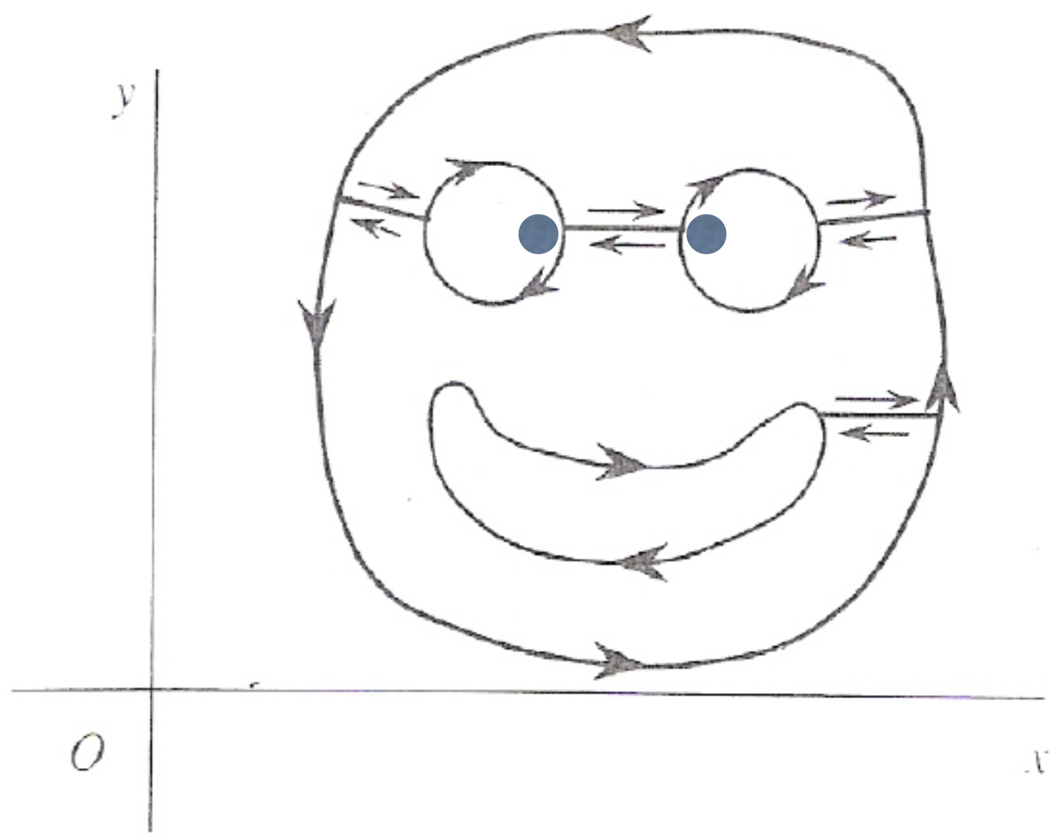
förskräckliga integraler...

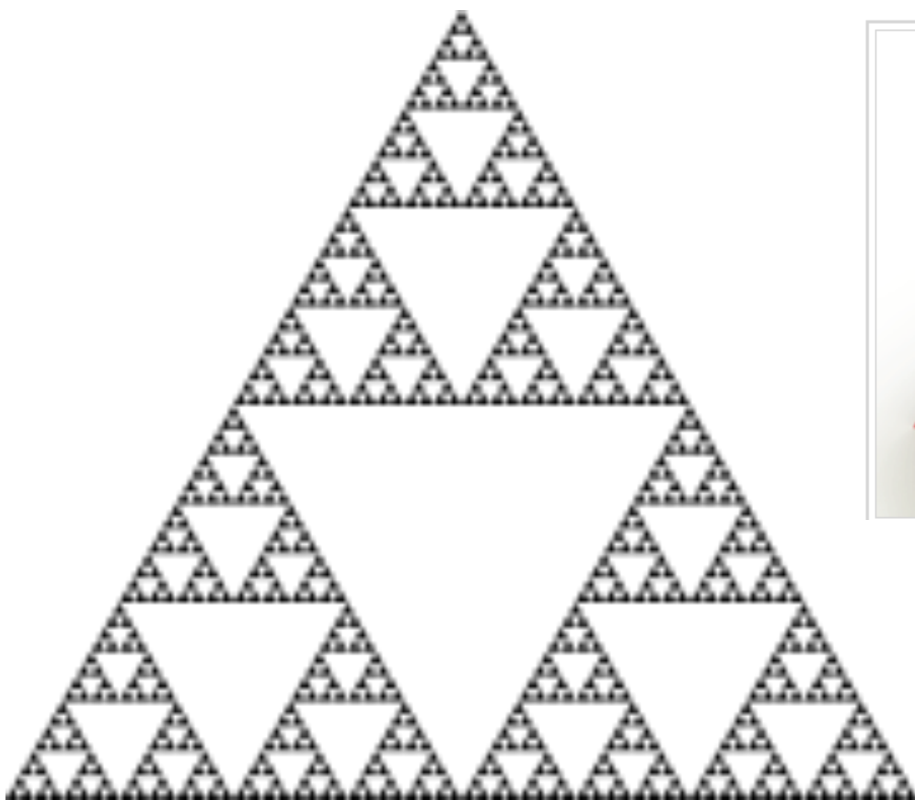


Hur integrera ***verkligt* komplicerade funktioner**, t.ex. funktioner som beskriver en

