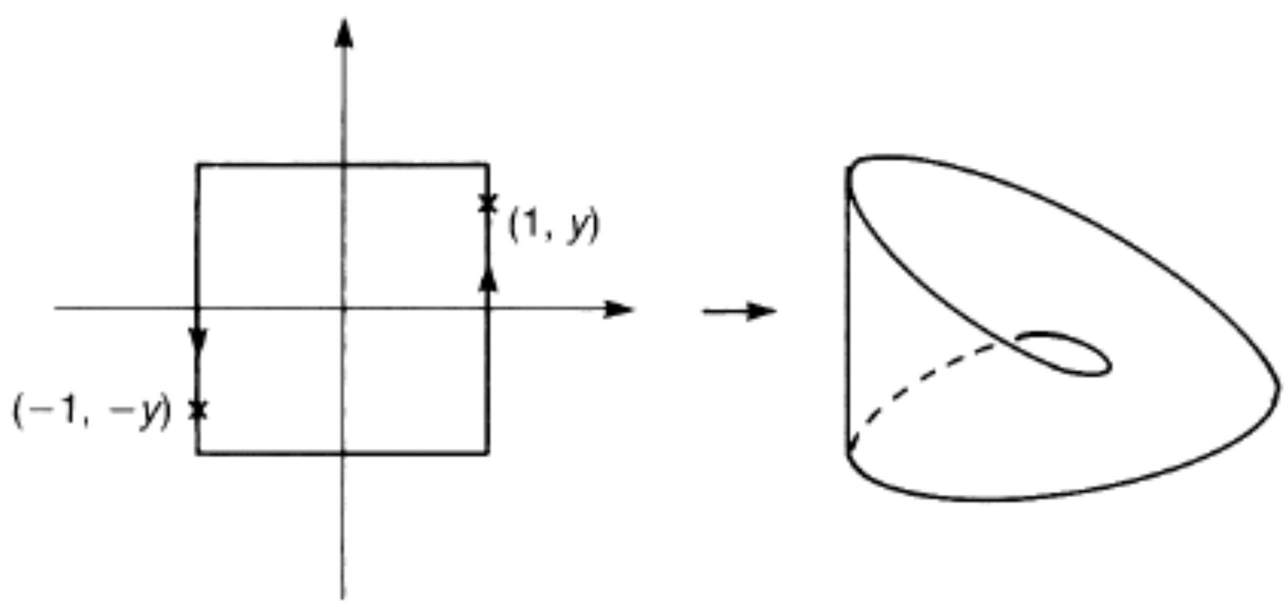


Möbiusband, ej orienterbar

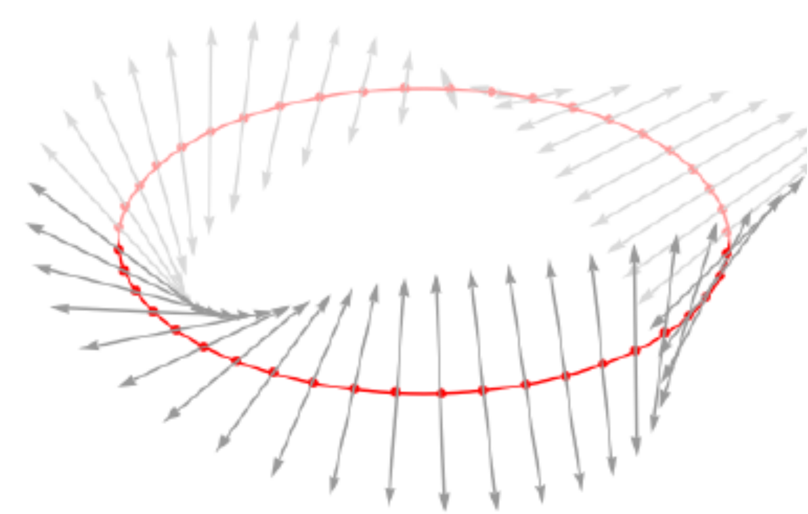
Andra sätt att använda **ekvivalensrelationer** för att konstruera **topologiska mångfalder**:



cylinder, orienterbar

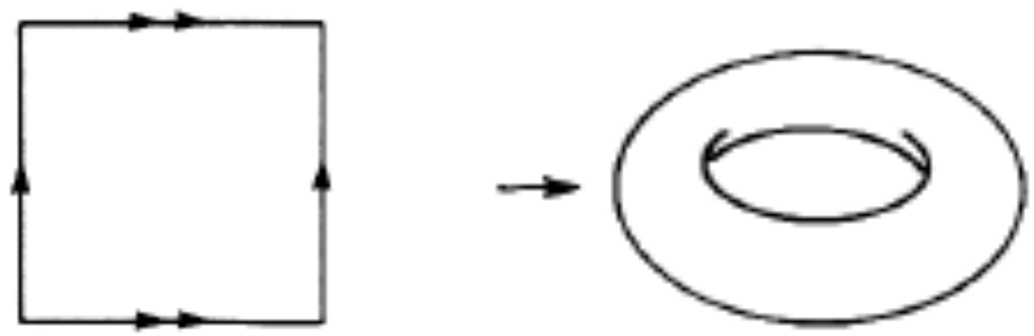


Möbiusband, ej orienterbar



Möbiusband som fiberknippe

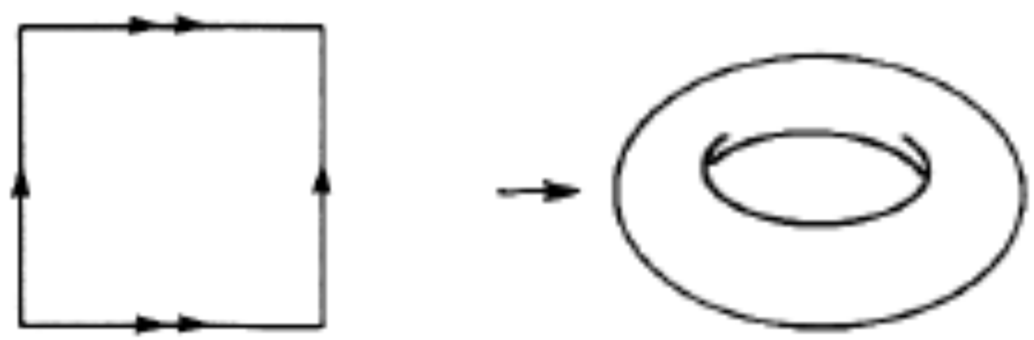
Andra sätt att använda **ekvivalensrelationer** för att konstruera **topologiska mångfalder**:



$(-1,y) \sim (1,y)$
$(x,-1) \sim (x,1)$

torus

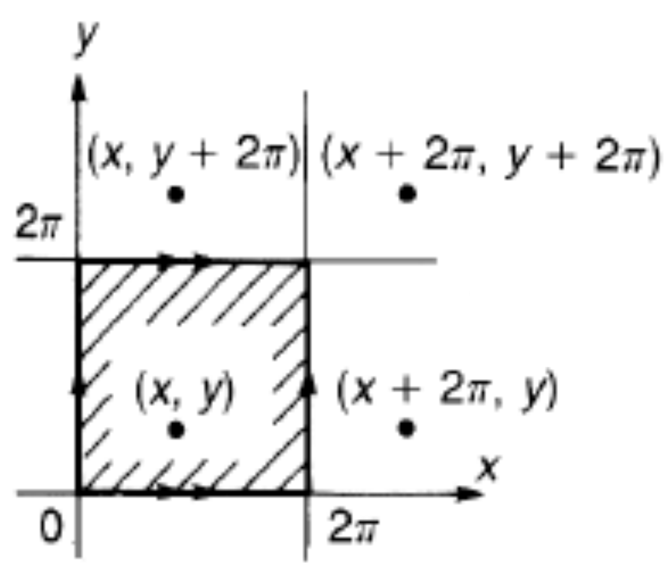
Andra sätt att använda **ekvivalensrelationer** för att konstruera **topologiska mångfalder**:



