

Variationskalkyl

repetition och litet bakgrund...

Variationskalkyl

repetition och litet bakgrund...

$$\bar{I}(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} \bar{F}[y(x, \alpha), y'(x, \alpha), x] dx$$

Variationskalkyl

repetition och litet bakgrund...

$$\bar{I}(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} \bar{F}[y(x, \alpha), y'(x, \alpha), x] dx$$

$$\delta \bar{I} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \bar{F}}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \bar{F}}{\partial y'} = 0$$

EULERS EKVATION

Variationskalkyl

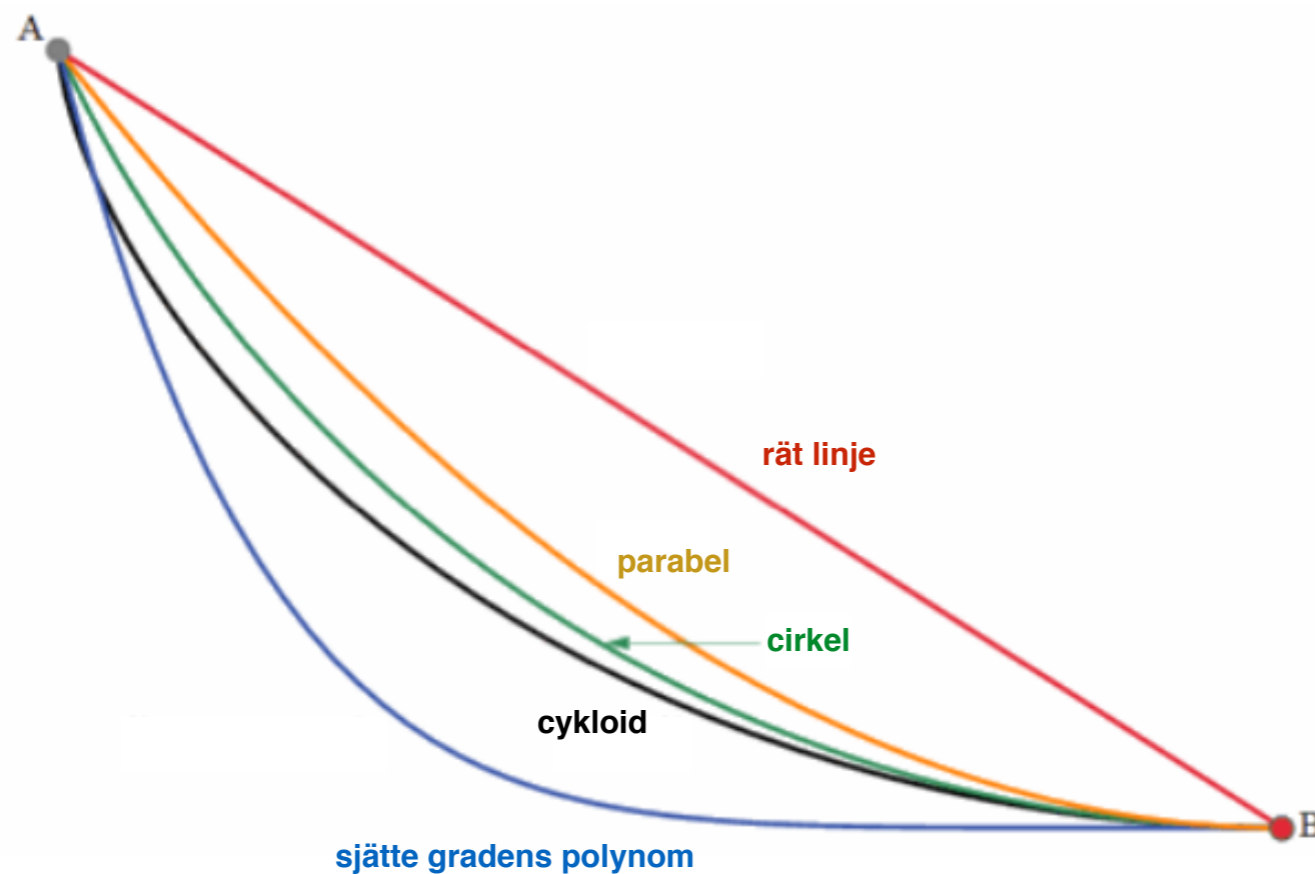
repetition och litet bakgrund...

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad \text{EULERS EKVATION}$$

Brachistochrone-problemet

Johann Bernoulli, 1696

”Givet två punkter A (startpunkt) och B (slutpunkt) i ett vertikalt plan, bestäm den kurva längs vilken en partikel snabbast når B, med antagandet att dess acceleration endast beror på gravitationen.”



Johann Bernoulli
1667-1748

Variationskalkyl

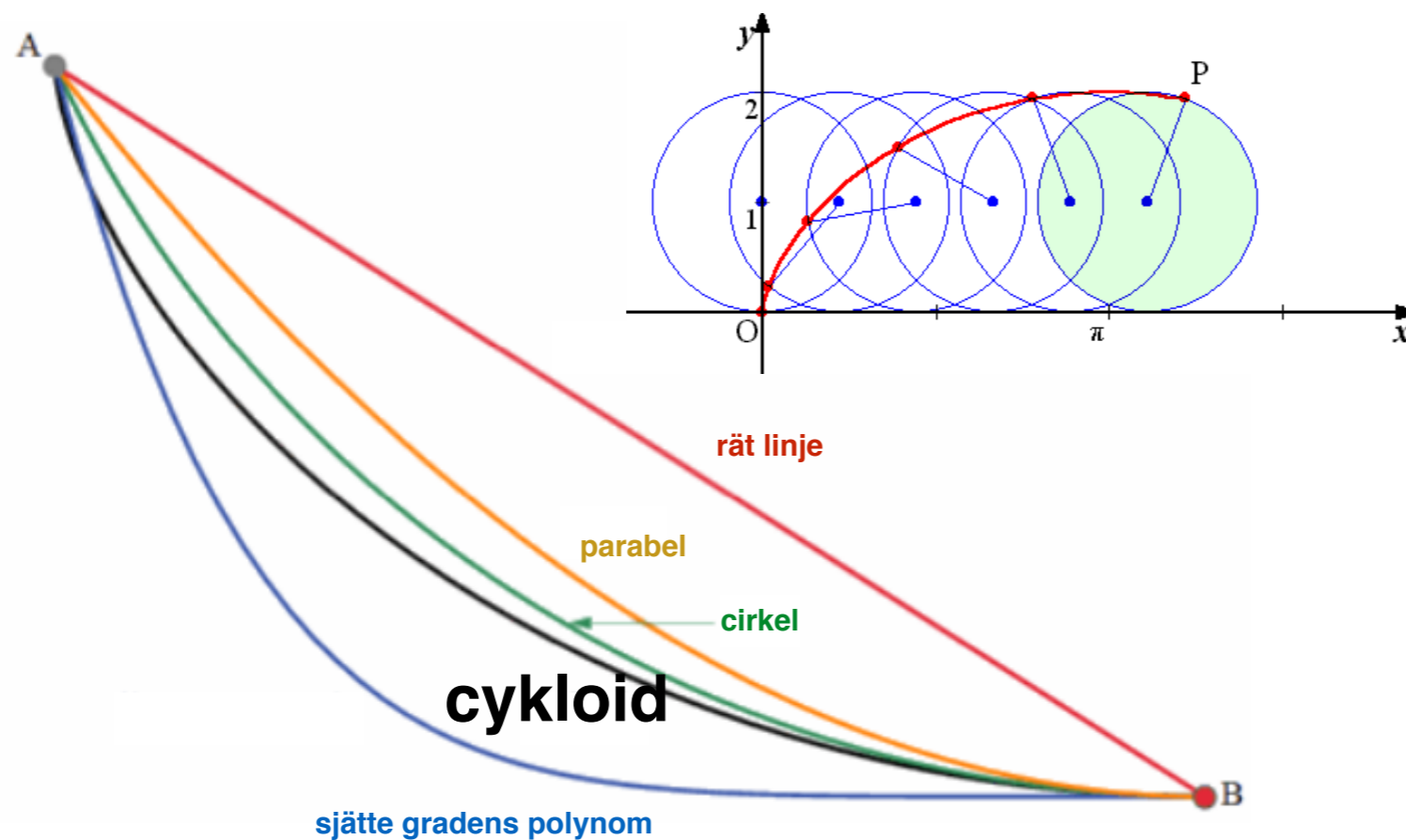
repetition och litet bakgrund...