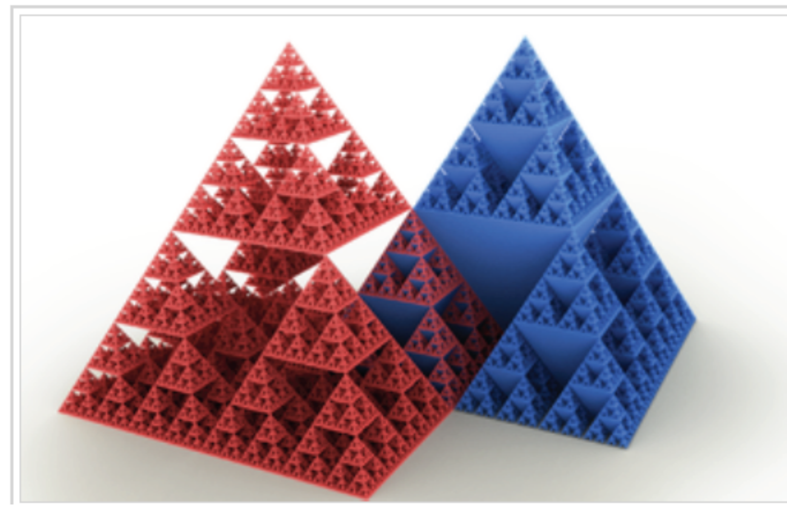
FRAKTAL eller är definierade på en FRAKTAL?

Hur integrera *verkligt* komplicerade funktioner, t.ex. funktioner som beskriver en

FRAKTAL eller är definierade på en FRAKTAL?

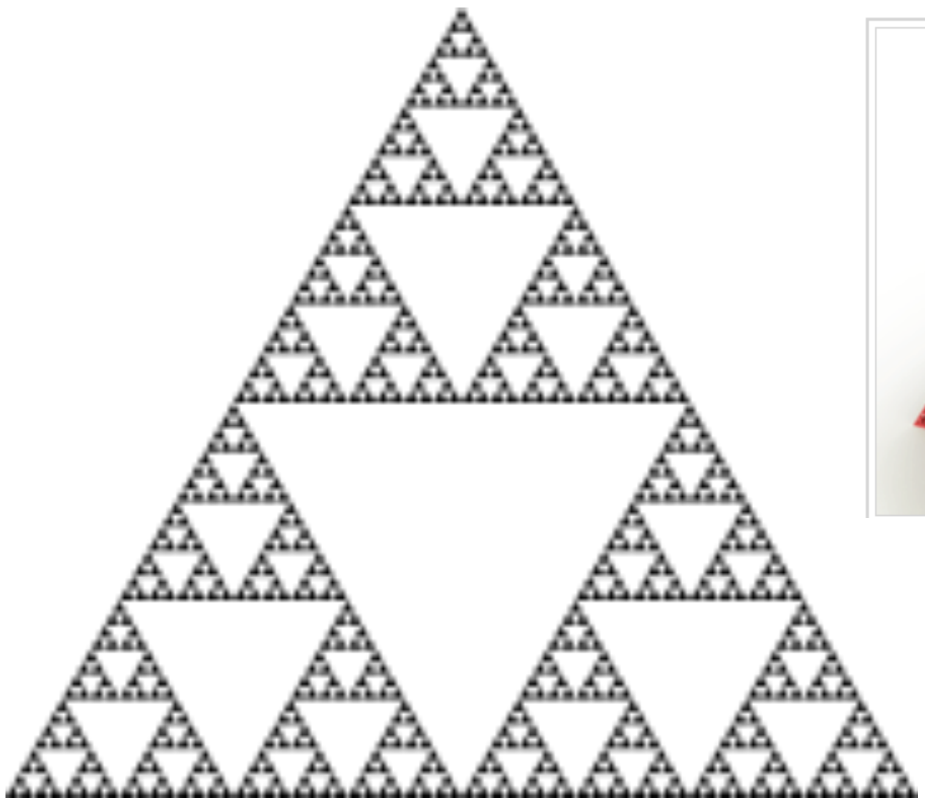


Sierpinskis triangel

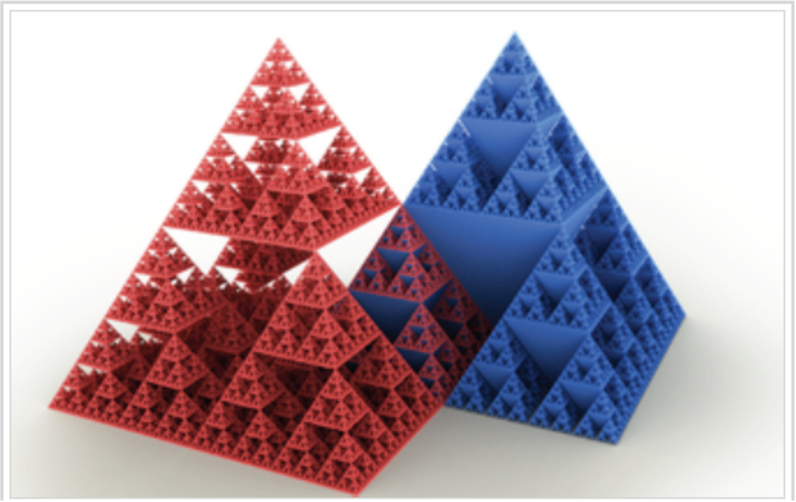


Hur integrera *verkligt* komplicerade funktioner, t.ex. funktioner som beskriver en

