Nytt ämne: Integralekvationer

Först litet bakgrund…

Fysikens grundläggande ekvationer är **differentialekvationer**

Klassisk fysik

Partikelmekanik: Hamiltons ekvationer
Elektrodynamik: Maxwells ekvationer
Hydrodynamik: Navier-Stokes ekvation
(Allmän) relativitetsteori: Einsteins fältekvationer

Kvantfysik

Kvantmekanik (icke-relativistisk): Schrödingerekvationen
Kvantfältteori (relativistisk): Diracekvationen (med gaugefält),...

… och många, många fler i studiet av olika modellsystem (”effektiva teorier”)

Differentialekvationer kan skrivas om som **integralekvationer**

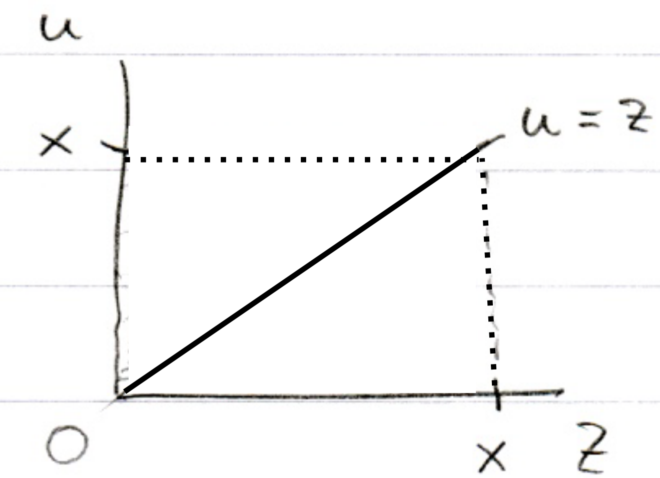
EX $\quad y''(x) = g(x, y(x))$

INTEGRERA!

$$y'(x) = \int_0^x g(z, y(z))\, dz + C_1$$

INTEGRERA EN GÅNG TILL!

$$y(x) = \int_0^x du \int_0^u dz\, g(z, y(z)) + C_1 x + C_2$$



Differentialekvationer kan skrivas om som **integralekvationer**

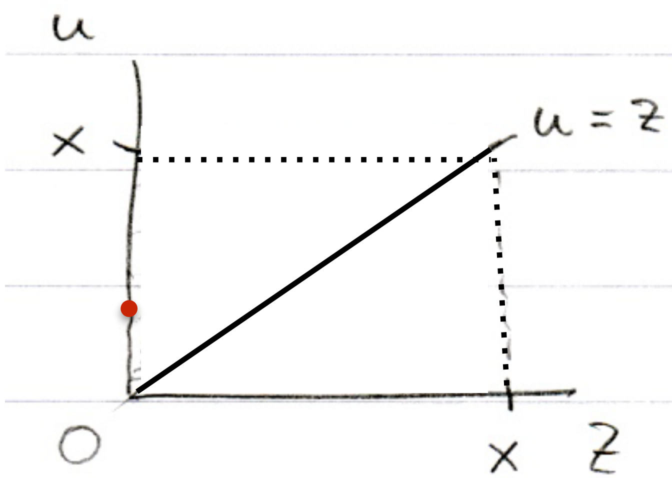
EX $\quad y''(x) = g(x, y(x))$

INTEGRERA!

$$y'(x) = \int_0^x g(z, y(z))\, dz + C_1$$

INTEGRERA EN GÅNG TILL!

$$y(x) = \int_0^x du \int_0^u dz\, g(z, y(z)) + C_1 x + C_2$$



Differentialekvationer kan skrivas om som **integralekvationer**

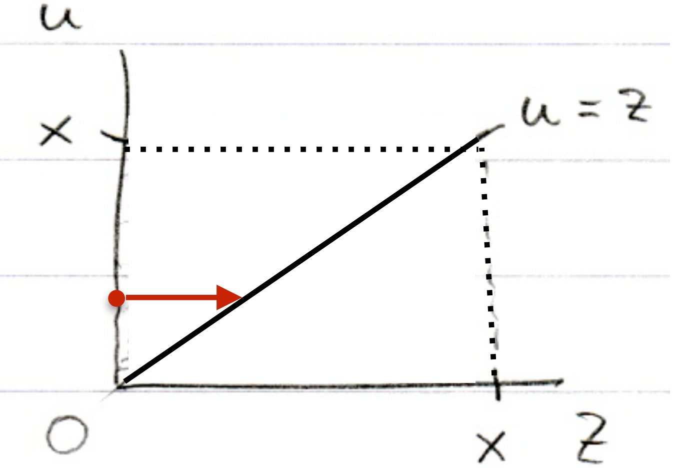
EX $$y''(x) = g(x, y(x))$$

INTEGRERA!

$$y'(x) = \int_0^x g(z, y(z))\,dz + C_1$$

INTEGRERA EN GÅNG TILL!