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad \text{EULERS EKVATION}$$

Brachistochrone-problemet

Johann Bernoulli, 1696

”Givet två punkter A (startpunkt) och B (slutpunkt) i ett vertikalt plan, bestäm den kurva längs vilken en partikel snabbast når B, med antagandet att dess acceleration endast beror på gravitationen.”



Johann Bernoulli
1667-1748

Variationskalkyl

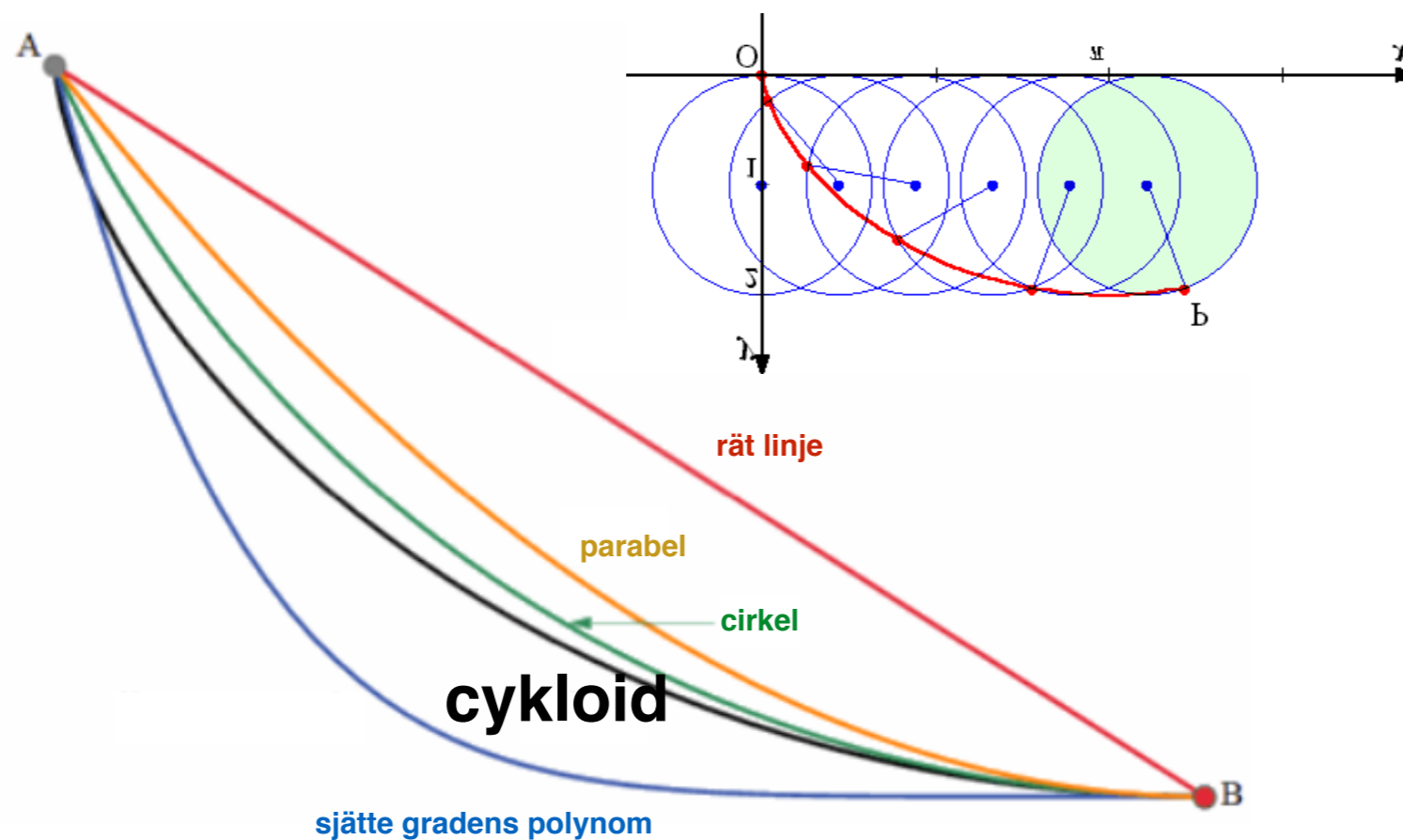
repetition och litet bakgrund...

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad \text{EULERS EKVATION}$$

Brachistochrone-problemet

Johann Bernoulli, 1696

"Givet två punkter A (startpunkt) och B (slutpunkt) i ett vertikalt plan, bestäm den kurva längs vilken en partikel snabbast når B, med antagandet att dess acceleration endast beror på gravitationen."



Johann Bernoulli
1667-1748

Variationskalkyl

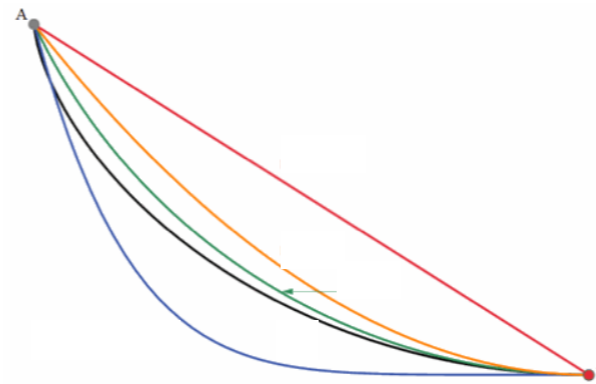
repetition och litet bakgrund...

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad \text{EULERS EKVATION}$$

Brachistochrone-problemet

Johann Bernoulli, 1696

”Givet två punkter A (startpunkt) och B (slutpunkt) i ett vertikalt plan, bestäm den kurva längs vilken en partikel snabbast når B, med antagandet att dess acceleration endast beror på gravitationen.”