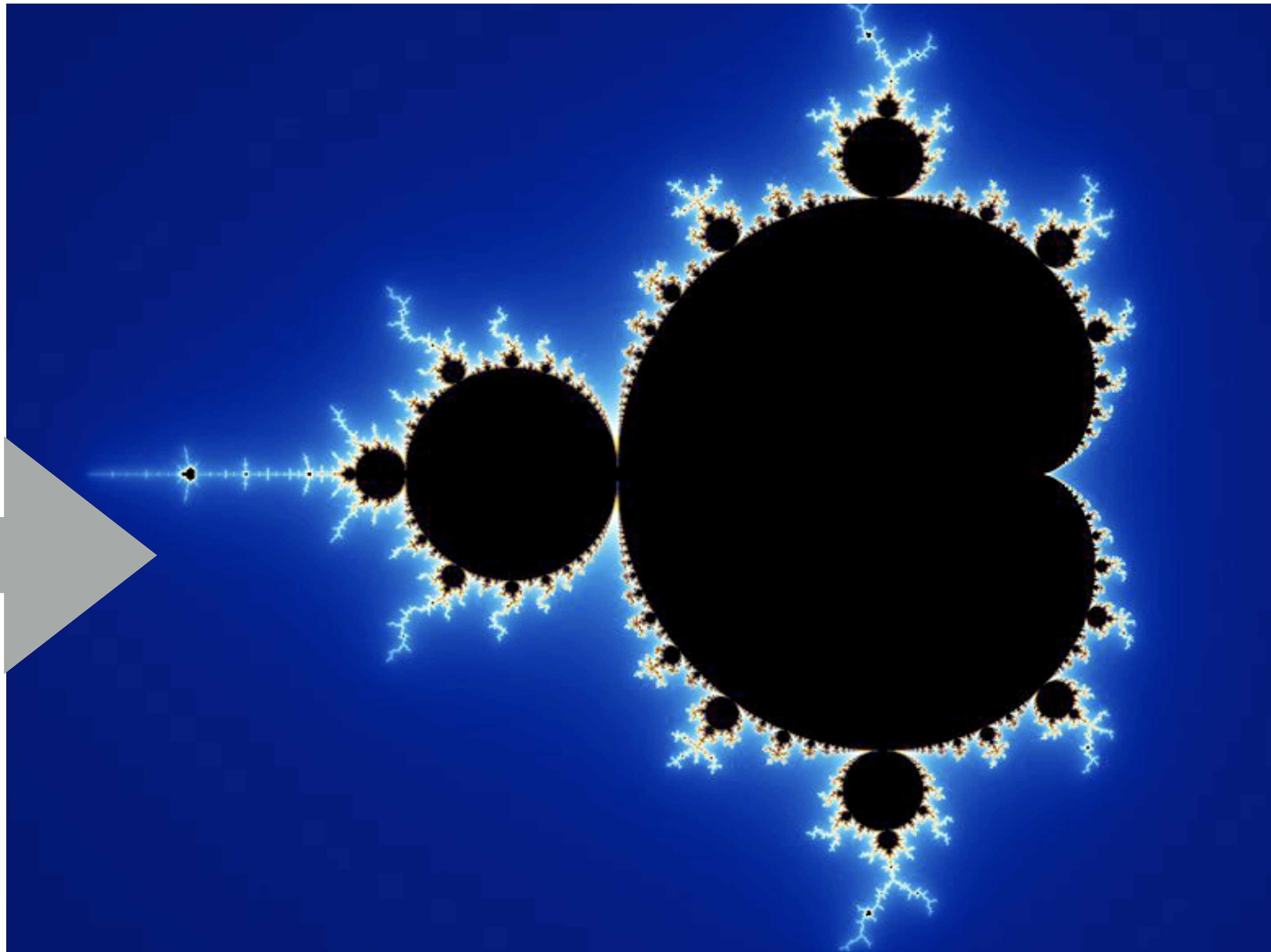
FRAKTAL eller är definierade på en FRAKTAL?