$$y(x) = \int_0^x du \int_0^u dz\, g(z, y(z)) + C_1 x + C_2$$



Differentialekvationer kan skrivas om som **integralekvationer**

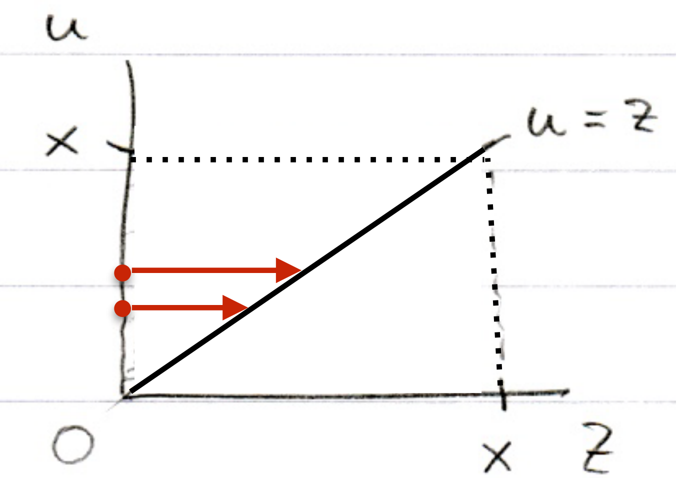
EX $\quad y''(x) = g(x, y(x))$

INTEGRERA!

$$y'(x) = \int_0^x g(z, y(z))\,dz + C_1$$

INTEGRERA EN GÅNG TILL!

$$y(x) = \int_0^x du \int_0^u dz\, g(z, y(z)) + C_1 x + C_2$$



Differentialekvationer kan skrivas om som **integralekvationer**

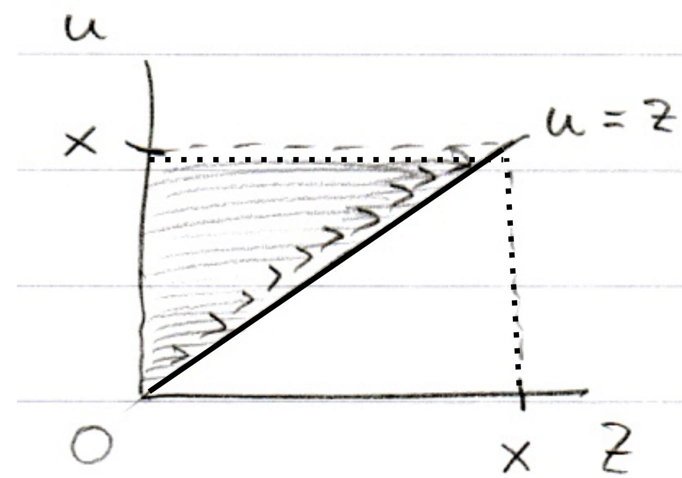
EX $\quad y''(x) = g(x, y(x))$

INTEGRERA!

$$y'(x) = \int_0^x g(z, y(z))\, dz + C_1$$

INTEGRERA EN GÅNG TILL!

$$y(x) = \int_0^x du \int_0^u dz\, g(z, y(z)) + C_1 x + C_2$$



Differentialekvationer kan skrivas om som **integralekvationer**

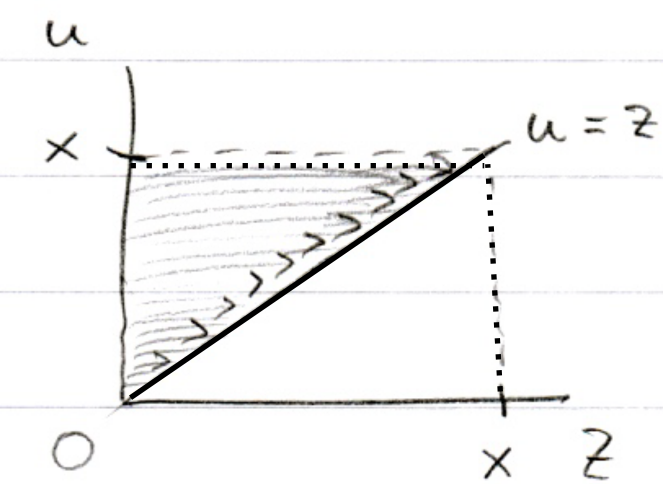
EX $\quad y''(x) = g(x, y(x))$

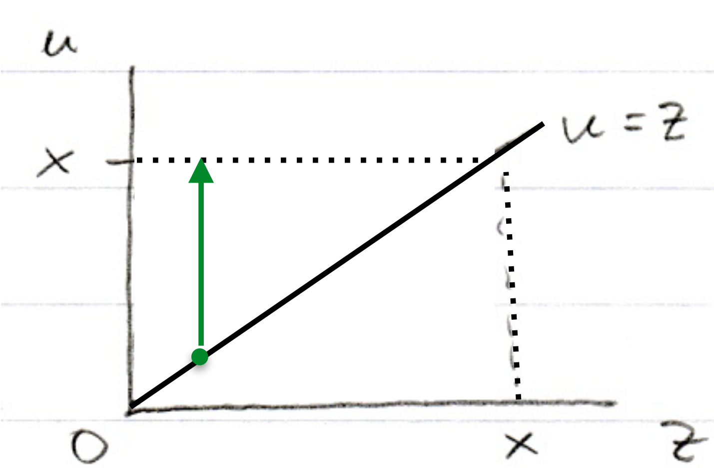
INTEGRERA!