Johann Bernoulli
1667-1748



Galileo Galilei
1564-1642

Variationskalkyl

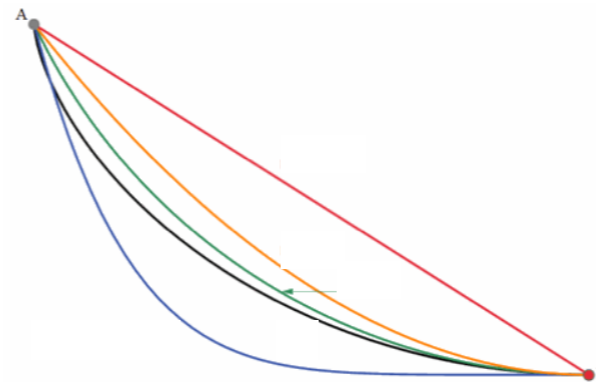
repetition och litet bakgrund...

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad \text{EULERS EKVATION}$$

Brachistochrone-problemet

Johann Bernoulli, 1696

”Givet två punkter A (startpunkt) och B (slutpunkt) i ett vertikalt plan, bestäm den kurva längs vilken en partikel snabbast når B, med antagandet att dess acceleration endast beror på gravitationen.”



Johann Bernoulli
1667-1748



Galileo Galilei
1564-1642



Gottfried Leibniz
1646-1716

Variationskalkyl

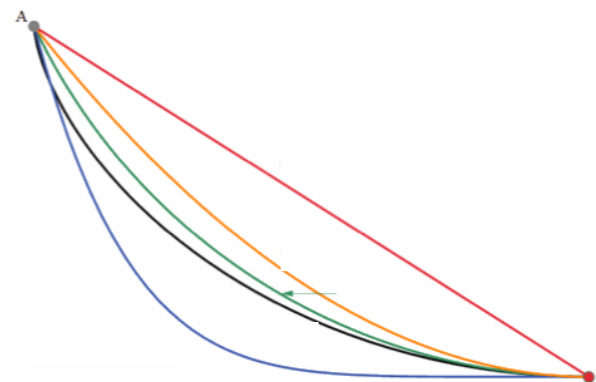
repetition och litet bakgrund...

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad \text{EULERS EKVATION}$$

Brachistochrone-problemet

Johann Bernoulli, 1696

”Givet två punkter A (startpunkt) och B (slutpunkt) i ett vertikalt plan, bestäm den kurva längs vilken en partikel snabbast når B, med antagandet att dess acceleration endast beror på gravitationen.”



Johann Bernoulli
1667-1748



Galileo Galilei
1564-1642



Gottfried Leibniz
1646-1716



Guillaume l'Hopital
1661-1704

Variationskalkyl

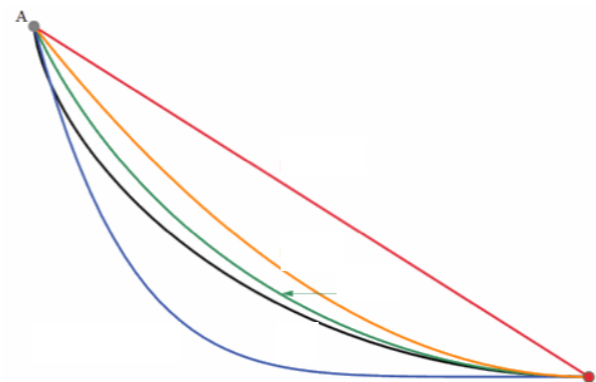
repetition och litet bakgrund...

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad \text{EULERS EKVATION}$$

Brachistochrone-problemet

Johann Bernoulli, 1696

”Givet två punkter A (startpunkt) och B (slutpunkt) i ett vertikalt plan, bestäm den kurva längs vilken en partikel snabbast når B, med antagandet att dess acceleration endast beror på gravitationen.”



Johann Bernoulli
1667-1748



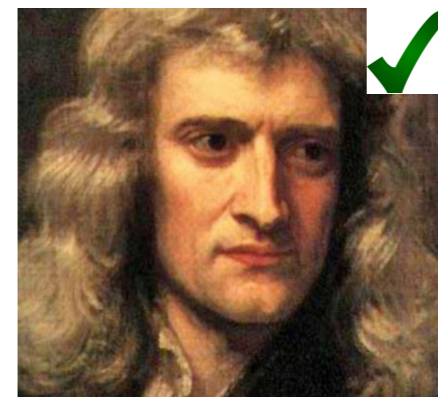
Galileo Galilei
1564-1642



Gottfried Leibniz
1646-1716



Guillaume l'Hopital
1661-1704



Isaac Newton
1642-1727

Variationskalkyl

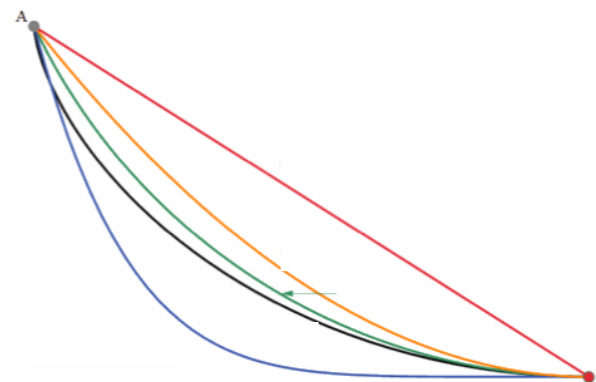
repetition och litet bakgrund...

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad \text{EULERS EKVATION}$$

Brachistochrone-problemet

Johann Bernoulli, 1696

”Givet två punkter A (startpunkt) och B (slutpunkt) i ett vertikalt plan, bestäm den kurva längs vilken en partikel snabbast når B, med antagandet att dess acceleration endast beror på gravitationen.”



Johann Bernoulli
1667-1748



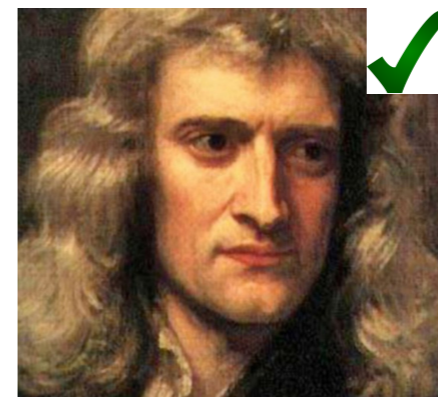
Galileo Galilei
1564-1642



Gottfried Leibniz
1646-1716



Guillaume l'Hopital
1661-1704



Isaac Newton
1642-1727



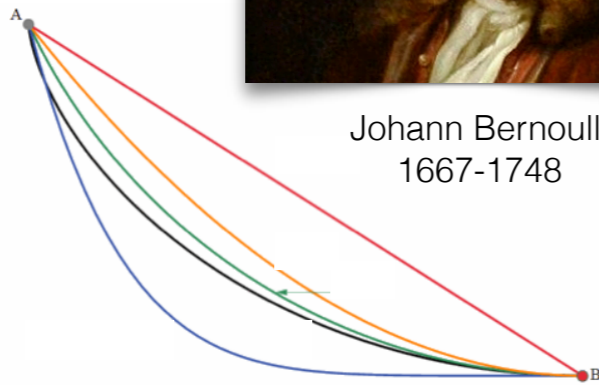
Jacob Bernoulli
1655-1705

Variationskalkyl

repetition och litet bakgrund...