Sierpinskis triangel



Mandelbrotmängd

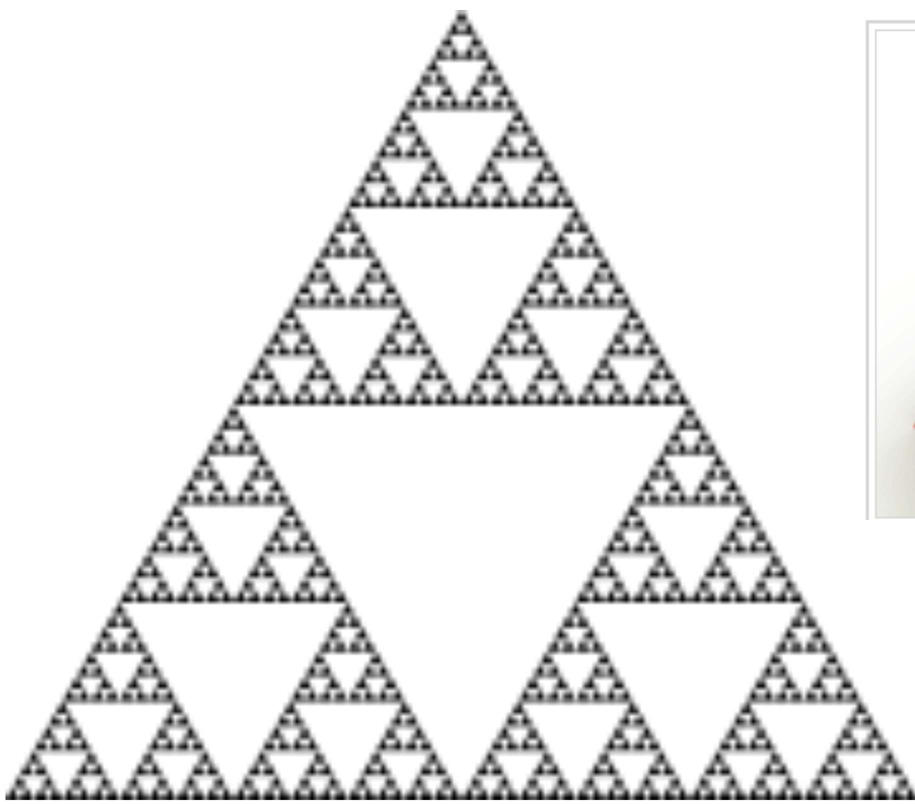


Mandelbrotmängden representeras i ett komplext talplan av alla komplexa tal c sådana att

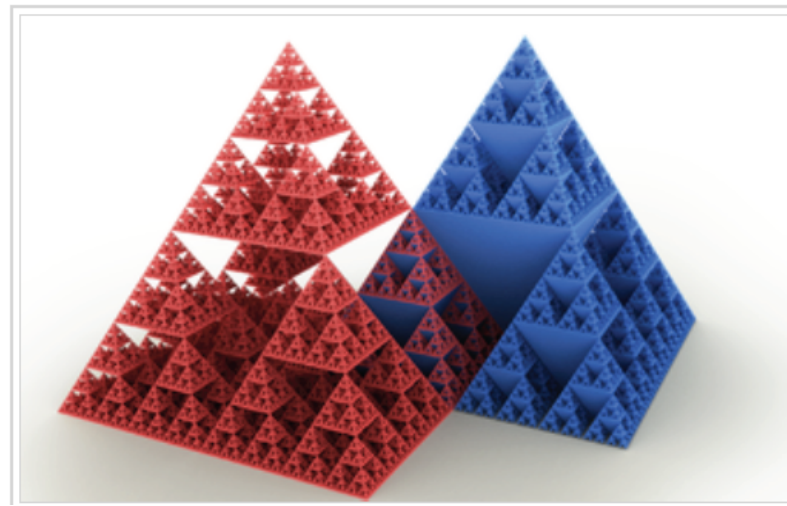
$$\{c \mid z_{n+1} = z_n^2 + c \not\to \infty \text{ då } n \to \infty, z_0 = 0\}$$

Hur integrera *verkligt* komplicerade funktioner, t.ex. funktioner som beskriver en

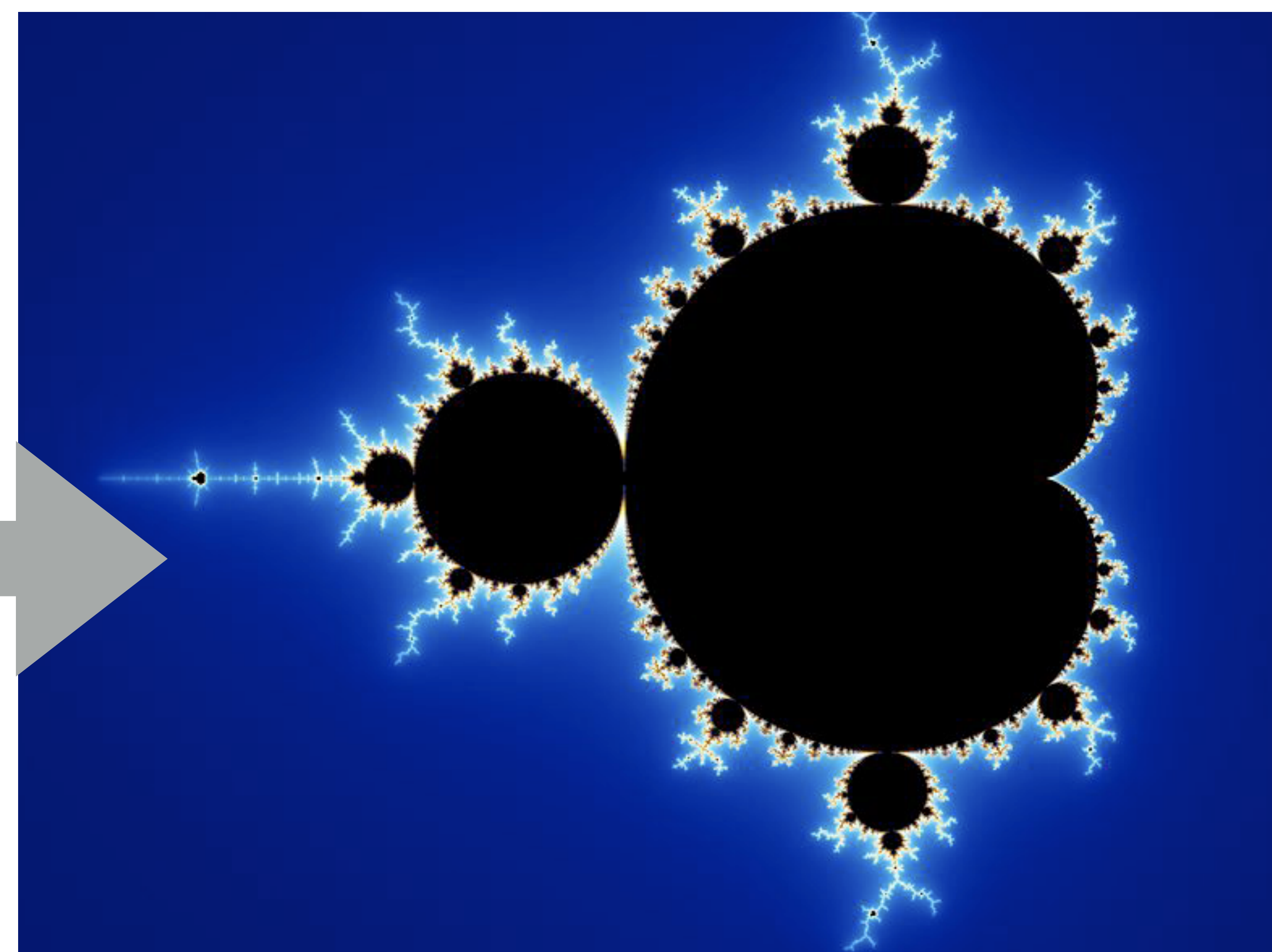
FRAKTAL eller är definierade på en FRAKTAL?