(−1,y) ~ (1,y)
(x, −1) ~ (x,1)

torus

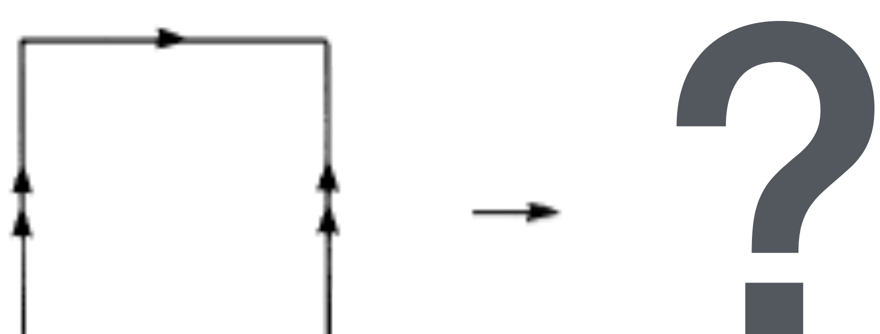
jfr. **kvotrummet *R*²**/~ med ekvivalensrelationen
$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ om $x_2 = x_1 + 2\pi n_x$ och $y_2 = y_1 + 2\pi n_y$



Andra sätt att använda **ekvivalensrelationer** för att konstruera **topologiska mångfalder**:

torus

$(-1,y) \sim (1,y)$
$(x,-1) \sim (x,1)$

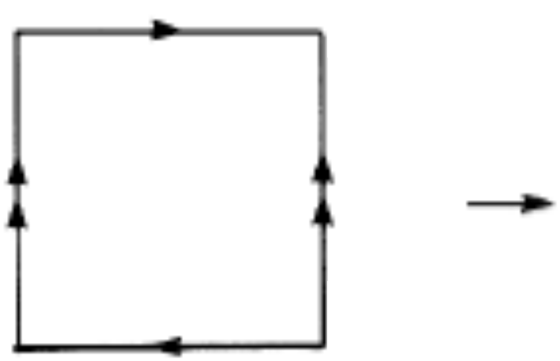


$(-1,y) \sim (1,y)$
$(-x,-1) \sim (x,1)$

Andra sätt att använda **ekvivalensrelationer** för att konstruera **topologiska mångfalder**:

(–1,y) ~ (1,y)
(x, –1) ~ (x,1)

torus

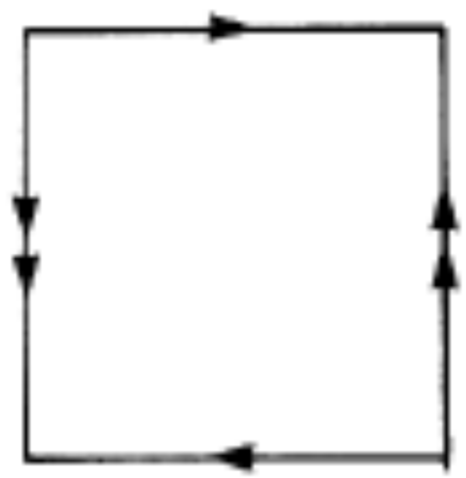


(–1,y) ~ (1,y)
(–x, –1) ~ (x,1)

Kolla in
http://www.youtube.com/watch?v=yaeyNjUPVqs

Felix Klein
1849 - 1925

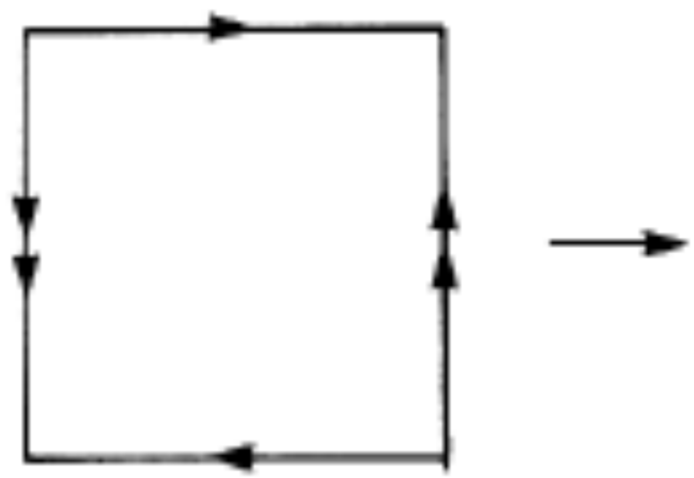
Andra sätt att använda **ekvivalensrelationer** för att konstruera **topologiska mångfalder**:



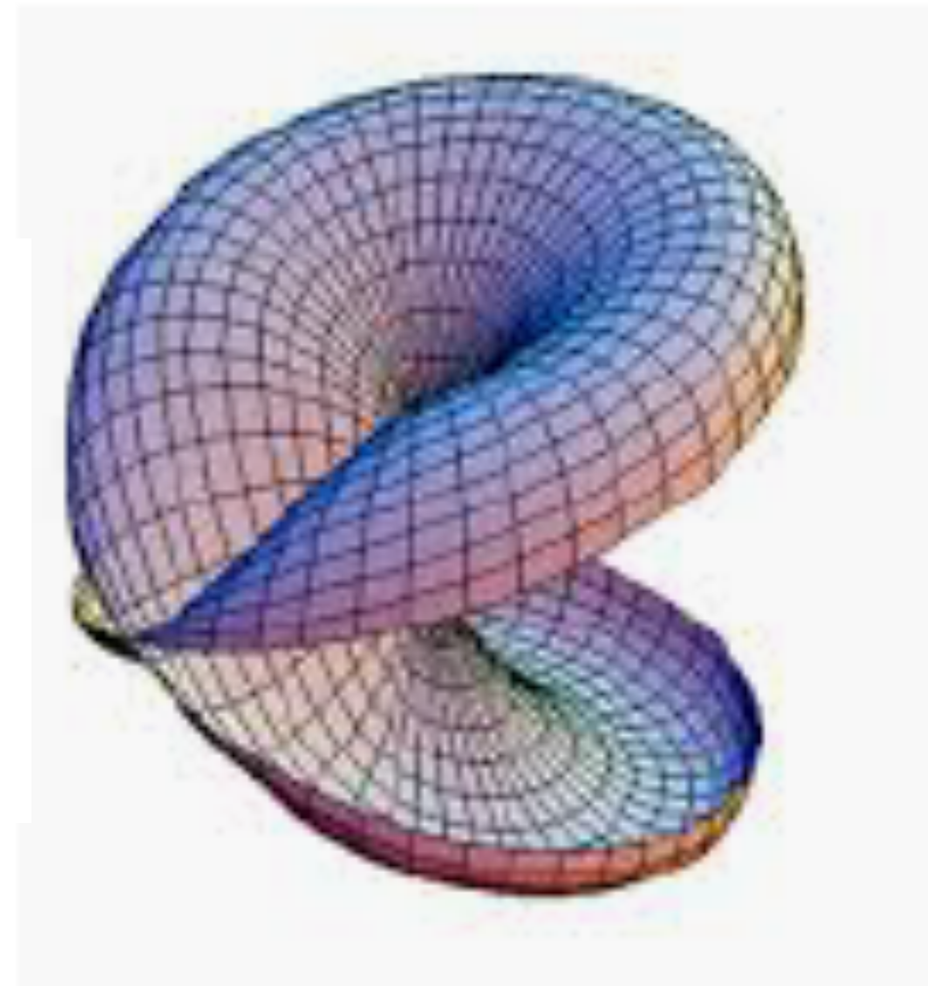
$\longrightarrow$ **?**

$(-1,-y) \sim (1,y)$
$(-x,-1) \sim (x,1)$

Andra sätt att använda **ekvivalensrelationer**
för att konstruera **topologiska mångfalder**:



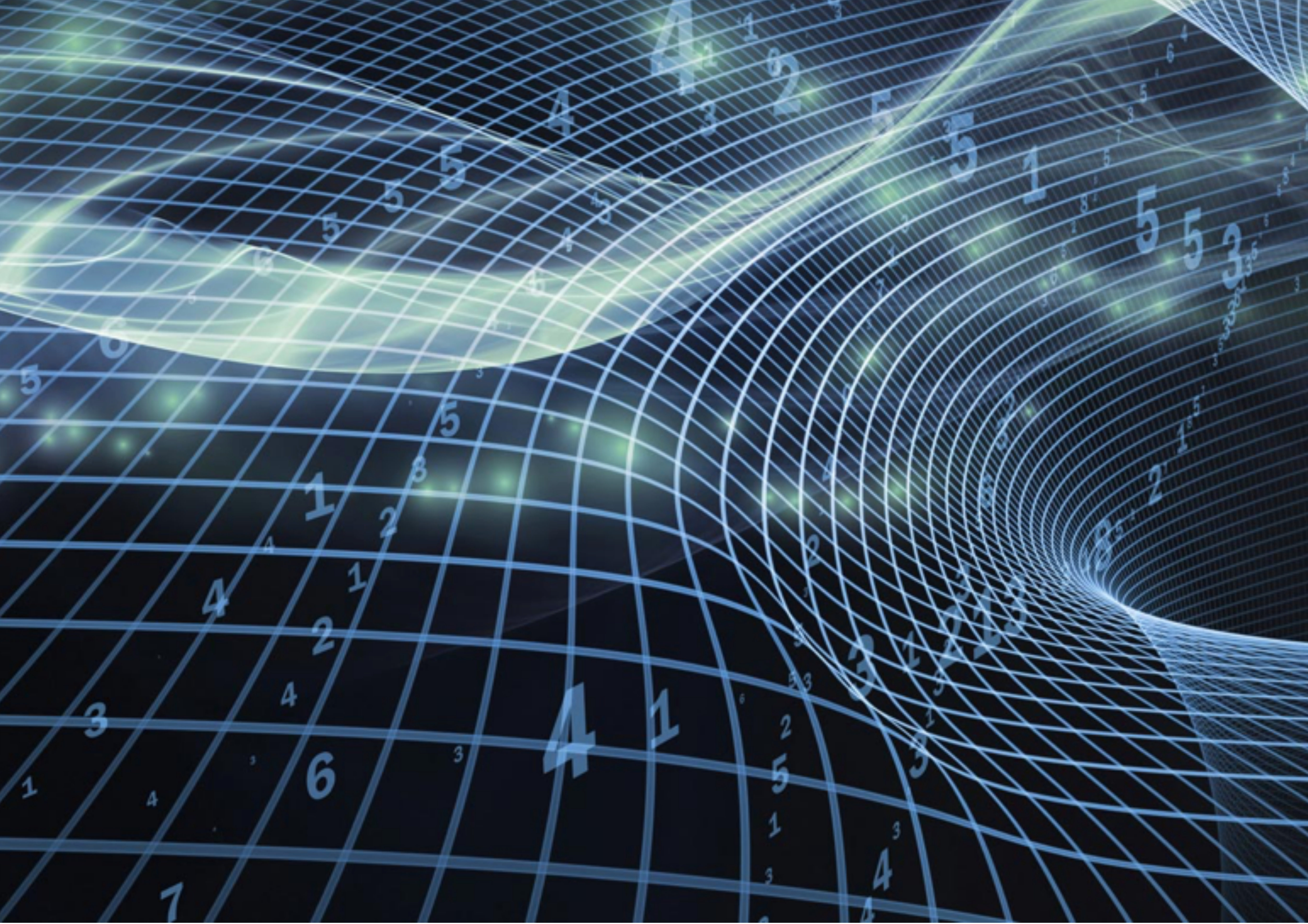
$(-1,-y) \sim (1,y)$
$(-x,-1) \sim (x,1)$



(reellt) projektivt plan

Föreläsning 18/12 (II)

Topologins ABC: Några grundläggande begrepp (forts.)



Topologins centrala problem:

KLASSIFICERING AV TOPOLOGISKA RUM SOM ÄR EKVIVALENTA UNDER KONTINUERLIGA DEFORMATIONER

$\Downarrow$

$$\exists f : X_1 \xrightarrow{\text{homomorfism}} X_2 \Rightarrow X_1 \sim X_2$$

HUR KLASSIFICERA? ÖPPET PROBLEM!

Allt vi kan säga:

invariant storhet
under en godtycklig homomorfism

OM X_1 OCH X_2 HAR OLIKA "TOPOLOGISKA INVARIANTER" SÅ ÄR $X_1 \not\sim X_2$.

(men vi vet alltså ännu inte vilka alla möjliga topologiska invarianter är!)

Topologins centrala problem:

KLASSIFICERING AV TOPOLOGISKA RUM SOM ÄR EKVIVALENTA UNDER KONTINUERLIGA DEFORMATIONER

$\Leftarrow$

$\exists f: X_1 \xrightarrow{\text{HOMEOMORFISM}} X_2 \Rightarrow X_1 \sim X_2$

HUR KLASSIFICERA? ÖPPET PROBLEM!

Allt vi kan säga:

INVARIANT STORHET UNDER EN HOMEOMORFISM

OM X_1 OCH X_2 HAR OLIKA "TOPOLOGISKA INVARIANTER" SÅ ÄR $X_1 \not\sim X_2$.

(men vi vet alltså ännu inte vilka alla möjliga topologiska invarianter är!)

EXEMPEL PÅ TOPOLOGISKA INVARIANTER:

- # SAMMANHÄNGANDE KOMPONENTER AV (X, T)
- ALGEBRAISK STRUKTUR (VI KALLAR DÅ M FÖR EN "GRUPPMÅNGFALD")
- EULERKARAKTERISTIK (EULER 1752, GAUSS 1828, BONNET 1848)
- CHERNTAL (CHERN 1944)

⋮

Topologins centrala problem:

KLASSIFICERING AV TOPOLOGISKA RUM SOM ÄR EKVIVALENTA UNDER KONTINUERLIGA DEFORMATIONER

$$\exists f : X_1 \xrightarrow{\text{HOMEOMORFISM}} X_2 \quad \Rightarrow \quad X_1 \sim X_2$$

HUR KLASSIFICERA? ÖPPET PROBLEM!