Johann Bernoulli
1667-1748



$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad \text{EULERS EKVATION}$$



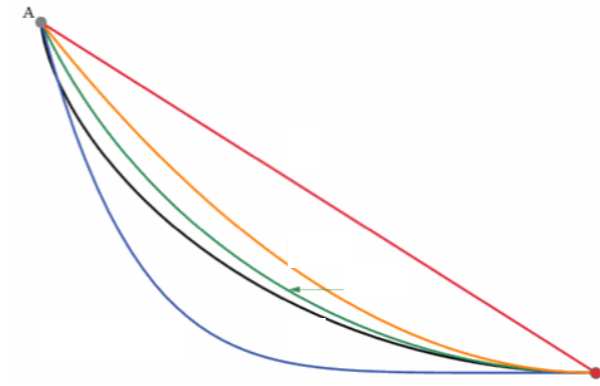
Leonhard Euler
1707-1783



Joseph-Louis Lagrange
1736-1813

Variationskalkyl

repetition och litet bakgrund...



Brachistochrone-problemet

Let us take A as the origin in our coordinate system, assume that the particle of mass m has zero initial velocity, and assume that there is no friction. Let us also take the y -axis to be directed vertically downward. The speed along the curve AMB is $v = ds/dt$ and thus, the total time of descent is

$$I = \int_A^B \frac{ds}{v} = \int_{x_A=0}^{x_B} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v} dx.$$

Now we know by conservation of energy that the change in kinetic energy must equal the change in potential energy. Therefore, we can write

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy,$$

so that the functional to be minimized becomes

$$I = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} dx.$$

Now we can use the Euler-Lagrange equation to obtain (neglecting the constant factor of $1/\sqrt{2g}$)

$$\frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} - \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} = C \quad \text{or} \quad \frac{1}{y(1+y'^2)} = C^2.$$

Setting $1/C^2 = 2a$, we obtain

$$y' = \sqrt{\frac{2a-y}{y}},$$

and integration yields

$$x - x_0 = \int \sqrt{\frac{y}{2a-y}} dy.$$

After making the change of variables $y = a(1 - \cos \theta)$, the integral becomes

$$x - x_0 = 2a \int \sin^2 \frac{\theta}{2} d\theta = a(\theta - \sin \theta).$$

Therefore, the solution to the brachistochrone problem, in parametric form, is

$$x = a(\theta - \sin \theta) + x_0, \quad y = a(1 - \cos \theta).$$

These are the equations of a cycloid generated by the motion of a fixed point on the circumference of a circle of radius a which rolls on the positive side of the line $y = 0$, that is, on the underside of the x -axis. There exists one and only one cycloid through the origin and the point (x_B, y_B) ; a suitable choice of a and x_0 will give this cycloid [5].

Variationskalkyl

repetition och litet bakgrund...

$$\bar{I}(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} \bar{F}[y(x, \alpha), y'(x, \alpha), x] dx$$

$$\delta \bar{I} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \bar{F}}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \bar{F}}{\partial y'} = 0 \quad \text{EULERS EKVATION}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\bar{F} - y' \frac{\partial \bar{F}}{\partial y'} \right) = 0$$

inget explicit x-beroende

Variationskalkyl

repetition och litet bakgrund...

$$\bar{I}(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} \bar{F} [y(x, \alpha), y'(x, \alpha), x] dx$$

$$\delta \bar{I} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \bar{F}}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \bar{F}}{\partial y'} = 0 \quad \text{EULERS EKVATION}$$

$$\frac{d}{dx} (\bar{F} - y' \frac{\partial \bar{F}}{\partial y'}) = 0$$

inget explicit x-beroende

Flera beroende variabler

$$\bar{I} = \int_{x_1}^{x_2} \bar{F} [y_1, y_2, \dots, y_n; y_1', y_2', \dots, y_n'; x] dx$$

$$\Downarrow \delta \bar{I} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \bar{F}}{\partial y_i'} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Variationskalkyl

repetition och litet bakgrund...

$$\bar{I}(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} \bar{F}[y(x, \alpha), y'(x, \alpha), x] dx$$

$$\delta \bar{I} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \bar{F}}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \bar{F}}{\partial y'} = 0 \quad \text{EULERS EKVATION}$$

Flera beroende variabler

$$\bar{I} = \int_{x_1}^{x_2} \bar{F}[y_1, y_2, \dots, y_n; y_1', y_2', \dots, y_n'; x] dx$$

$$\Downarrow \delta \bar{I} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \bar{F}}{\partial y_i'} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\frac{d}{dx} \left(\bar{F} - y' \frac{\partial \bar{F}}{\partial y'} \right) = 0$$

inget explicit x-beroende

Flera oberoende variabler

$$\bar{I} = \int \bar{F}[u; u_x, u_y, u_z; x, y, z] dx dy dz$$

u=y i tidigare notation

$\hat{u}_x = \frac{\partial u}{\partial x}$

$$\Downarrow \delta \bar{I} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \bar{F}}{\partial u_x} - \frac{d}{dy} \frac{\partial \bar{F}}{\partial u_y} - \frac{d}{dz} \frac{\partial \bar{F}}{\partial u_z} = 0$$

Exempel på ett fysikproblem med flera oberoende variabler:

Minimera den elektrostatiske energin

Exempel på ett fysikproblem med flera oberoende variabler:

Minimera den elektrostatiska energin

energitäthet

$$\underline{E_0 = \frac{1}{2} \epsilon \vec{E}^2 = \frac{1}{2} \epsilon (-\nabla\phi)^2}$$

laddningsfritt område \mathcal{V}

Exempel på ett fysikproblem med flera oberoende variabler:

Minimera den elektrostatiska energin

energitäthet

$$\bar{E}_0 = \frac{1}{2} \epsilon \bar{E}^2 = \frac{1}{2} \epsilon (-\nabla\phi)^2$$

energi $E = \bar{I} = \int_{\mathcal{V}} \bar{E}_0(\vec{r}) d\vec{r}$

$$= \frac{1}{2} \epsilon \iiint (\nabla\phi)^2 dx dy dz$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon \underbrace{\iiint (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2)}_{\bar{F}} dx dy dz$$

laddningsfritt område \mathcal{V}

Exempel på ett fysikproblem med flera oberoende variabler:

Minimera den elektrostatiska energin

energitäthet

$$\vec{E}_0 = \frac{1}{2} \epsilon \vec{E}^2 = \frac{1}{2} \epsilon (-\nabla\phi)^2$$

laddningsfritt område \mathcal{V}

energi $E = \int_{\mathcal{V}} \vec{E}_0(\vec{r}) d\vec{r}$

$$= \frac{1}{2} \epsilon \iiint (\nabla\phi)^2 dx dy dz$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon \underbrace{\iiint (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2)}_{F} dx dy dz$$

Euler $\frac{\partial F}{\partial \phi} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \phi_x} - \frac{d}{dy} \frac{\partial F}{\partial \phi_y} - \frac{d}{dz} \frac{\partial F}{\partial \phi_z} = 0$

$$\Rightarrow -\frac{d}{dx}(2\phi_x) - \frac{d}{dy}(2\phi_y) - \frac{d}{dz}(2\phi_z) = 0$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \phi = 0$$

Euler \rightarrow Laplace-ekvationen!!!