$$y'(x) = \int_0^x g(z, y(z))\, dz + C_1$$

INTEGRERA EN GÅNG TILL!

$$y(x) = \int_0^x du \int_0^u dz\, g(z, y(z)) + C_1 x + C_2$$





Differentialekvationer kan skrivas om som **integralekvationer**

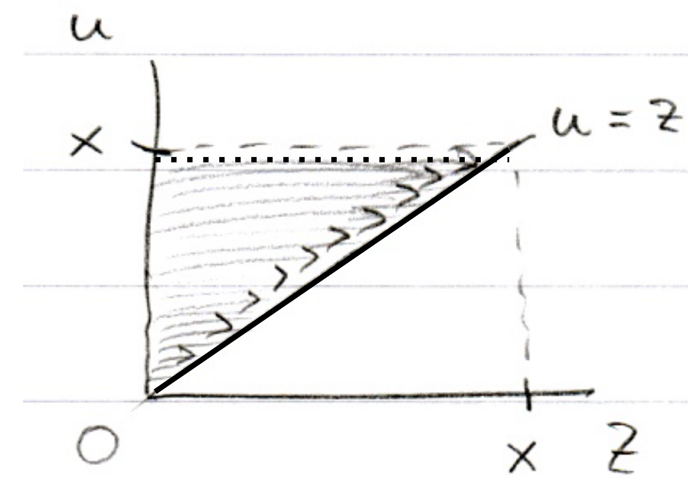
EX $y''(x) = g(x, y(x))$

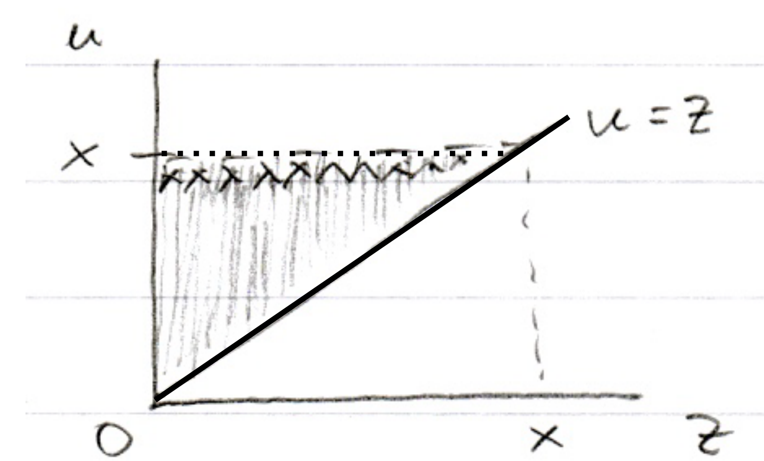
INTEGRERA!

$$y'(x) = \int_0^x g(z, y(z))\, dz + C_1$$

INTEGRERA EN GÅNG TILL!

$$y(x) = \int_0^x du \int_0^u dz\, g(z, y(z)) + C_1 x + C_2$$





Differentialekvationer kan skrivas om som **integralekvationer**

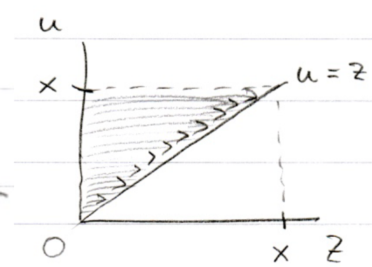
EX $\quad y''(x) = g(x, y(x))$

INTEGRERA!

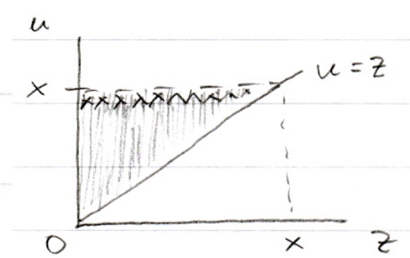
$$y'(x) = \int_0^x g(z, y(z))\,dz + C_1$$

INTEGRERA EN GÅNG TILL!

$$y(x) = \int_0^x du \int_0^u dz\, g(z, y(z)) + C_1 x + C_2$$



$$= \int_0^x dz\, g(z, y(z)) \int_z^x du + C_1 x + C_2$$



$$= \int_0^x (x - z)\, g(z, y(z))\,dz + C_1 x + C_2$$

Differentialekvationer kan skrivas om som **integralekvationer**

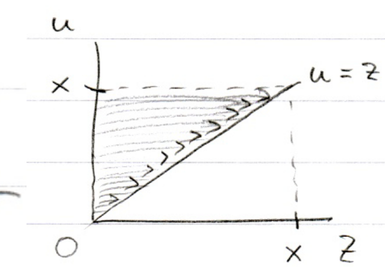
EX $\quad y''(x) = g(x, y(x))$

INTEGRERA!

