FTF 131-2 5p 1

a) Grenpunkt för en flervärd funktion
2/2 är en punkt sådan att om funktionen succesivt evalueras i en cirkel som omsluter punkten kommer funktionens värde vid start och slut att skilja sig.

Grensnitt är en enkel kurva i det komplexa talplanet mellan två grenpunkter så att funktionen blir entydig givet att kurvan aldrig passeras.

Riemann-yta är en yta som fås då grensnitt lagts i det komplexa talplanet så att en funktion blivit entydig.

Genom att definiera funktionen på Riemannytor istället för $\mathbb{C}$ kan man råda bot på deras flertydighet.

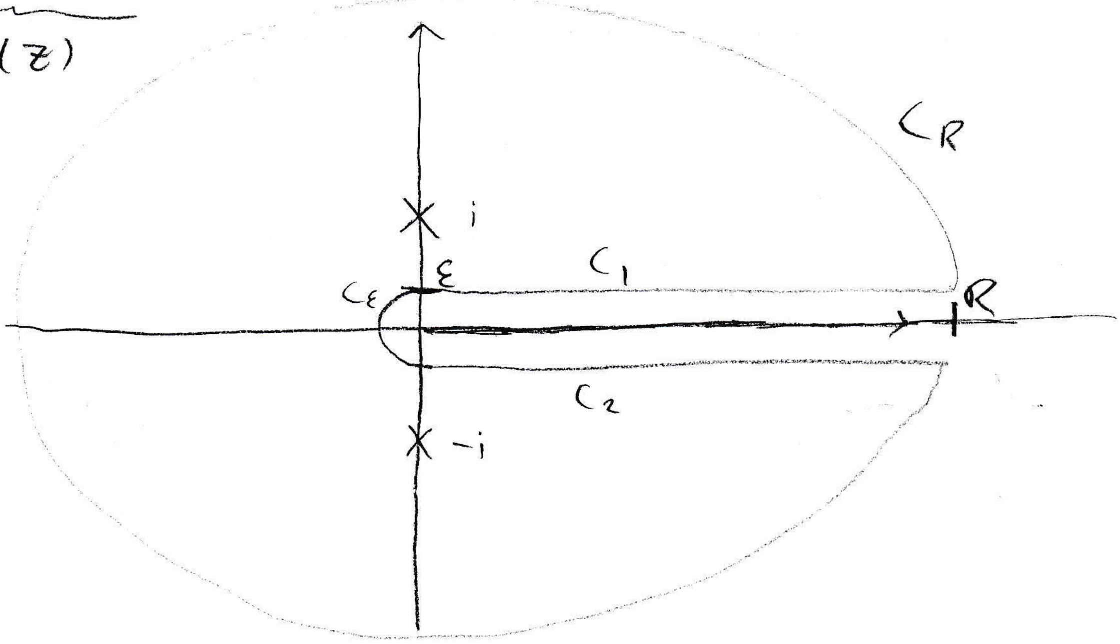
FTF 131-2

b) Integralen

3/3 $I = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx$

beräknas genom komplexifiering

$\oint_C \underbrace{\frac{z^{1/2}}{1+z^2}}_{f(z)}\,dx$ kurvan C är $C = C_1 + C_2 + C_R + C_\varepsilon$:



Grensnitten för den flertydiga fkt $z^{1/2}$ har markerats med blått. Det gäller nu

$$z^{1/2} = e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log} z} = e^{\frac{1}{2}(\ln|z| + i\operatorname{Arg} z)}$$

där $V_{\operatorname{Arg}} = [0, 2\pi)$

Integralerna I_1 och I_2 över C_1 resp. C_2 blir i gränsen då $\varepsilon \to 0$

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{e^{\frac{1}{2}(\ln x + 0)}}{1+x^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx = I$$

$$I_2 = \int_\infty^0 \frac{e^{\frac{1}{2}(\ln x + 2\pi i)}}{1+x^2}\,dx = \int_\infty^0 \frac{-\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx = I$$

FTF131-2

Integralen I_ε över C_ε blir med parametrisering

$z = \varepsilon e^{i\theta}$

$\frac{3\pi}{2} \xrightarrow{\theta} \frac{\pi}{2}$

$$I_\varepsilon = \int_{3\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sqrt{\varepsilon}\, e^{i\theta/2}}{1+\varepsilon^2 e^{i2\theta}} \varepsilon i e^{i\theta} d\theta \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$

Integralen I_R över C_R går mot 0 då $R \to \infty$ enl. Jordans lemma, ty integranden avtar snabbare än $\frac{1}{|z|}$.