Sierpinskis triangel



Mandelbrotmängd



Mandelbrotmängden representeras i ett komplext talplan av alla komplexa tal c sådana att

$$\{c \mid z_{n+1} = z_n^2 + c \not\to \infty \text{ då } n \to \infty, z_0 = 0\}$$

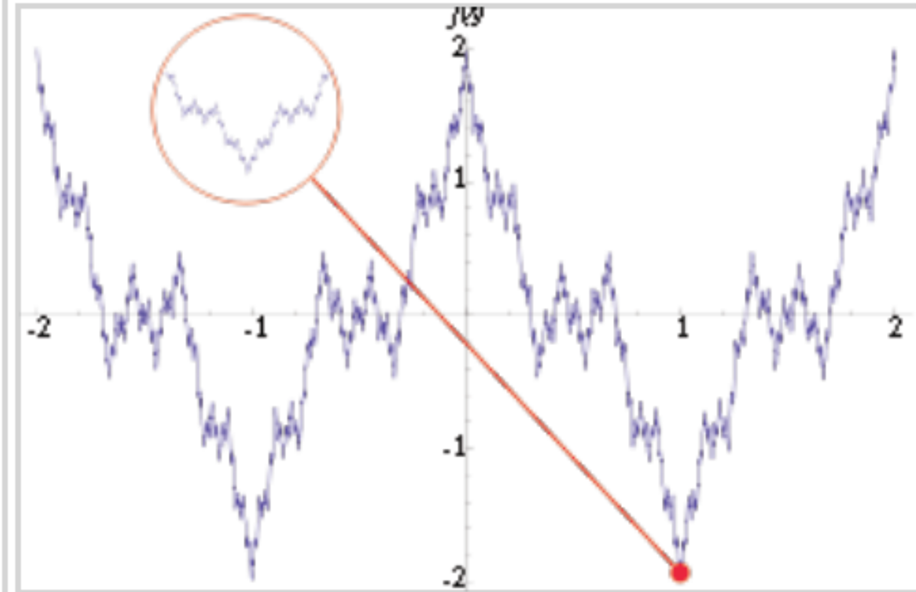
http://www.youtube.com/watch?v=gEw8xpb1aRA

Weierstrassfunktionen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x), \quad ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$$

...kontinuerlig funktion som inte är deriverbar någonstans!

Karl Weierstrass

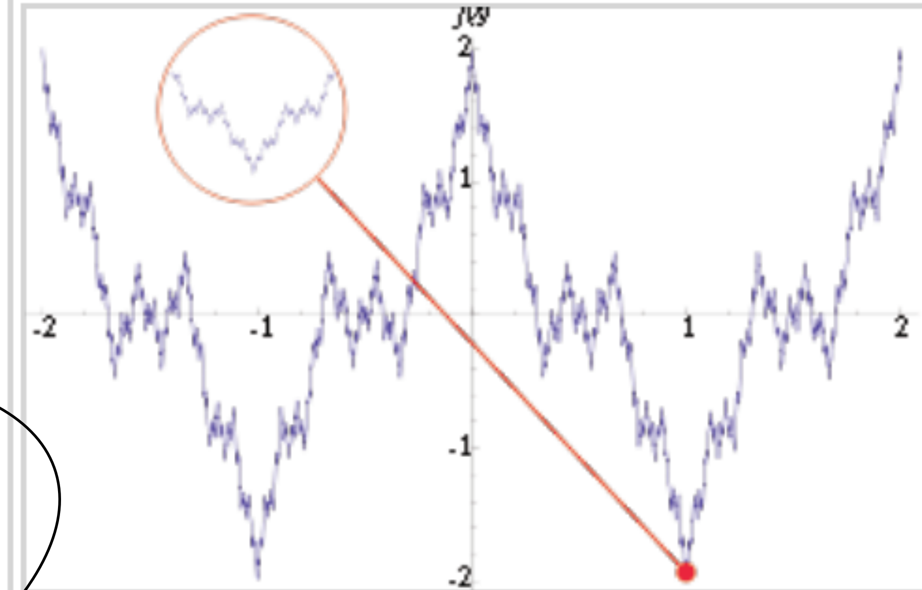


Plot of Weierstrass Function over the interval $[-2, 2]$. Like fractals, the function exhibits self-similarity: every zoom (red circle) is similar to the global plot.