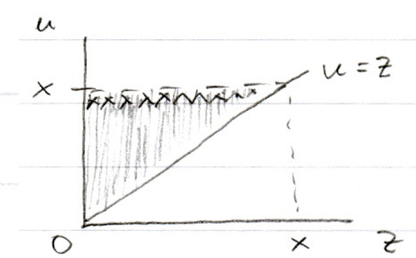
$$y'(x) = \int_0^x g(z, y(z))\, dz + C_1$$

INTEGRERA EN GÅNG TILL!

$$y(x) = \int_0^x du \int_0^u dz\, g(z, y(z)) + C_1 x + C_2$$



$$= \int_0^x dz\, g(z, y(z)) \int_z^x du + C_1 x + C_2$$



$$= \int_0^x \underbrace{(x - z)}_{K(x,z)\ \text{"integralkärna"}} g(z, y(z))\, dz + \underbrace{C_1 x + C_2}_{f(x)}$$

Differentialekvationer kan skrivas om som **integralekvationer**

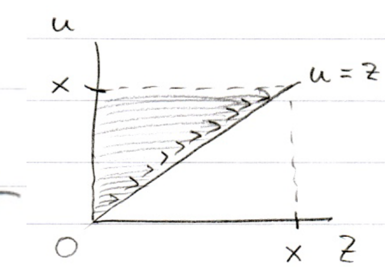
EX $\quad y''(x) = g(x, y(x))$

INTEGRERA!

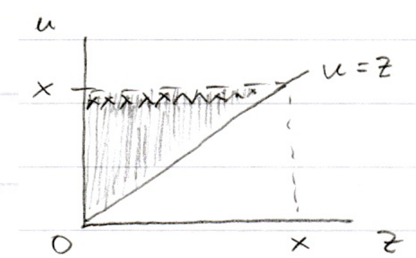
$$y'(x) = \int_0^x g(z, y(z))\, dz + C_1$$

INTEGRERA EN GÅNG TILL!

$$y(x) = \int_0^x du \int_0^u dz\, g(z, y(z)) + C_1 x + C_2$$



$$= \int_0^x dz\, g(z, y(z)) \int_z^x du + C_1 x + C_2$$



$$= \int_0^x \underbrace{(x-z)}_{K(x,z)} g(z, y(z))\, dz + \underbrace{C_1 x + C_2}_{f(x)}$$

"integralkärna"

Differentialekvationer kan skrivas om som **integralekvationer**

EX $y''(x) = g(x, y(x))$

INTEGRERA!

$$y'(x) = \int_0^x g(z, y(z))\, dz + C_1$$

INTEGRERA EN GÅNG TILL!

$$y(x) = f(x) + \int_0^x K(x,z)\, g(z, y(z))\, dz$$

Inbyggda randvillkor: fixeras genom val av C_1 och C_2

icke-linjär Volterra ekvation av andra typen

Den okända funktionen *y* förekommer både innanför och utanför integraltecknet. Allmänt: en integralekvation **definieras** av att den okända funktionen förekommer innanför integraltecknet.

Fyra klasser av **linjära integralekvationer**

Fredholms integralekvation av första typen

$$f(x) = \int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt$$

Fredholm av andra typen

$$\varphi(x) = f(x) + \underset{\in \mathbb{C}}{\lambda} \int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt$$

Volterra av första typen

$$f(x) = \int_a^x K(x,t)\varphi(t)\,dt$$

Volterra av andra typen

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)\varphi(t)\,dt$$

Fyra klasser av **linjära integralekvationer**

Fredholms integralekvation av första typen

$$f(x) = \int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt$$

Fredholm av andra typen

$$\varphi(x) = f(x) + \underset{\substack{\uparrow \\ \in \mathbb{C}}}{\lambda} \int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt$$

Volterra av första typen

$$f(x) = \int_a^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt$$

Volterra av andra typen

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt$$

Ivar Fredholm
1866-1927

Fyra klasser av **linjära integralekvationer**

Fredholms integralekvation av första typen

$$f(x) = \int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt$$

Fredholm av andra typen

$$\varphi(x) = f(x) + \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{C}} \int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt$$