Exempel på ett fysikproblem med flera oberoende variabler:

Minimera den elektrostatiska energin

energitäthet

$$\vec{E}_0 = \frac{1}{2} \epsilon \vec{E}^2 = \frac{1}{2} \epsilon (-\nabla\phi)^2$$

laddningsfritt område \mathcal{V}

energi $E = \int_{\mathcal{V}} \vec{E}_0(\vec{r}) d\vec{r}$

$$= \frac{1}{2} \epsilon \iiint (\nabla\phi)^2 dx dy dz$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon \underbrace{\iiint (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2)}_{F} dx dy dz$$

Euler $\frac{\partial F}{\partial \phi} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \phi_x} - \frac{d}{dy} \frac{\partial F}{\partial \phi_y} - \frac{d}{dz} \frac{\partial F}{\partial \phi_z} = 0$

$$\Rightarrow -\frac{d}{dx}(2\phi_x) - \frac{d}{dy}(2\phi_y) - \frac{d}{dz}(2\phi_z) = 0$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \phi = 0$$

Euler \rightarrow Laplace-ekvationen!!!

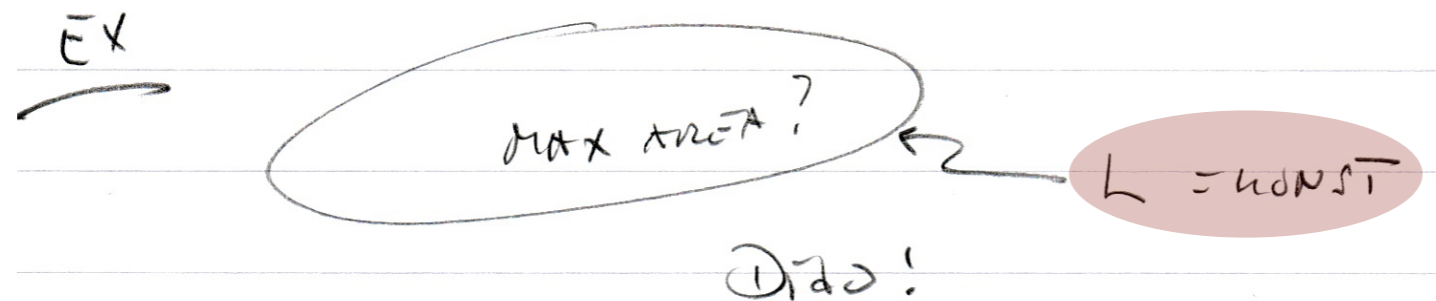
Ingen tillfällighet! Flera av fysikens nyckelkvationer kan återföras på Euler!

Det finns en speciell klass av variationskalkylproblem som är särskilt viktiga i fysiken:

VARIATIONSKALKYL MED TVÅNG (ISOPERIMETRISKA PROBLEM)

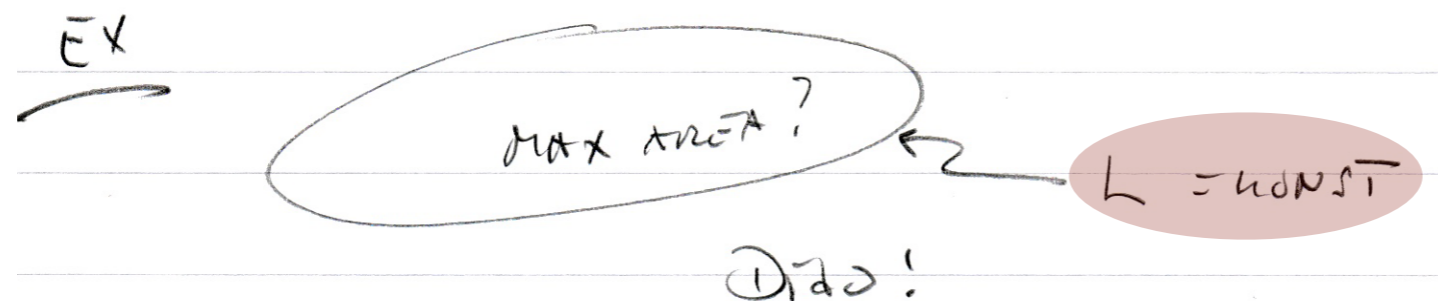
Det finns en speciell klass av variationskalkylproblem som är särskilt viktiga i fysiken:

VARIATIONSKALKYL MED TVÅNG (ISOPERIMETRISKA PROBLEM)



Det finns en speciell klass av variationskalkylproblem som är särskilt viktiga i fysiken:

VARIATIONSKALKYL MED TVÅNG (ISOPERIMETRISKA PROBLEM)



Låt oss ta avstamp i problemet att hitta extremvärden för en vanlig funktion f , givet ett tvång

Villkor (3 variabler x, y, z):

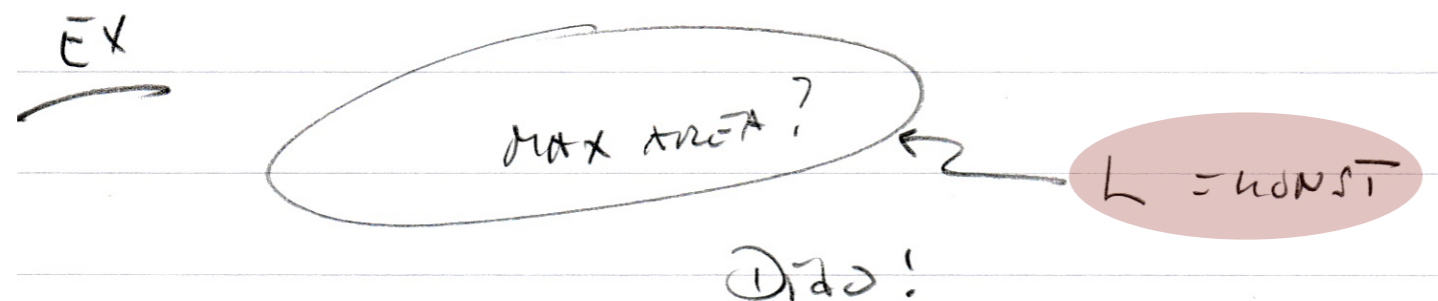
$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0 \quad (1)$$

\Downarrow x, y, z oberoende

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

Det finns en speciell klass av variationskalkylproblem som är särskilt viktiga i fysiken:

VARIATIONSKALKYL MED TVÅNG (ISOPERIMETRISKA PROBLEM)