Weierstrassfunktionen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x), \quad ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$$

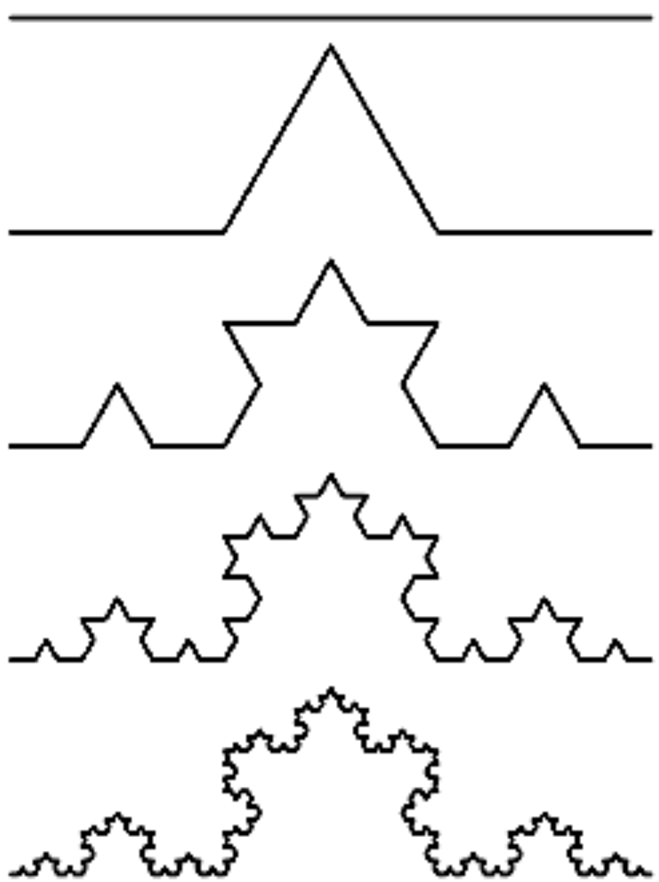
… ett patologiskt monster!
…ovärdigt matematiken!



Plot of Weierstrass Function over the interval $[-2, 2]$. Like fractals, the function exhibits self-similarity: every zoom (red circle) is similar to the global plot.

Charles Hermite, omkring 1887

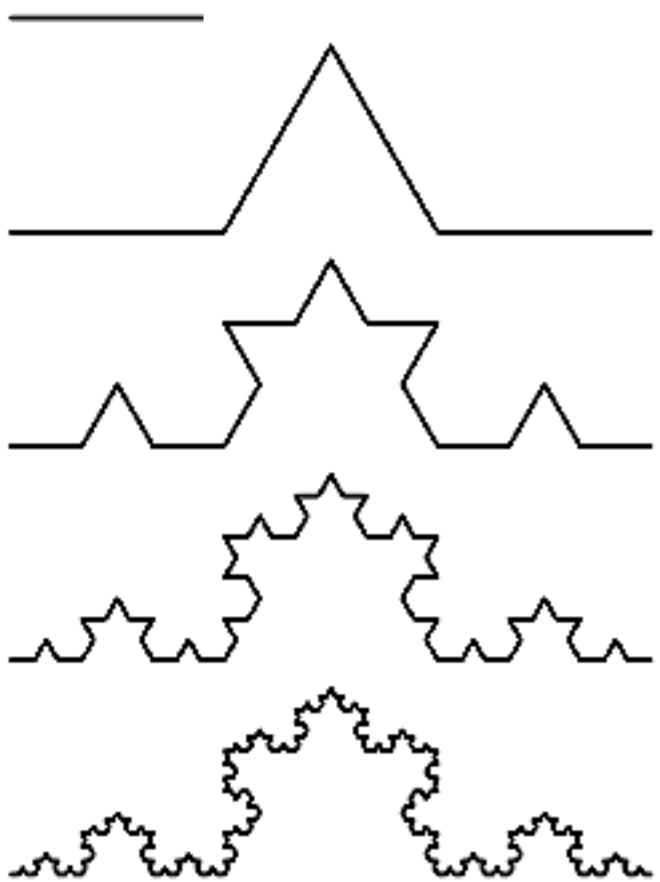
Kochkurva



1. Tag en linje.
2. Dela linjen i tre lika stora delar.
3. Gör ~~en kopia~~ två kopior av den mellersta delen.
4. Sätt upp de två kopiorna i vinkel mot varandra så att de får plats inom samma sträcka som en ensam linje annars gör.
5. Upprepa (iterera) från steg 2 för alla de nya linjer som uppkommit av operationen.