Ivar Fredholm
1866-1927

Jfr. linjär responsteori

$$\underbrace{X(x)}_{\text{RESPONS}} = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{G(x,t)}_{\text{GREENFUNKTION}}\,\underbrace{F(t)}_{\text{STÖRNING}}\,dt$$

ANTAG ATT X ÄR KÄND (LIKSOM G)

HUR IDENTIFIERA F ? → FREDHOLM AV FÖRSTA TYPEN

Särskilt viktig integralekvation: **Fredholm av andra typen**

$$\varphi(x) = f(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt$$

Fredholm av andra typen med separabel kärna

$$\varphi(x) = f(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt$$

ANTAG : K SEPARABEL (VANLIGT SPECIALFALL)

$$K(x,t) = \sum_{j=1}^{n} M_j(x) N_j(t)$$

Fredholm av andra typen med separabel kärna

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt$$

ANTAG: K SEPARABEL (VANLIGT SPECIALFALL)

$$K(x,t) = \sum_{j=1}^{n} M_j(x)\,N_j(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j\,M_j(x) \qquad (1)$$

$$c_j \equiv \int_a^b N_j(t)\,\varphi(t)\,dt$$

MULTIPLICERA (1) MED $N_i(x)$ OCH INTEGRERA: $\int_a^b \ldots\, dx$

$$\Downarrow$$

$$c_i = b_i + \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,c_j$$

$$b_i = \int_a^b N_i(x)\,f(x)\,, \quad a_{ij} = \int_a^b N_i(x)\,M_j(x)\,dx \qquad (2)$$

Fredholm av andra typen med separabel kärna

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j M_j(x) \qquad (1)$$

$$c_j \equiv \int_a^b N_j(t)\,\varphi(t)\,dt$$

MULTIPLICERA (1) MED $N_i(x)$ OCH INTEGRERA: $\int_a^b \dots \, dx$

$\Downarrow$

$$c_i = b_i + \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j$$

$$b_i = \int_a^b N_i(x) f(x), \quad a_{ij} = \int_a^b N_i(x) M_j(x)\,dx \qquad (2)$$

SKRIV PÅ MATRISFORM: $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Unik icke-trivial lösning endast om $\det|1 - \lambda A| \neq 0$

$\Downarrow$

LINJÄRT EKVATIONSSYSTEM

$$(1 - \lambda A)\,c = b \qquad (3)$$

LÖS FÖR c! STOPPA IN I (1)! PROBLEMET LÖST!

Fredholm av andra typen med separabel kärna

Finns det alltid en lösning?
Svar: ”Fredholmalternativet”

Fredholm av andra typen med separabel kärna

Finns det alltid en lösning?
Svar: "Fredholmalternativet"

För varje $\lambda \neq 0$: **Antingen** så har den inhomogena ekvationen $(f \neq 0)$ en unik lösning för varje val av f
eller så har den homogena ekvationen $(f = 0)$ åtminstone en icke-trivial lösning.

Fredholm av andra typen med separabel kärna

Finns det alltid en lösning?
Svar: ”Fredholmalternativet”

För varje $\lambda \neq 0$: **Antingen** så har den inhomogena ekvationen $(f \neq 0)$ en unik lösning för varje val av f **eller** så har den homogena ekvationen $(f = 0)$ åtminstone en icke-trivial lösning.

Generalisering?
Varje ”tillräckligt snäll” integralkärna kan skrivas som

$$K(x,t) = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} M_j(x) N_j(t)$$

Fredholm av andra typen med separabel kärna

Finns det alltid en lösning?
Svar: ”Fredholmalternativet”

För varje $\lambda \neq 0$: **Antingen** så har den inhomogena ekvationen $(f \neq 0)$ en unik lösning för varje val av f **eller** så har den homogena ekvationen $(f = 0)$ åtminstone en icke-trivial lösning.

styckvis kontinuerlig (?)
Hilbert (1904)

Generalisering?
Varje ”tillräckligt snäll” integralkärna kan skrivas som

$$K(x,t) = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} M_j(x) N_j(t)$$

Fredholm av andra typen med separabel kärna

Finns det alltid en lösning?
Svar: "Fredholmalternativet"

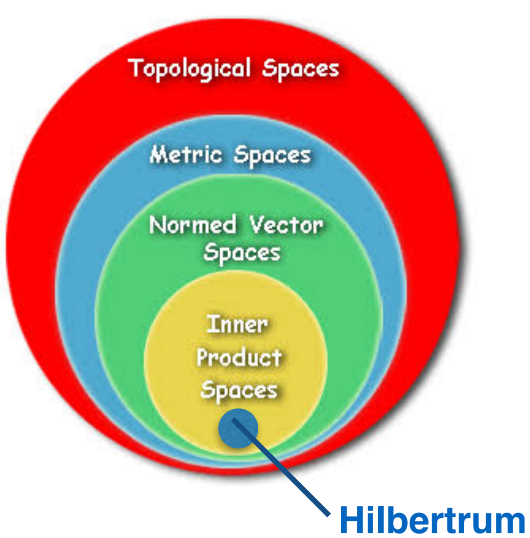
För varje $\lambda \neq 0$: **Antingen** så har den inhomogena ekvationen $(f \neq 0)$ en unik lösning för varje val av f **eller** så har den homogena ekvationen $(f = 0)$ åtminstone en icke-trivial lösning.