Att vi kan säga:

INVARIANT STORHET UNDER EN HOMEOMORFISM

OM X_1 OCH X_2 HAR OLIKA "TOPOLOGISKA INVARIANTER" SÅ ÄR $X_1 \nsim X_2$.

(men vi vet alltså ännu inte vilka alla möjliga topologiska invarianter är!)

EXEMPEL PÅ TOPOLOGISKA INVARIANTER:

- \# SAMMANHÄNGANDE KOMPONENTER AV $(X, \mathcal{T})$
- ALGEBRAISK STRUKTUR (VI KALLAR DÅ $\mathcal{M}$ FÖR EN "GRUPPMÅNGFALD")
- EULERKARAKTERISTIK (EULER 1752, GAUSS 1828, BONNET 1848)
- CHERNTAL (CHERN 1944)
- ⋮
- $\mathbb{Z}_2$ INVARIANT (KANE & MELE 2005)

- Z_2 INVARIANT (KANE & MELE 2005)

Charlie Kane

Gene Mele

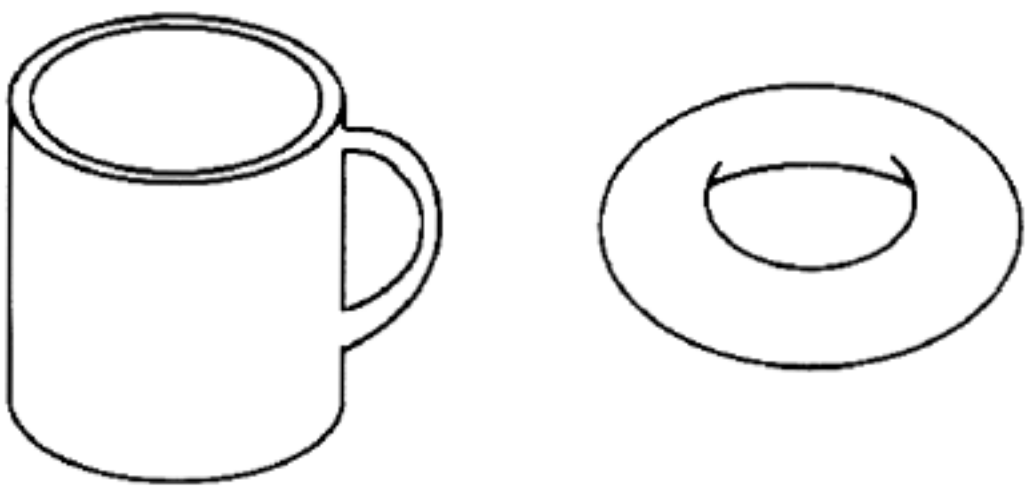
New topological invariant for a 2D time-reversal invariant quantum many-particle system (no magnetic field!)

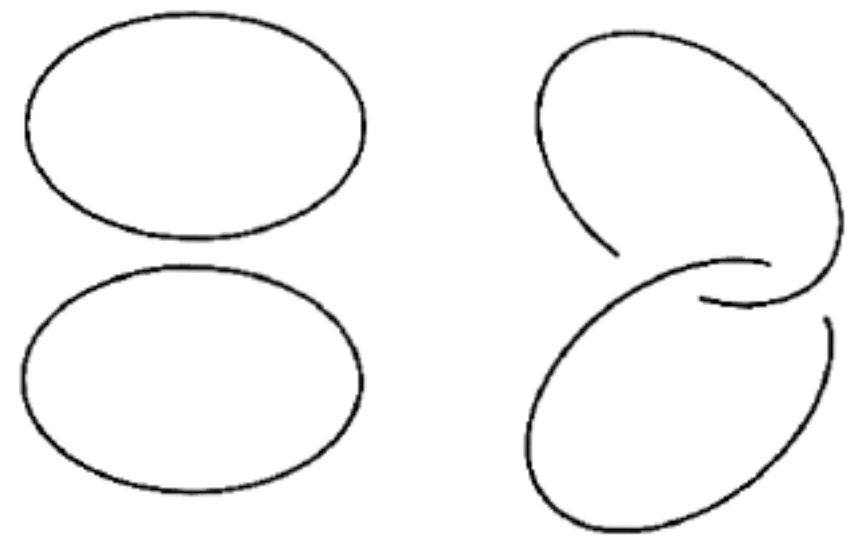
WINNERS OF THE 2019 BREAKTHROUGH PRIZE

Breakthrough Prize In Fundamental Physics
Charles Kane and Eugene Mele – University of Pennsylvania
Citation: For new ideas about topology and symmetry in physics, leading to the prediction of a new class of materials that conduct electricity only on their surface.
Description: Since the days of Ben Franklin, we've come to distinguish between electrical forms of matter that are either conducting or insulating. But that concept has been turned inside-out by Charles Kane and Gene Mele who have predicted a new class of materials – **"topological insulators"** – that are inviolable conductors of electricity on the boundary but insulators in the interior. Their discovery has important implications for the "space-race" in quantum computing and could lead to new generations of electronic devices that promise enormous energy efficiencies in computation. Topological insulators also offer a window into deep questions about the fundamental nature of matter and energy, since they exhibit particle-like excitations similar to the fundamental particles of physics (electrons and photons) but can be controlled in the laboratory in ways that electrons and photons cannot. These connections offer a new conceptual framework for controlling the flow of charge, light and even of mechanical waves in various states of matter. Unanticipated applications, too, seem inevitable: when the transistor was invented in 1947, no one could realistically predict that it would lead to information technologies that would allow terabytes of data to be crammed onto a tiny silicon chip.

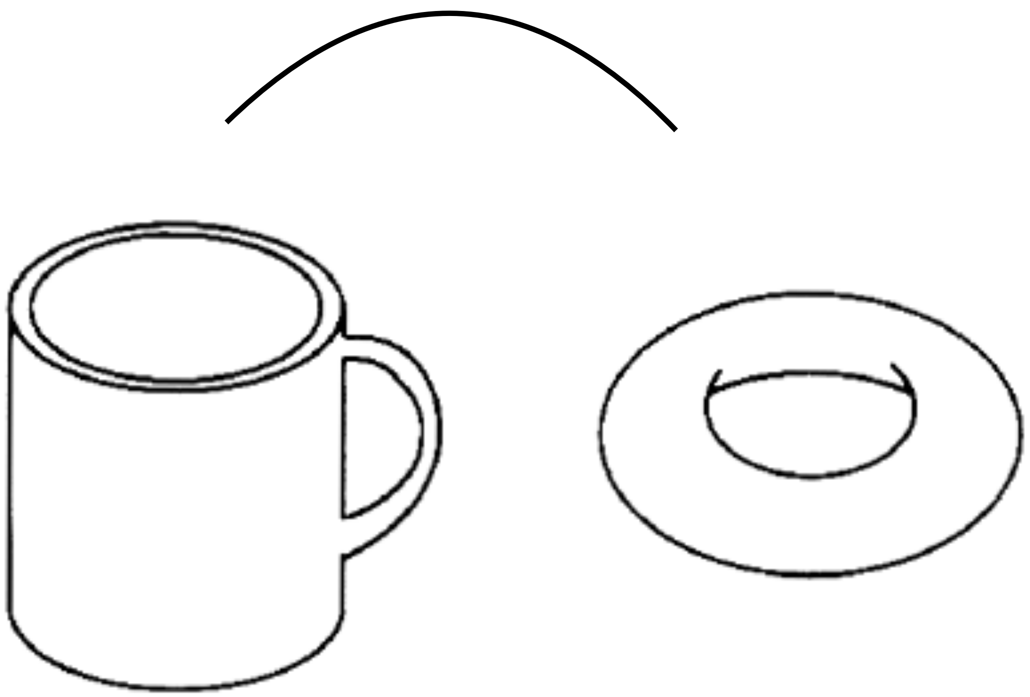
"Kane and Mele introduced new ideas of topology in quantum physics in a quite remarkable way," said Edward Witten, chair of the selection committee. "It is beautiful how this story has unfolded."