http://www.youtube.com/watch?v=JdMgvSWSKZI

Kochkurva



Hausdorff-dimension

$$D = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.26$$

Hausdorff-dimension

1D $\quad 3 \times$  $\rightarrow$  $\quad 3^1 = 3$

Hausdorff-dimension

LINJÄR SKALFAKTOR S

\# KOPIOR N

1D

$3 \times$ ⊢—

$3^1 = 3$

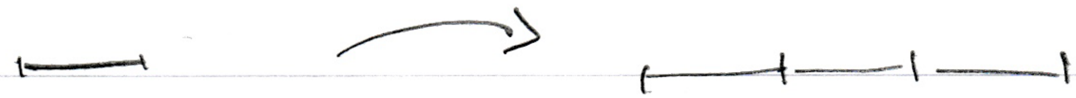
Hausdorff-dimension

LINJÄR SKALFAKTOR S

\# KOPIOR N

1D

3 ×

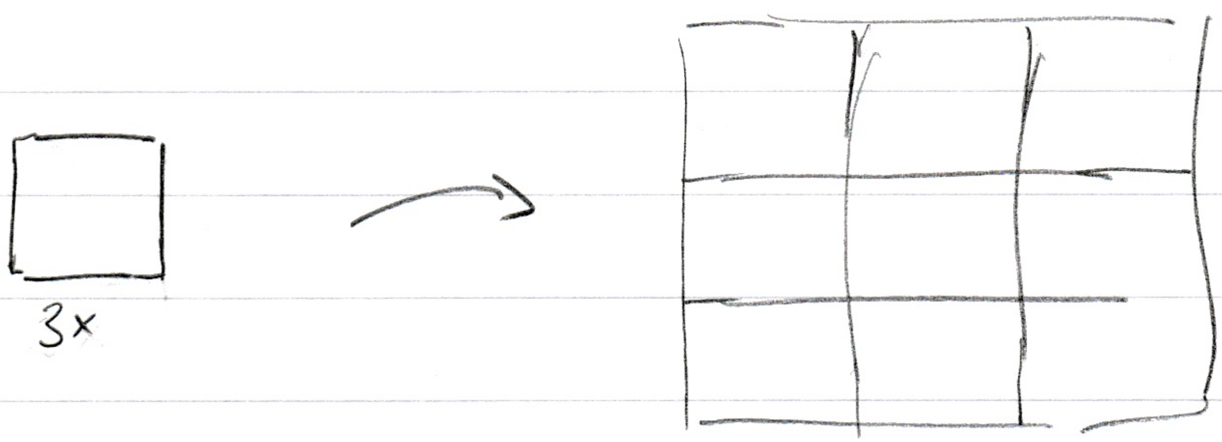


$3^1 = 3$

2D

3×

3×



$3^2 = 9$

Hausdorff-dimension

LINJÄR SKALFAKTOR S

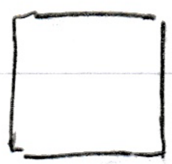
\# KOPIOR N

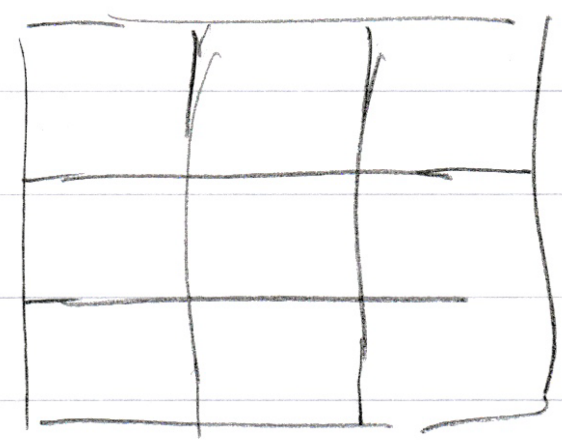
1D

$3 \times$ 

$3^1 = 3$

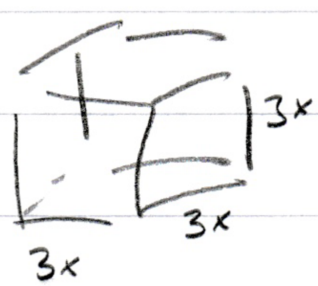
2D

$3\times$  $3\times$



$3^2 = 9$

3D



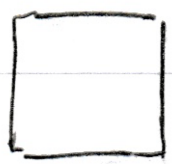
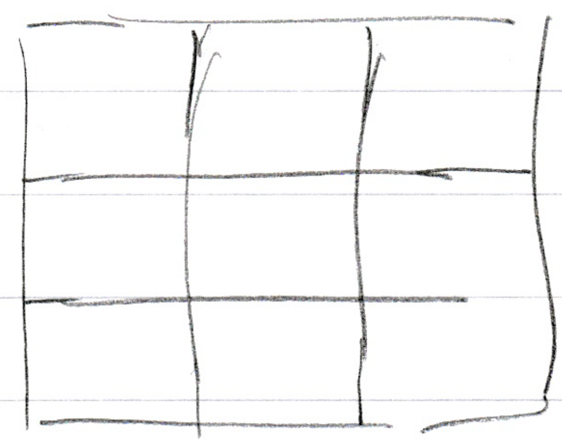
"JÄTTEKUB!"