styckvis kontinuerlig (?)
Hilbert (1904)

Generalisering?
Varje "tillräckligt snäll" integralkärna kan skrivas som

$$K(x,t) = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} M_j(x) N_j(t)$$

Teori för Hilbertrum



Fredholm av andra typen med separabel kärna

Finns det alltid en lösning?
Svar: "Fredholmalternativet"

För varje $\lambda \neq 0$: **Antingen** så har den inhomogena ekvationen $(f \neq 0)$ en unik lösning för varje val av f
eller så har den homogena ekvationen $(f = 0)$ åtminstone en icke-trivial lösning.

styckvis kontinuerlig (?)
Hilbert (1904)

Generalisering?
Varje "tillräckligt snäll" integralkärna kan skrivas som

$$K(x,t) = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} M_j(x) N_j(t)$$

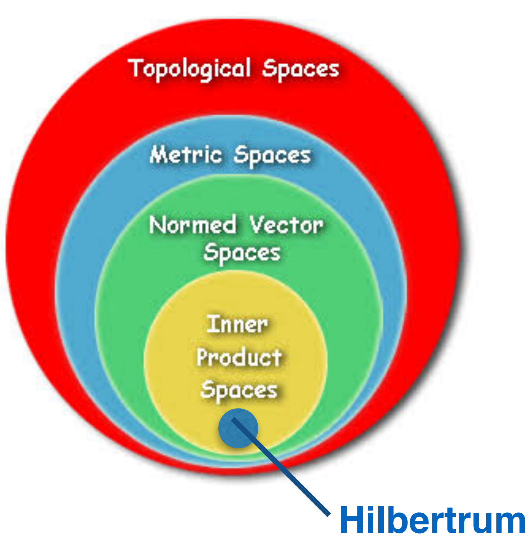
Teori för Hilbertrum

fullständigt vektorrum $\mathcal{H}$ med inre produkt norm

$$\|a\| = \sqrt{\langle a|a\rangle}$$

$$\lim_{\substack{i\to\infty \\ j\to\infty}} \|a_i - a_j\| = 0 \Rightarrow \exists |a\rangle \in \mathcal{H} \quad \lim_{i\to\infty} \|a_i - a\| = 0$$

$\{|a_i\rangle\}_{i=1}^{\infty}$ Cauchy sekvens



Tillbaks till Fredholm av andra typen…

Antag att *K(x,t)* ej är separabel. Vad göra?

Vanligt alternativ: **Neumannserie** (störningsräkning)

Neumannserie (störningsräkning)

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt \qquad (1)$$

GISSA EN LÖSNING!

$\varphi(x) \approx f(x) \equiv \varphi_0(x)$ (OK OM λ LITET, $[a,b]$ LITET, ...)

"0:E ORDNINGENS APPROXIMATION"

dvs. ersätt $\varphi(t)$ i integranden i (1) med $\varphi_0(t)$

SÄTT IN I (1). DET MAN NÅ FÅR KALLAR VI φ_1

$$\varphi_1(x) \approx f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) \underbrace{f(t)}_{\varphi_0(t)}\,dt$$

dvs. ersätt $\varphi(t)$ i integranden i (1) med $\varphi_1(t)$

ITERERA! SÄTT IN φ_1 I (1), OSV. !

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b dt\, k(x,t) \left(f(t) + \lambda \int_a^b k(t,t') f(t')\,dt' \right)$$

FORTSÄTT SÅ!

Neumannserie (störningsräkning)

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt \qquad (1)$$

GISSA EN LÖSNING!

$$\varphi(x) \approx f(x) \equiv \varphi_0(x) \quad (\text{OK OM } \lambda \text{ LITET, } [a,b] \text{ LITET, } \ldots)$$

"0:E ORDNINGENS APPROXIMATION"

SÄTT IN I (1). DET MAN FÅR KALLAR VI φ_1

$$\varphi_1(x) \approx f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) \underbrace{f(t)}_{\varphi_0(t)}\,dt$$

ITERERA! SÄTT IN φ_1 I (1), OSV. !