Det finns två residyer:

$1+z^2 = 0 \iff z_1 = i$

$z_2 = -i$

$$\sum_{\substack{\text{Inre}\\ \text{av } C}} \operatorname{Res} f = \left.\frac{z^{1/2}}{2z}\right|_{z=i} + \left.\frac{z^{1/2}}{2z}\right|_{z=-i} =$$

$$= \frac{1}{2i}\left(i^{1/2} - (-i)^{1/2}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{\frac{1}{2}(\ln 1 + i\frac{\pi}{2})} - e^{\frac{1}{2}(\ln 1 + i\frac{3\pi}{2})}\right) =$$

$$= \frac{1}{2i}\left(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{i\frac{3\pi}{4}}\right) = \frac{2\cos\frac{\pi}{4}}{2i} = \frac{1}{\sqrt{2}\, i}$$

Nu gäller enligt residysatsen

$$\underbrace{I_1 + I_2}_{} + \underset{\substack{\| \\ 0}}{I_\varepsilon} + \underset{\substack{\| \\ 0}}{I_R} = 2I = 2\pi i \sum_{\substack{\text{Inre}\\ \text{av } C}} \operatorname{Res} f$$

$$\Rightarrow I = \pi i \sum_{\substack{\text{Inre}\\ \text{av } C}} \operatorname{Res} f = \pi i \frac{1}{\sqrt{2}\, i} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

OK

FTF131-2 $\quad$ 5p $\quad$ 2

Integralekv. $\varphi(x) = \lambda \int_0^{\pi} \sin(x+t)\,\varphi(t)\,dt \qquad (1)$

Kan beräknas genom att använda additionssatsen för sinus:

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{\pi} (\sin x \cos t + \cos x \sin t)\,\varphi(t)\,dt \qquad (2) \iff$$

$$\varphi(x) = \lambda\Big(\sin x \underbrace{\int_0^{\pi} \cos t\,\varphi(t)\,dt}_{A} + \cos x \underbrace{\int_0^{\pi} \sin t\,\varphi(t)\,dt}_{B}\Big) \iff$$

$$\varphi(x) = \lambda A \sin x + \lambda B \cos x$$

Detta uttryck för $\varphi(x)$ sätts in i $(2) \Rightarrow$

$$\lambda A \sin x + \lambda B \cos x =$$

$$= \lambda \int_0^{\pi} (\sin x \cos t + \cos x \sin t)(\lambda A \sin t + \lambda B \cos t) \quad \overset{\lambda \neq 0}{\iff}$$

$$\left[\begin{array}{l} \int_0^{\pi} \sin 2t\,dt = 0 \\ \int_0^{\pi} \cos^2 t\,dt = \int_0^{\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \int_0^{\pi} \sin^2 t\,dt = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = \frac{\pi}{2} \end{array}\right]$$

$$A \sin x + B \cos x =$$

$$= \lambda \int_0^{\pi} \left(A \sin x \tfrac{1}{2} \sin 2t + B \sin x \cos^2 t + A \cos x \sin^2 t + B \cos x \tfrac{1}{2} \sin 2t\right) dt \iff$$

$$A \sin x + B \cos x = \lambda\left(B \tfrac{\pi}{2} \sin x + A \tfrac{\pi}{2} \cos x\right)$$

Jämför nu koeff.:

$$\begin{array}{ll} \sin x: & A = \lambda B \frac{\pi}{2} \\ \cos x: & B = \lambda A \frac{\pi}{2} \end{array} \quad \left[\Rightarrow B = \lambda^2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 B \right]$$

För $\lambda = \frac{2}{\pi}$ blir detta

$$\begin{cases} A = B \\ B = A \end{cases} \iff A = B \text{ och } \forall C \text{ är } \varphi(x) = C(\sin x + \cos x)$$

en lösning.

FTF 131-2

För $\lambda = \frac{-2}{\pi}$ blir detta

$$\begin{cases} A = -B \\ B = -A \end{cases} \iff A = -B \text{ och } \forall C \text{ är}$$

$\varphi(x) = C(\sin x - \cos x)$ lösningar λ

För $\lambda \neq \pm\frac{2}{\pi}$ el. $\lambda \neq 0$

gäller $A = B = 0$ och endast trivial lösn. $\varphi(x) = 0$ finns

För $\lambda = 0$ blir (1): $\varphi(x) = 0$,

med lösn. $\varphi(x) \equiv 0$

FTF131 -2 5p 3

Detta klassiska problem finns löst i Person-Böiers, Analys i en variabel, då med frilägggning av ett element av repet, och kraftjämvikt, vilket leder till en integralekvation. Med utnyttjande av variationsprincipen blir resonemanget istället att repets potentiella energi ska vara minimal, till detta ska läggas bivillkoret att repet har en viss längd.

Låt repets upphängningspunkten vara (0,0) och (0,a). Välj x-axeln som referensnivå för den potentiella energin. Längden av repet på ett intervall dx är

$$\sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

Det antas att repet är homogent med densitet ρ. Den potentiella energin för denna lilla bit av repet blir då (med $E=mgh$)

$$dE = \sqrt{1+y'^2}\,dx\,\rho\, g\, y$$

Totalt för repet blir energin då

$$E = \int dE = \rho g \int_0^a \underbrace{y\sqrt{1+y'^2}}_{F(y,y')}\,dx \qquad (1)$$

Bivillkoret att repets totala längd ska vara L blir $L = \int_0^a \sqrt{1+y'^2}\,dx \qquad (2)$

FTF131-2

Det ska gälla att $\delta E = 0$ för att integralen (1) ska vara stationär. Med bivillkoret (2) är det fiffigt att använda Lagrange multiplikatorn λ och skriva

$$\tilde{E} = \int_0^a \underbrace{\left(\rho g y \sqrt{1+y'^2} + \lambda \sqrt{1+y'^2}\right)}_{g(y,y')} dx$$

då gäller $\delta E = 0 \Leftrightarrow \delta \tilde{E} = 0$
(ty endast en konstant har adderats)
Euler-Lagrange ekv. för g blir

$$\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial g}{\partial y'} = 0$$

Men eftersom g ej explicit beror på x kan den något lättare ekvationen

$$g - \frac{dy}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \text{const.} \qquad (3)$$

användas istället (om min snabba härledning var korrekt, se slutet av uppg.)