homomorfa

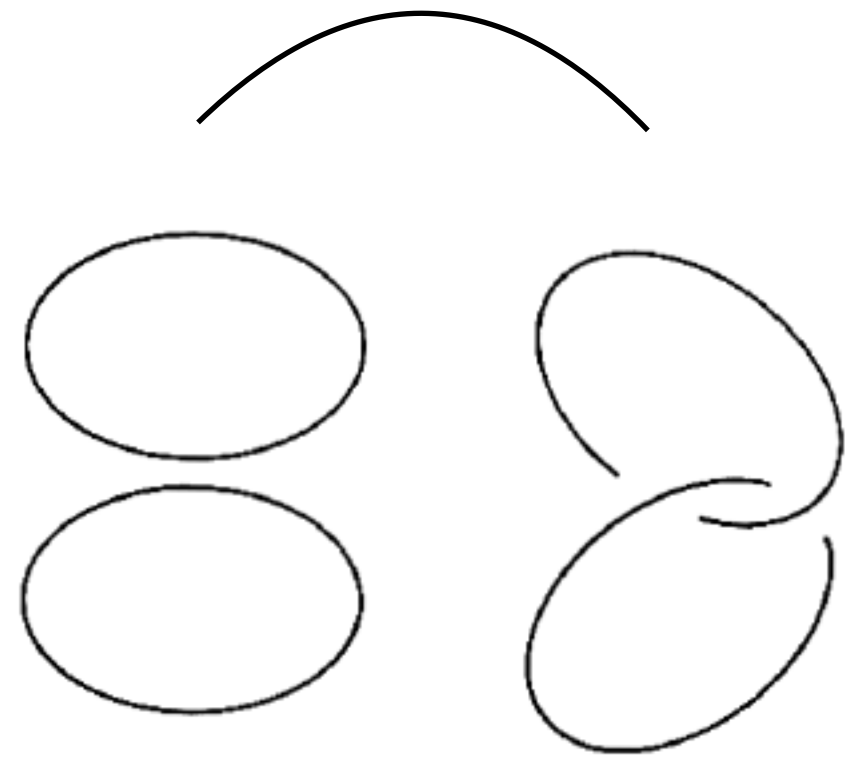




homomorfa



också homomorfa! ★



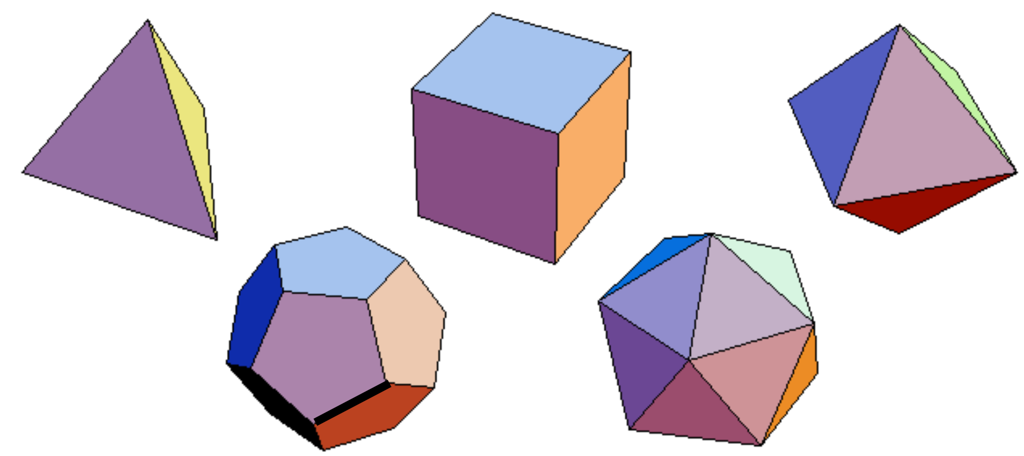
★ ser inte så ut... artifakt av ringarnas inbäddning i $\mathbb{R}^3$!

Eulerkarakteristik: prototyp för topologisk invariant

ANTAG $M \subset \mathbb{R}^3 \overset{\text{homomorf}}{\sim}$ POLYEDER $K \subset \mathbb{R}^3$

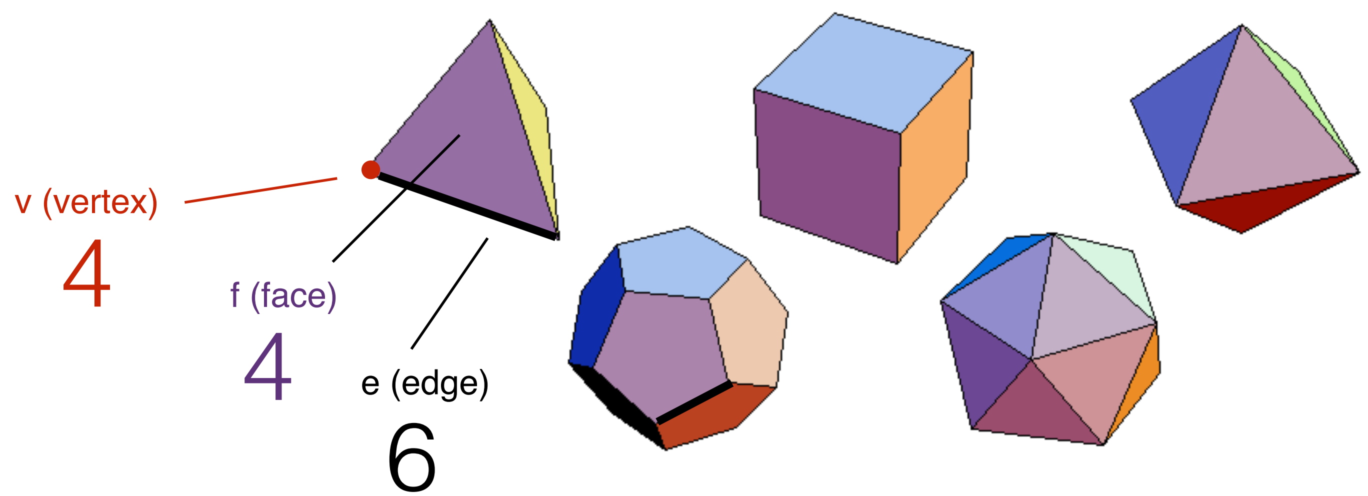
Eulerkarakteristik: prototyp för topologisk invariant

ANTAG $M \subset \mathbb{R}^3 \overset{\text{homomorf}}{\sim}$ POLYEDER $K \subset \mathbb{R}^3$