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b dt\, K(x,t) \left(f(t) + \lambda \int_a^b K(t,t') f(t')\,dt' \right)$$

FORTSÄTT SÅ!

$$\varphi_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda^i u_i(x)$$

$$u_0(x) = f(x)$$

$$u_n(x) = \int_a^b \cdots \int_a^b K(x,t_1) K(t_1,t_2) \cdots K(t_{n-1},t_n)\, f(t_n)\, dt_n \ldots dt_1$$

Neumannserie (störningsräkning)

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt \qquad (1)$$

GISSA EN LÖSNING!

$$\varphi(x) \approx f(x) \equiv \varphi_0(x) \quad (\text{OK OM } \lambda \text{ LITET}, [a,b] \text{ LITET}, \ldots)$$

↑ "0:E ORDNINGENS APPROXIMATION"

SÄTT IN I (1). DET MAN DÅ FÅR KALLAR VI φ_1

$$\varphi_1(x) \approx f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\,\underbrace{f(t)}_{\varphi_0(t)}\,dt$$

ITERERA! SÄTT IN φ_1 I (1), OSV. !

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b dt\,K(x,t)\left(f(t) + \lambda \int_a^b K(t,t')\,f(t')\,dt'\right)$$

FORTSÄTT SÅ!

$$\varphi_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda^i u_i(x)$$

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$$ om serien konvergerar

tillräckligt villkor: $|\lambda|||K|| < 1$ *

$$u_0(x) = f(x)$$

$$u_n(x) = \int_a^b \cdots \int_a^b K(x,t_1)K(t_1,t_2)\cdots K(t_{n-1},t_n)\,f(t_n)\,dt_n \ldots dt_1$$

* definition av operatornorm: $||A|| = \inf\{c \geq 0 : ||Av|| \leq c|v|, \forall v \in \mathcal{V}\}$

EX $\varphi(x) = x + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(t-x)\varphi(t)\,dt$

SEPARABEL KÄRNA : $K(x,t) = t\cdot x^0 - t^0\cdot x$

$\Rightarrow$ PROBLEMET KAN LÖSAS ALGEBRAISKT

Lösning med Neumannserie

VÄLJ $\varphi_0(x) = x$

$\Rightarrow \varphi_1(x) = x + \frac{1}{3}$

INTEGRERA!

$\varphi_2(x) = x + \frac{1}{3} - \frac{x}{3}$

$\varphi_3(x) = x + \frac{1}{3} - \frac{x}{3} - \frac{1}{3}!$

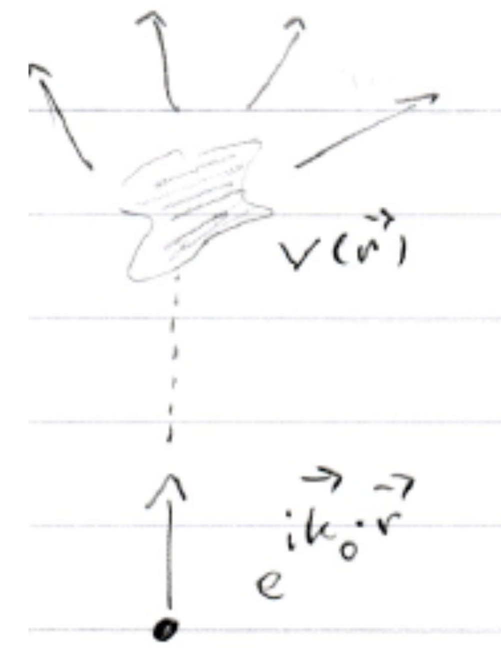
$\Downarrow$ INDUKTION

$$\varphi_{2n}(x) = x + \sum_{s=1}^{n}(-1)^{s-1}\left(\frac{1}{3}\right)^s - x\sum_{s=1}^{n}(-1)^{s-1}\left(\frac{1}{3}\right)^s$$

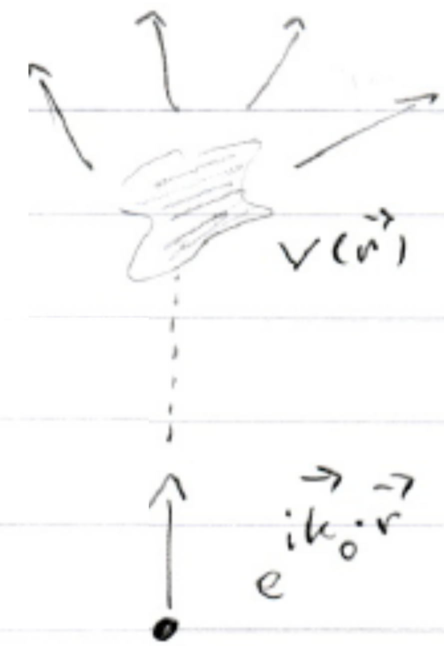
ANVÄND $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$$