Nu återstår bara att välja λ så att (3) är uppfylld och lösa denna diff-ekv. med RV $y(0)=0$, $y(a)=0$, $y'(\frac{a}{2})=0$

3

FTF 131-2

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{dy'}{dx}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{dF}{dx} - \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{dy'}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{dy}{dx}\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{dF}{dx} - \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{dy'}{dx} - \frac{dy}{dx}\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{d}{dx}\left(F - \frac{dy}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F - \frac{dy}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \text{const.}$$

↑

Snabb härledn. av (3)

Ok

FTF 131-2 5 4 9

a) Ett Hilbert-rum är ett fullständigt
2/2 vektorrum där normen utgörs av den inre produkten, enligt
$\|a\| = \sqrt{\langle a|a\rangle}$

1 För en självadjungerad operator $\hat{A}$ (om den är begr.) gäller spektralsatsen som säger att
Egenvärdena till $\hat{A}$ är reella och dess egenvektorer bildar en bas av ~~egenfunktioner till vektorrummet~~ ortogonala egenfunktioner till rummet.

Det gäller alltså att $\hat{A}$'s spektrum (möjliga mätvärden) är reella, och därmed är även väntevärdet $\langle \psi|\hat{A}|\psi\rangle$ reellt

Om operatorn är självadjungerad är den därmed också def. på hela Hilbert-rummet, vilket också är viktigt.

Bra!

FTF131-2 4

b) I allmänhet def. en funktion av en 3/3 operator $f(\hat{A})$ så att om Taylorutv. av $f(x)$ är

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$

så är $f(\hat{A})=\sum_{i=0}^{\infty} c_i \hat{A}^i$

~~Logaritmen av $\hat{P}$ blir då~~

$$\cancel{\ln \hat{P} = \sum_{i=0}^{\infty}}$$

Med denna definition förstås

$$F(\hat{A}) \equiv \sum_{m=1}^{M} F(a_m)\hat{P}_m \quad \text{ty}$$

beteckna $\hat{A}$'s ortonormalbas av egenvekt. $\{|a_i\rangle\}_{i=1}^{M}$ med tillhörande egenv. $\{a_i\}_{i=1}^{M}$, då gäller

$$F(\hat{A})=\sum_{i=0}^{\infty} c_i \hat{A}^i=\sum_{i=0}^{\infty} c_i \hat{A}^i \underbrace{\sum_{m=1}^{M}|a_m\rangle\langle a_m|}_{\mathbb{1}} =$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty} c_i \sum_{m=1}^{M} a_m^i \underbrace{|a_m\rangle\langle a_m|}_{\hat{P}_m} = \sum_{m=1}^{M} \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} c_i a_m^i}_{F(a_m)} \hat{P}_m =$$

$$=\sum_{m=1}^{M} F(a_m)\hat{P}_m$$

om det är godkänt att byta summationsordn.

Jh

5

FTF131-2

5p

a)

3/3

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

$= (\ast)$ ok

Delgrupper (bortser från triviala):

$G_1 = \{e, a\}$, $G_2 = \{e, b\}$, $G_3 = \{e, c\}$ ok

b) Gissningar:

2/2

$e \simeq (1)(2)(3)(4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = e'$

$a \simeq (12)(34) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = a'$

$b \simeq (13)(24) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = b'$

$c \simeq (14)(23) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = c'$

Trivialt: $e'a' = a'e' = a'$

$e'b' = b'e' = b'$

$e'c' = c'e' = c'$

$e'e' = e'e' = e'$

FTF131-2 5

Ej trivialt:

$$a'b' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = c'$$

$$a'c' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = b'$$

$$b'c' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = a'$$

Det är givet att $G' = \{e', a', b', c'\}$ är en grupp, och alltså måste e', a', b' och c' förekomma exakt 1 gång i multiplikations-tabellen. Med denna kunskap kan multiplikationstabellen nu sättas upp

	e'	a'	b'	c'
e'	e'	a'	b'	c'
a'	a'	e'	c'	b'
b'	b'	c'	e'	a'
c'	c'	b'	a'	e'

$\simeq (*)$

Fordrat att man vet ex.

$$b'b' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = e'$$

Tack för en smaskig kurs, man har lärt sig mycket nyttigheter och spännande saker. Gött att sitta uppe om nätterna med tunga integraler. Bra gjort! Lycka till nästa år!