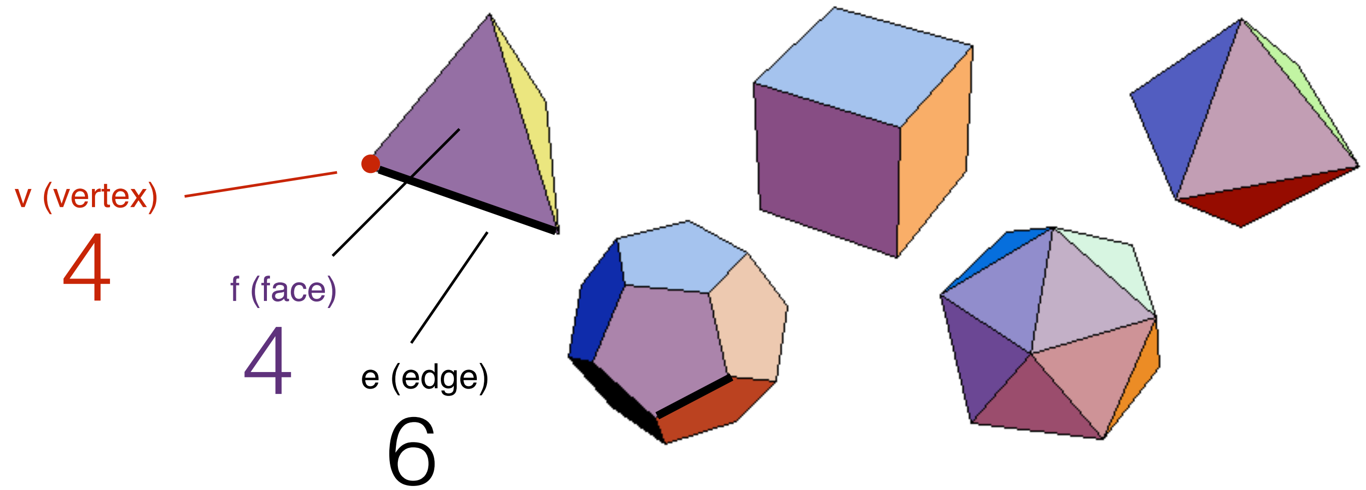
Eulerkarakteristik: prototyp för topologisk invariant

ANTAG $M \subset \mathbb{R}^3 \overset{\text{homomorf}}{\sim}$ POLYEDER $K \subset \mathbb{R}^3$



Eulerkarakteristik: prototyp för topologisk invariant

ANTAG $M \subset \mathbb{R}^3 \overset{\text{homomorf}}{\sim}$ POLYEDER $K \subset \mathbb{R}^3$



DEFINITION EULERKARAKTERISTIK $\chi(M)$

$= \underset{v}{\#\text{ HÖRN PÅ } K} - \underset{e}{\#\text{ KANTER PÅ } K}$

$+ \underset{f}{\#\text{ SIDOYTOR PÅ } K}$

$= v - e + f$

POINCARÉ–ALEXANDER TEOREMET:

$\chi(M)$ ÄR OBEROENDE AV VALET AV K
SÅ LÄNGE $M \sim K$.

Innan vi går vidare:

Några enkla beräkningar av Eulerkarakteristiker

$\chi(\cdot) = 1$

$\chi(-) = 2 - 1 = 1$

ty $S^1 \sim \triangle$

$\chi(\blacktriangle) = 3 - 3 + 1 = 1$

$\chi(\bigcirc) = \chi(S^1) = \chi(\triangle) = 3 - 3 = 0$

$\chi(\;) = \chi(S^2) = \chi(\;) = 4 - 6 + 4 = 2$

$S^2 \sim$

$\chi(\;) = \chi(S^2) = \chi(\;) = 8 - 12 + 6 = 2$

$S^2 \sim$

Innan vi går vidare:
Några enkla beräkningar av Eulerkarakteristiker

$\chi(\cdot) = 1$

$\chi(-) = 2-1 = 1$

$\chi(\blacktriangle) = 3-3+1 = 1$

$\chi(\bigcirc) = \chi(S^1) = \chi(\triangle) = 3-3 = 0$ ty $S^1 \sim \triangle$

$\chi(\bigoplus) = \chi(S^2) = \chi(\triangle) = 4-6+4 = 2$

$S^2 \sim \triangle$

$\chi(\bigoplus) = \chi(S^2) = \chi(\square) = 8-12+6 = 2$

$S^2 \sim \square$

Eulers berömda polyederformel (1752)

Låt K vara en konvex polyeder. Då gäller:

$$\chi(K) = 2$$

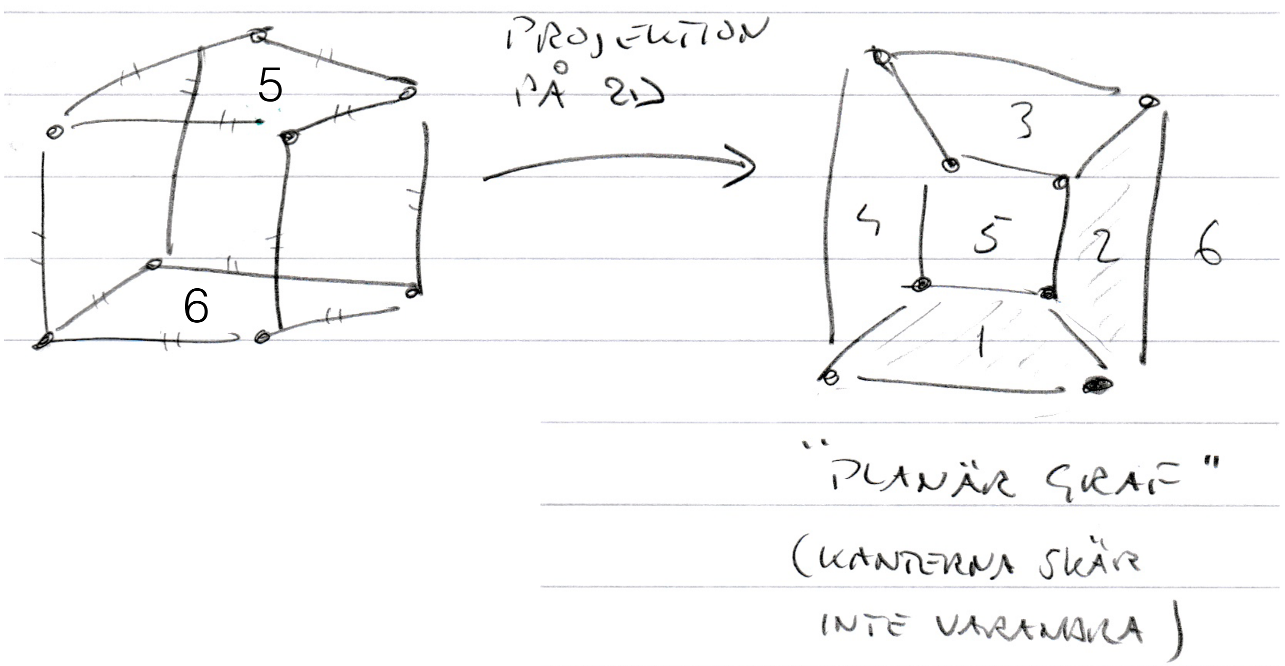
Leonhard Euler
1707-1783

Eulers berömda polyederformel (1752)