Låt oss ta avstamp i problemet att hitta extremvärden för en vanlig funktion f , givet ett tvång

Villkor (3 variabler x, y, z):

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0 \quad (1)$$

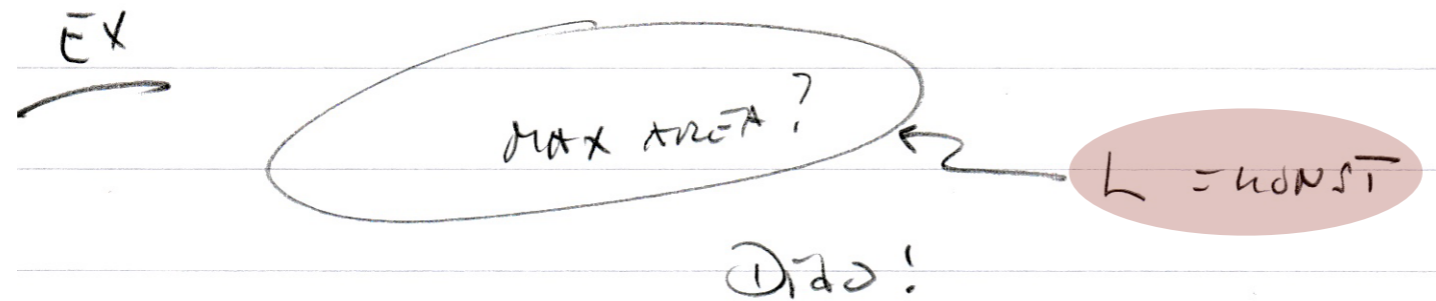
⇓ x, y, z oberoende

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

Tvång: $\varphi(x, y, z) = C$ ← KONSTANT (3)

Det finns en speciell klass av variationskalkylproblem som är särskilt viktiga i fysiken:

VARIATIONSKALKYL MED TVÅNG (ISOPERIMETRISKA PROBLEM)



Låt oss ta avstamp i problemet att hitta extremvärden för en vanlig funktion f , givet ett tvång

Villkor (3 variabler x, y, z):

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0 \quad (1)$$

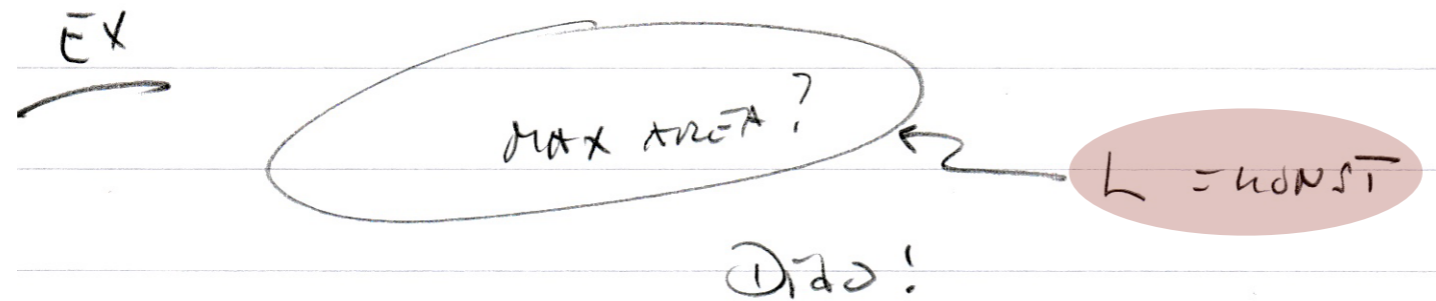
⇓ x, y, z ~~oberoende~~

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (2) \quad ?$$

Tvång: $\varphi(x, y, z) = c$ ^{← KONSTANT} (3)

Det finns en speciell klass av variationskalkylproblem som är särskilt viktiga i fysiken:

VARIATIONSKALKYL MED TVÅNG (ISOPERIMETRISKA PROBLEM)



Låt oss ta avstamp i problemet att hitta extremvärden för en vanlig funktion f , givet ett tvång

Villkor (3 variabler x, y, z):

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0 \quad (1)$$

\Downarrow x, y, z ~~oberoende~~

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (2) \quad ?$$

Tvång: $\underline{\varphi(x, y, z)} = C$ \swarrow KONSTANT (3)

ENDAST TVA OBEROENDE VARIABLER
 DVS. (2) ÄR INTE ETT NÖDVÄNDIGT VILLKOR
 FÖR ATT (1) SKA VARA UPPRYKKT (tillvägagående,
 men ej nödvändigt)

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0 \quad (1)$$

$$\underline{f(x, y, z)} = C \quad \leftarrow \text{CONSTANT} \quad (3)$$

hur gör vi nu?

Vi skulle kunna försöka lösa

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z(x, y)) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z(x, y)) = 0$$

men tråkigt i praktiken!

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0 \quad (1)$$

$$\underline{\varphi(x, y, z)} = C \quad \leftarrow \text{CONSTANT} \quad (3)$$

Ett smartare sätt:

Introducera en "Lagrangemultiplikator" λ

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0 \quad (1)$$

$$\underline{\varphi(x, y, z)} = c \quad \swarrow \text{konstant} \quad (3)$$

Ett smartare sätt:

Introducera en "Lagrangemultiplikator" λ

Bilda först differentialen $d\varphi$:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = 0 \quad (4)$$



(1) & (4)

$$df + \lambda d\varphi = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dy$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dz = 0 \quad (5)$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0 \quad (1)$$

$$\underline{\varphi(x, y, z)} = c \quad \swarrow \text{konstant} \quad (3)$$

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = 0 \quad (4)$$

$$df + \lambda d\varphi = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dy$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dz = 0 \quad (5)$$

Välj en av x, y och z som beroende av de andra två,

T.ex. $z = z(x, y)$, x, y oberoende, vilket å sät

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

$$(5) \ \& \ (6) \Rightarrow \underline{\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

4 "variabler" : x, y, z, λ

4 ekvationer : (3), (6), (7)

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0 \quad (1)$$

$$\varphi(x, y, z) = c \quad \text{konstant} \quad (3)$$

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = 0 \quad (4)$$

$$df + \lambda d\varphi = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \right) dy$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} \right) dz = 0 \quad (5)$$

Välj en av x, y och z som beroende av de andra två,

t.ex. $z = z(x, y)$, x, y oberoende, vilket å sät

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

$$(5) \& (6) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

4 "variabler" : x, y, z, λ

4 ekvationer : (3), (6), (7)

problemet löst!

Låt oss nu lyfta över det här på funktionalen som definierar ett variationskalkylproblem!

för en formell härledning, se AWH, sid 1111f

$$I = \int F[y, y', x] dx \quad (8)$$

TVÄNG :

$$J = \int G(y, y', x) dx = C_1 \quad (9)$$

← KONST.

I ANALOGI MED (5) FÖR VANLIGA FUNKTIONER, BILDA

$$K = I + \lambda J = \int \underbrace{(F + \lambda G)}_g dx \quad (10)$$

stationär lösning för K
villkor:

$$\delta I + \lambda \delta J = 0$$

⇓ Euler

$$\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial g}{\partial y'} = 0 \quad (11)$$

TVA OBERKANOR : y, λ

TVA EKVATIONER : (9), (11)

problemet löst!