Viktigt fysikexempel:
Bornapproximationen för stationär spridningsteori



Viktigt fysikexempel:
Bornapproximationen för stationär spridningsteori



TIDSOBERОENDE SCHRÖDINGEREKVATIONEN

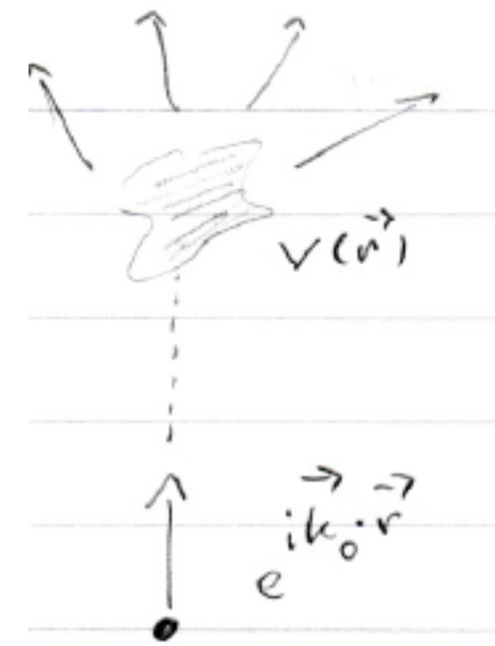
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\vec{r}) + V(\vec{r})\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \qquad (1)$$

ELASTISK PROCESS:
$E = (\hbar k_0)^2/2m$ KONSTANT

$\Psi(\vec{r},t) = e^{-iEt/\hbar}\psi(\vec{r})$ DÄR $\psi(\vec{r})$ ÄR LÖSNINGEN TILL (1)

$$(1) \Rightarrow \underbrace{(\nabla^2 + k_0^2)}_{L}\underbrace{\psi(\vec{r})}_{g} = \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2}V(\vec{r})\psi(\vec{r})}_{f}$$

Viktigt fysikexempel:
Bornapproximationen för stationär spridningsteori



TIDSOBEROENDE SCHRÖDINGEREKVATIONEN

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\vec{r}) + V(\vec{r})\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \qquad (1)$$

ELASTISK PROCESS:
$E = (\hbar k_0)^2/2m$ KONSTANT

$\Psi(\vec{r},t) = e^{-iEt/\hbar}\psi(\vec{r})$ DÄR $\psi(\vec{r})$ ÄR LÖSNINGEN TILL (1)

$$(1) \Rightarrow \underbrace{(\nabla^2 + k_0^2)}_{L}\underbrace{\psi(\vec{r})}_{g} = \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2}V(\vec{r})\psi(\vec{r})}_{f}$$

TEORI FÖR INHOMOGENA DIFF EKVATIONER:

$$Lg = f \Rightarrow g = \int Gf \quad \text{DÄR} \quad LG = \delta$$

$$\Rightarrow \psi(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} G(\vec{r},\vec{r}\,')\left(\frac{2m}{\hbar^2}V(\vec{r}\,')\psi(\vec{r}\,')\right)d\vec{r}\,' \qquad (2)$$

RETARDERAD GREENFUNKTION TILL $L = \nabla^2 + k_0^2$

$$G(\vec{r},\vec{r}\,') = G(\vec{r}-\vec{r}\,') = -\frac{e^{ik_0|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \qquad (3)$$

$$V = 0 \Rightarrow \psi = 0 \quad ?!$$

NEJ! MÅSTE INFÖRA RANDVILLKORET $\psi(\vec{r}) = e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{r}}$ NÄR $V = 0$.

$$\Rightarrow \underbrace{\psi(\vec{r})}_{\varphi(\vec{r})} = \underbrace{e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{r}}}_{f(\vec{r})} + \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2}}_{\lambda}\int_{\mathbb{R}^3} \underbrace{\left(G(\vec{r},\vec{r}\,')V(\vec{r}\,')\right)}_{K(\vec{r},\vec{r}\,')}\underbrace{\psi(\vec{r}\,')}_{\varphi(\vec{r}\,')}\,d\vec{r}\,' \quad (4)$$

FÖR ATT RÄKNA PÅ DETTA, BÖRJA MED ATT SÄTTA IN (3) I (4):

$$\Rightarrow \psi(\vec{r}) = e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{r}} - \frac{m}{2\pi\hbar^2}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{e^{ik_0|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}V(\vec{r}\,')\psi(\vec{r}\,')\,d\vec{r}\,'$$

antag $|V(\vec{r}\,')| << E$
("V LITEN")

0:E ORDNINGENS APPROXIMATION

$$\psi(\vec{r}) \approx e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{r}} \equiv \psi_0(\vec{r})$$

Bornapproximationen:
Neumannserien trunkerad efter första approximationen

1:A ORDNINGENS APPROXIMATION

$$\Rightarrow \psi_1(\vec{r}) = e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{r}} - \frac{m}{2\pi\hbar^2}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{e^{ik_0|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}V(\vec{r}\,')e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{r}\,'}\,d\vec{r}\,'$$

Det finns en omfattande teori för integralekvationer,
t.ex. Schmidt-Hilbert teori för symmetriska kärnor ($K(x,t) = K(t,x)$),
se Arfken *et al.*, avsnitt 21.4 (överkurs).