Låt K vara en konvex polyeder. Då gäller:

$$\chi(K) = 2$$

Bevisidé (1 av 17 publicerade!):

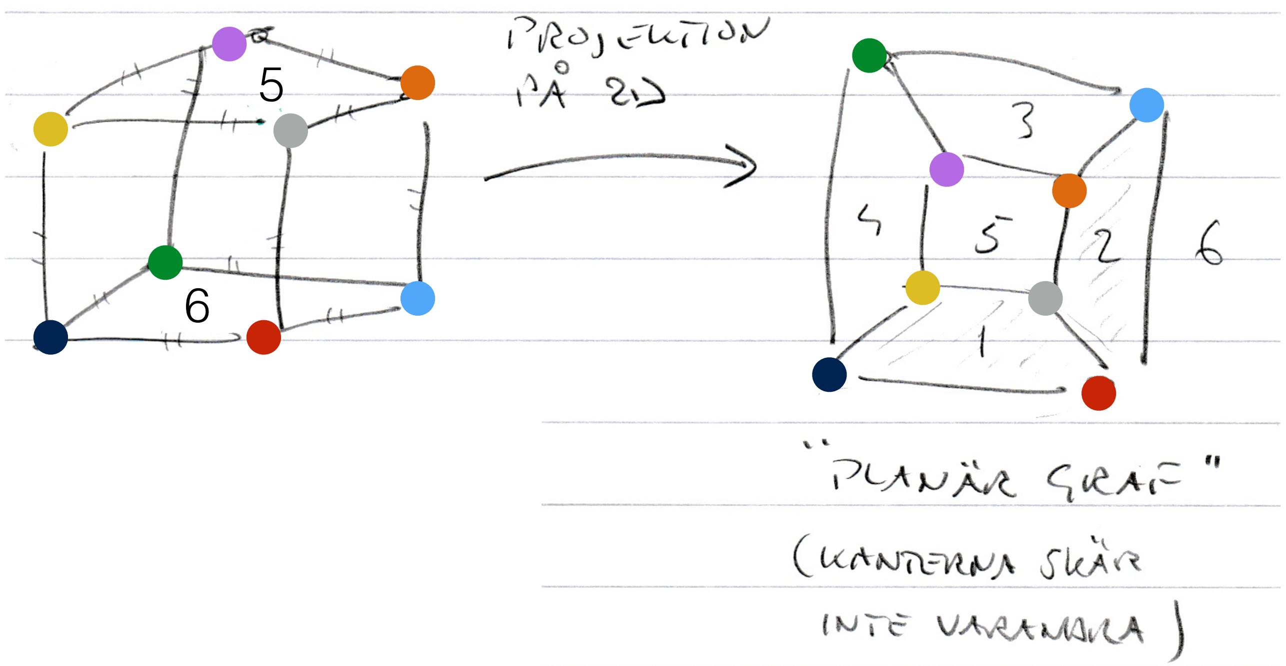


Eulers berömda polyederformel (1752)

Låt K vara en konvex polyeder. Då gäller:

$$\chi(K) = 2$$

Bevisidé (1 av 17 publicerade!):

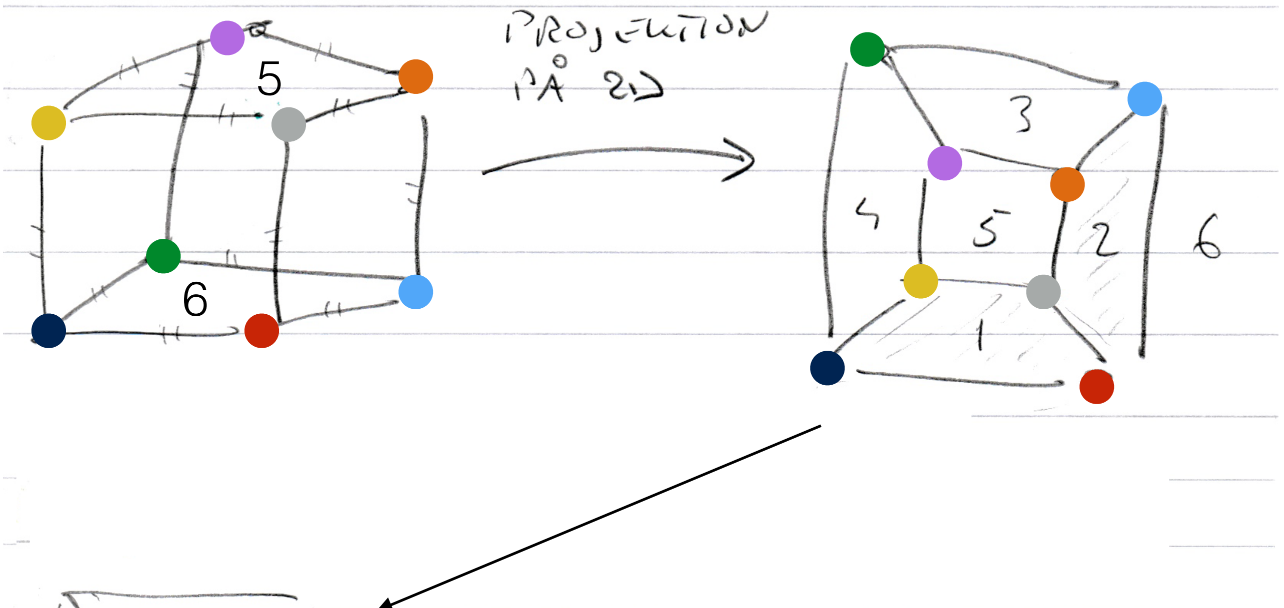


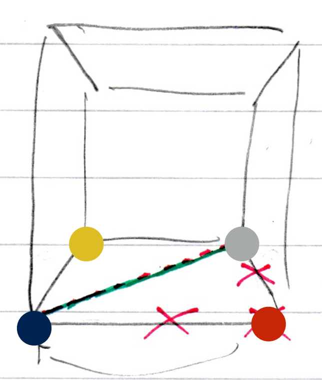
Eulers berömda polyederformel (1752)

Låt K vara en konvex polyeder. Då gäller:

$$\chi(K) = 2$$

Bevisidé (1 av 17 publicerade!):





$$\begin{cases} v \to v-1 \\ e \to e-1 \\ f = f \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad v-e+f \longrightarrow (v-1)-(e-1)+f$$

$$= v-e+f$$

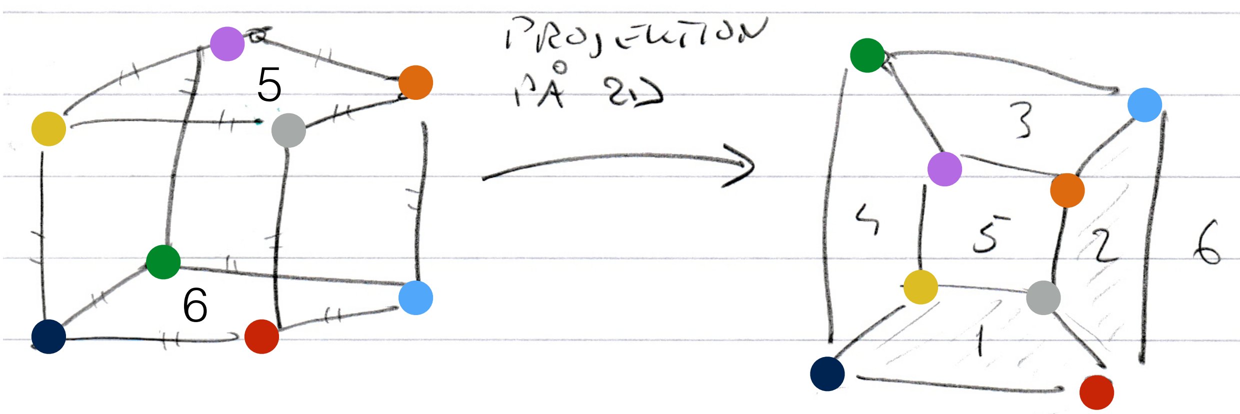
INVARIANT UNDER KONTRAKTION!