Fysiktillämpning: Antag att vi vill minimera energin i ett kvantsystem som bestäms av en Hamiltonian H

Fysiktillämpning: Antag att vi vill minimera energin i ett kvantsystem som bestäms av en Hamiltonian H

$$\overline{E} = \langle \Psi | H | \Psi \rangle \quad \text{om } |\Psi\rangle \text{ normerad egenvektor till } H$$

$$\overline{E} = \int_a^b dx dx' \underbrace{\langle \Psi | x \rangle}_{\Psi^*(x)} \underbrace{\langle x | H | x' \rangle}_{H(x)\delta(x-x')}}_{\Psi(x')}$$

↑ lokal operator = $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$

$$= \int_a^b dx \Psi^*(x) H(x) \Psi(x) \quad (1)$$

Fysiktillämpning: Antag att vi vill minimera energin i ett kvantsystem som bestäms av en Hamiltonian H

↙ \mathbb{I}

$$E = \langle \Psi | H | \Psi \rangle \text{ om } |\Psi\rangle \text{ normerad egenvektor till } H$$

"resolution of identity"

$$\mathbb{I} = \int_a^b dx dx' \underbrace{\langle \Psi | x \rangle}_{\Psi^*(x)} \underbrace{\langle x | H | x' \rangle}_{H(x) \delta(x-x')} \underbrace{\langle x' | \Psi \rangle}_{\Psi(x')}$$

↑ lokal operator = $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$

$$= \int_a^b dx \Psi^*(x) H(x) \Psi(x) \quad (1)$$

Fysiktillämpning: Antag att vi vill minimera energin i ett kvantsystem som bestäms av en Hamiltonian H

$$\overline{E} = \langle \Psi | H | \Psi \rangle \quad \text{om } |\Psi\rangle \text{ normerad egenvektor till } H$$

$$\overline{E} = \int_a^b dx dx' \underbrace{\langle \Psi | x \rangle}_{\Psi^*(x)} \underbrace{\langle x | H | x' \rangle}_{H(x)\delta(x-x')}}_{\text{lokal operator}} \underbrace{\langle x' | \Psi \rangle}_{\Psi(x')}$$

$= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$

$$= \int_a^b dx \Psi^*(x) H(x) \Psi(x) \quad (1)$$

Villkor för minimum =

$$\delta \overline{E} = \delta \int_a^b dx \Psi^*(x) H(x) \Psi(x) = 0 \quad (2)$$

Fysiktillämpning: Antag att vi vill minimera energin i ett kvantsystem som bestäms av en Hamiltonian H

$$\overline{E} = \langle \Psi | H | \Psi \rangle \quad \text{om } |\Psi\rangle \text{ normerad egenvektor till } H$$

$$\overline{E} = \int_a^b dx dx' \underbrace{\langle \Psi | x \rangle}_{\Psi^*(x)} \underbrace{\langle x | H | x' \rangle}_{H(x)\delta(x-x')}}_{\Psi(x')}$$

↑ lokal operator = $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$

$$= \int_a^b dx \Psi^*(x) H(x) \Psi(x) \quad (1)$$

Villkor för minimum:

$$\delta \overline{E} = \delta \int_a^b dx \Psi^*(x) H(x) \Psi(x) = 0 \quad (2)$$

Tvång:

$$\int_a^b dx \Psi^*(x) \Psi(x) = 1 \quad (3)$$

$$\delta E = \delta \int_a^b dx \psi^*(x) H(x) \psi(x) = 0 \quad (2)$$

$$J = \int_a^b dx \psi^*(x) \psi(x) = 1 \quad (3)$$

$$\text{Sätt in } H(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) ; (2)$$

$$\Rightarrow \delta \int dx \left(\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d}{dx} \psi^*(x) \right) \frac{d}{dx} \psi(x) + V(x) \psi^*(x) \psi(x) \right) dx = 0 \quad (4)$$

$$\text{från } \int dx \psi^*(x) \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = \psi^*(x) \frac{d\psi(x)}{dx} \Big|_a^b - \int_a^b dx \frac{d\psi^*(x)}{dx} \frac{d\psi(x)}{dx}$$

periodiskt randvillkor

$$\delta E = \delta \int_a^b dx \psi^*(x) H(x) \psi(x) = 0 \quad (2)$$

$$\mathcal{J} = \int_a^b dx \psi^*(x) \psi(x) = 1 \quad (3)$$

Sätt in $H(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$; (2)

$$\Rightarrow \delta \int_a^b dx \left(\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d}{dx} \psi^*(x) \right) \frac{d}{dx} \psi(x) + V(x) \psi^*(x) \psi(x) \right) dx = 0 \quad (4)$$

från $\int_a^b dx \psi^*(x) \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = \psi^*(x) \frac{d\psi(x)}{dx} \Big|_a^b - \int_a^b dx \frac{d\psi^*(x)}{dx} \frac{d\psi(x)}{dx}$

periodiskt randvillkor $\Big|_a^b \rightarrow 0$

Differentierna (3)

$$\delta \mathcal{J} = \delta \int_a^b dx \psi^*(x) \psi(x) = 0 \quad (5)$$

och multiplicera (5) med Lagrange-multiplikator $-\lambda$

$$\Rightarrow \delta \int_a^b dx \underbrace{\left(\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d}{dx} \psi^* \frac{d}{dx} \psi + V \psi^* \psi - \lambda \psi^* \psi \right)}_{\mathcal{g}} = 0 \quad (6)$$

$$\delta \int_a^b dx \underbrace{\left(\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d}{dx} \psi^* \frac{d}{dx} \psi + V \psi^* \psi - \lambda \psi^* \psi \right)}_g = 0 \quad (6)$$

EULER EKVATION MED TVÄNG, VÄLJ $\gamma = \psi^*$, SKRIV $\frac{d}{dx} \psi^* = \psi_x^*$

$$\frac{\partial g}{\partial \psi^*} - \frac{d}{dx} \frac{\partial g}{\partial \psi_x^*} = 0 \quad (7)$$

⇓

$$V \psi - \lambda \psi - \frac{\hbar^2}{2m} \underbrace{\frac{d}{dx} \psi_x^*}_{\frac{d^2}{dx^2} \psi} = 0 \quad (8)$$

⇓

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi + V \psi = \lambda \psi \quad (9)$$

$$\delta \int_a^b dx \left(\underbrace{\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d}{dx} \psi^* \frac{d}{dx} \psi + V \psi^* \psi - \lambda \psi^* \psi}_g \right) = 0 \quad (6)$$

EULER EKVATION MED TVÄNG, VÄLJ $\gamma = \psi^*$, SKRIV $\frac{d}{dx} \psi^* = \psi_x^*$

$$\frac{\partial g}{\partial \psi^*} - \frac{d}{dx} \frac{\partial g}{\partial \psi_x^*} = 0 \quad (7)$$

\Downarrow

$$V \psi - \lambda \psi - \underbrace{\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d}{dx} \psi_x^*}_{\frac{d^2}{dx^2} \psi} = 0 \quad (8)$$

\Downarrow

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi + V \psi = \lambda \psi \quad (9)$$

\uparrow
 $\lambda = E$ från dimensionsanalys

$$\delta \int_a^b dx \left(\underbrace{\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d}{dx} \psi^* \frac{d}{dx} \psi + V \psi^* \psi - \lambda \psi^* \psi}_g \right) = 0 \quad (6)$$

EULER EKVATION MED TVÄNG, VÄLJ $\gamma = \psi^*$, SKRIV $\frac{d}{dx} \psi^* = \psi_x^*$

$$\frac{\partial g}{\partial \psi^*} - \frac{d}{dx} \frac{\partial g}{\partial \psi_x^*} = 0 \quad (7)$$

⇓

$$V\psi - \lambda\psi - \frac{\hbar^2}{2m} \underbrace{\frac{d}{dx} \psi_x^*}_{\frac{d^2}{dx^2} \psi} = 0 \quad (8)$$

⇓

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi + V\psi = \lambda\psi \quad (9)$$

↑ $\lambda = E$ från dimensionsanalys

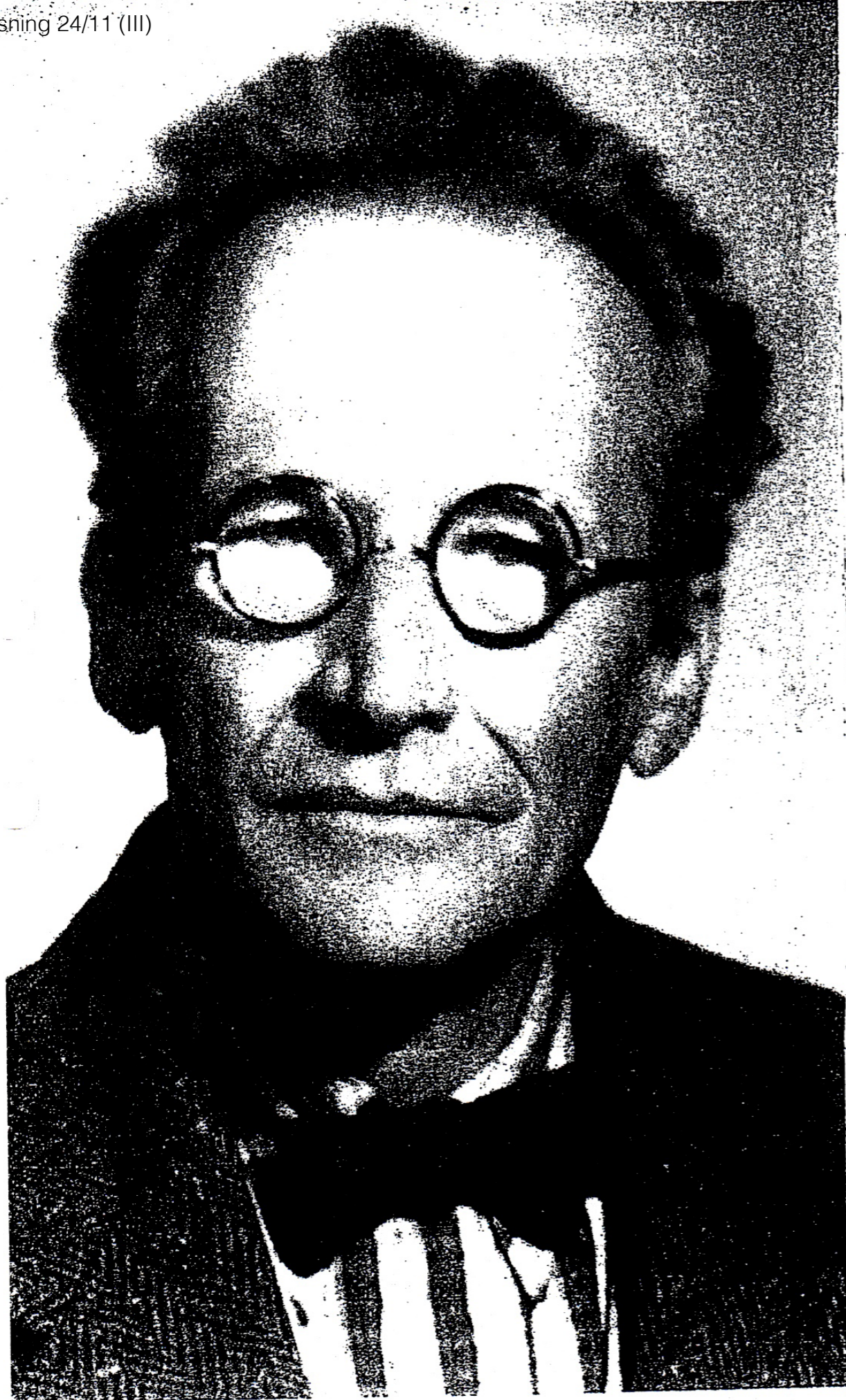
⇓

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi + V\psi = E\psi$$

EULER

↓

SCHRÖDINGERS
EKVATIONEN!



3. Quantisierung als Eigenwertproblem; von E. Schrödinger.

(Erste Mitteilung.)

§ 1. In dieser Mitteilung möchte ich zunächst an dem einfachsten Fall des (nichtrelativistischen und ungestörten) Wasserstoffatoms zeigen, daß die übliche Quantisierungsvorschrift sich durch eine andere Forderung ersetzen läßt, in der kein Wort von „ganzen Zahlen“ mehr vorkommt. Vielmehr ergibt sich die Ganzzahligkeit auf dieselbe natürliche Art, wie etwa die Ganzzahligkeit der *Knotenzahl* einer schwingenden Saite. Die neue Auffassung ist verallgemeinerungsfähig und rührt, wie ich glaube, sehr tief an das wahre Wesen der Quantenvorschriften. Die übliche Form der letzteren knüpft an die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung an:

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = E.$$

Man sucht eine Lösung gesucht, welche ... Funktionen je einer einzigen der

... ein derart, Systeme läßt sich die Variationen ... geschehen, ohne ausdrückliche Beziehung ... sche partielle Differentialgleichung folgendermaßen ... Sei $T(q, p)$ die kinetische Energie als Funktion der Koordinaten und Impulse, V die potentielle Energie, $d\tau$ das Volumelement des Konfigurationenraums „rationell gemessen“, d. h. nicht einfach das Produkt $dq_1, dq_2 \dots dq_n$, sondern noch dividiert durch die Quadratwurzel aus der Diskriminante der quadratischen Form $T(q, p)$. (Vgl. Gibbs, Statistische Mechanik.) Dann soll ψ das „Hamiltonsche Integral“

$$(23) \quad \int d\tau \left\{ K^2 T\left(q, \frac{\partial \psi}{\partial q}\right) + \psi^2 V \right\}$$

stationär machen unter der normierenden Nebenbedingung

$$(24) \quad \int \psi^2 d\tau = 1.$$

Die *Eigenwerte* dieses Variationsproblems sind bekanntlich die ... Werte des Integrals (23) und liefern nach unserer