Eulers berömda polyederformel (1752)

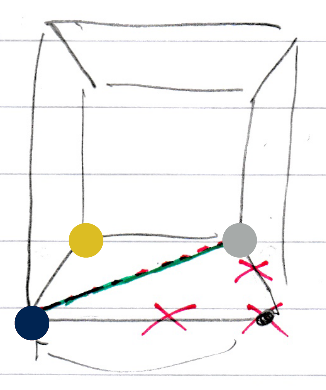
Låt K vara en konvex polyeder. Då gäller:

$$\chi(K) = 2$$

Bevisidé (1 av 17 publicerade!):



KONTRAHERA TVÅ HÖRN I GRAFEN!



$$\begin{cases} v \to v - 1 \\ e \to e - 1 \\ f = f \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad v - e + f \longrightarrow (v-1) - (e-1) + f$$

$$= v - e + f$$

INVARIANT UNDER KONTRAKTION!

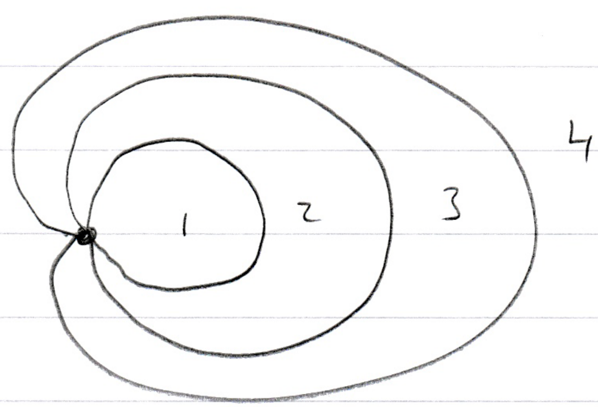
Eulers berömda polyederformel (1752)

Låt K vara en konvex polyeder. Då gäller:

$$\chi(K) = 2$$

Bevisidé (1 av 17 publicerade!):

ITERERA TILLS VI HAR BARA <u>ETT</u> HÖRN KVAR.



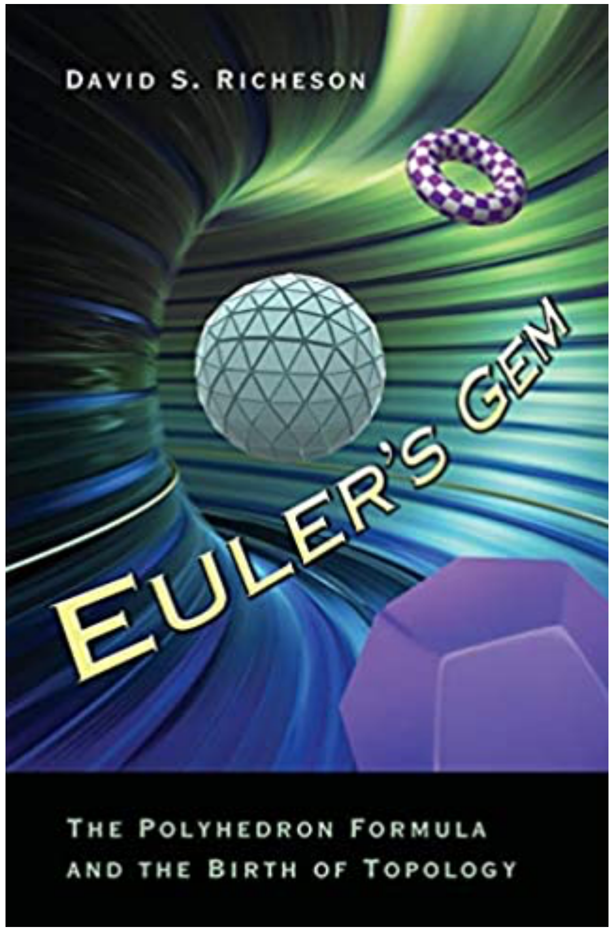
$v = 1$
$e = 3$
$f = 4$

$v - e + f = 1 - 3 + 4 = 2$

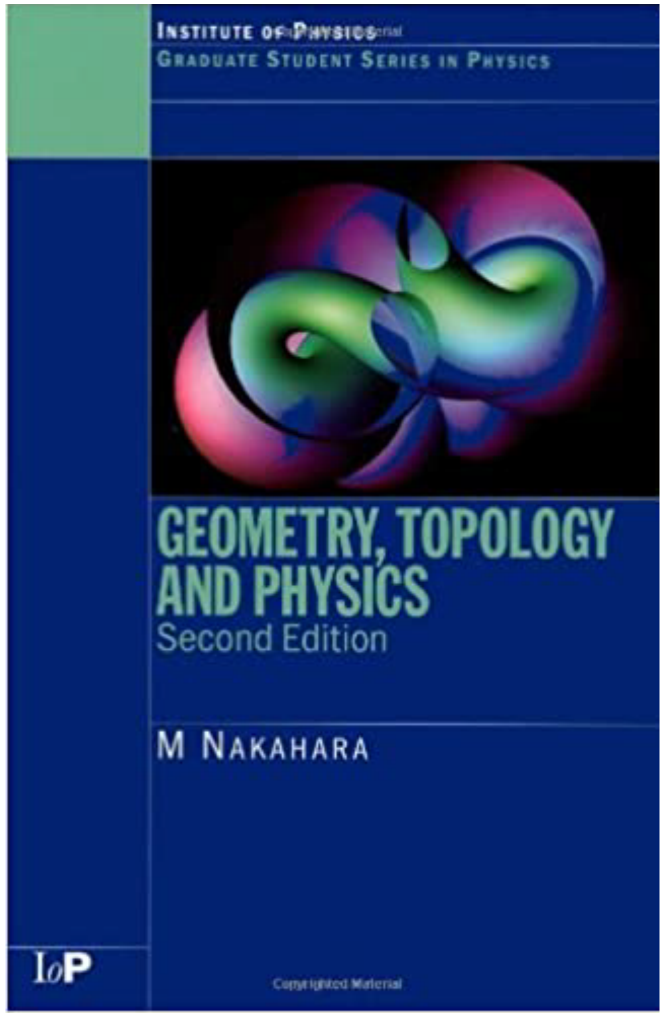
<u>ALLMÄNT</u> : $f = e + 1$

$\Rightarrow \quad v - e + (e+1) = v + 1 = 1 + 1 = \underline{\underline{2}}$

Q.E.D.



D. S. Richeson, *Euler's Gem* (2012)



M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics* (2003)

Slut