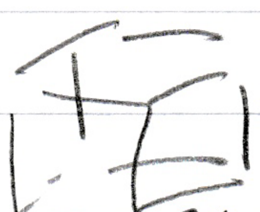
$3^3 = 27$

Hausdorff-dimension

LINJÄR SKALFAKTOR S — # KOPIOR N

1D: $3 \times$ ⟶ $3^1 = 3$

2D: $3\times$  $3\times$ ⟶  $3^2 = 9$

3D:  $3\times$ $3\times$ $3\times$ ⟶ "JÄTTEKUB!" $3^3 = 27$

$$N = s^D \Rightarrow \ln N = D \ln s$$

$$\Downarrow$$

$$D = \frac{\ln N}{\ln s}$$

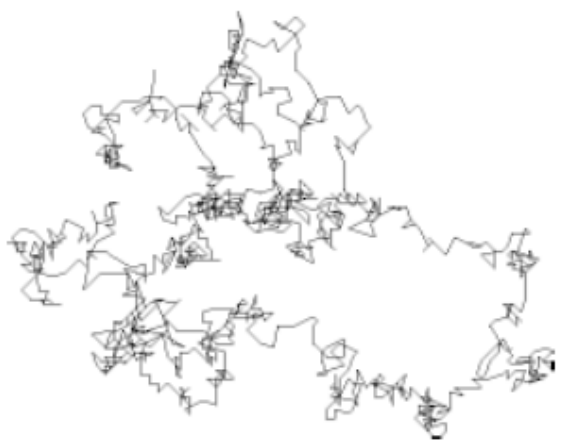
TILLÄMPNING PÅ KOCHKURVAN: $S = 3$, $N = 4$

$$\Downarrow$$

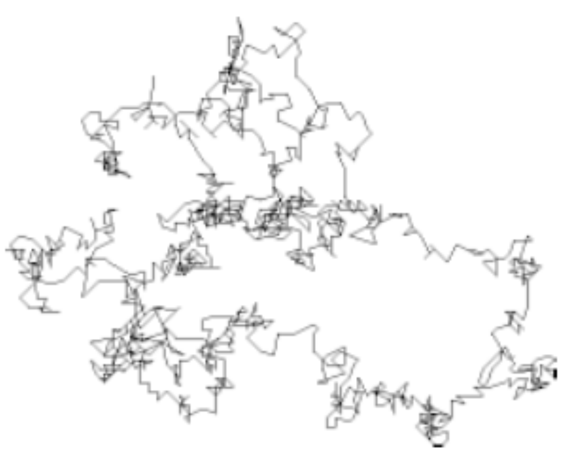
$$D = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1.26$$

Brownsk rörelse (datoranimerad)

Length=8747, Step=16



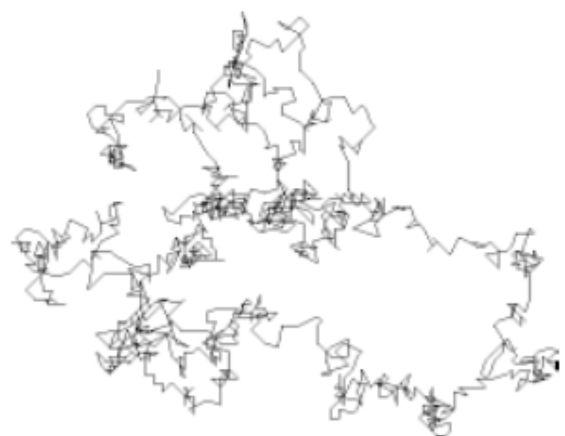
Length=12091, Step=8



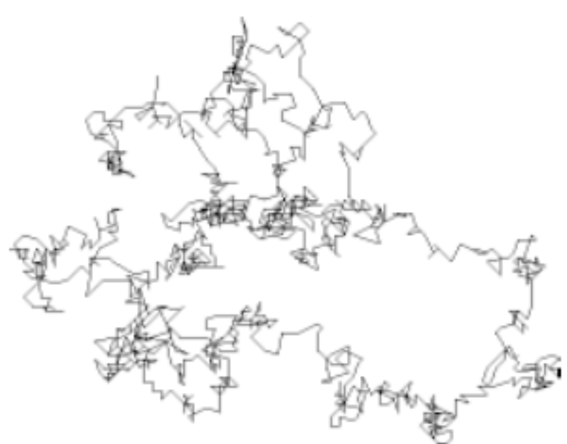
Length=17453, Step=4

Brownsk rörelse (datoranimerad)

Length=8747, Step=16



Length=12091, Step=8



Length=17453, Step=4

Fysiktillämpning:
Integrera över en funktion som beskriver statistiskt viktade "Brownska rörelser" i gränsen av en infinitesimalt kort steglängd

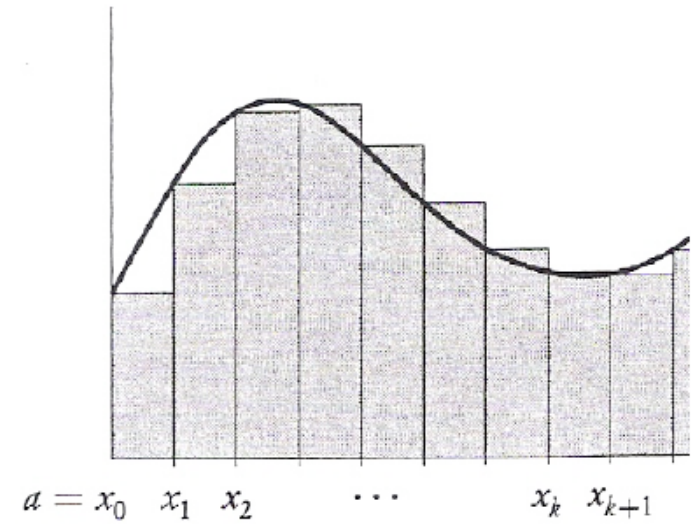
föreläsning 26/11 (I)

Bernhard Riemann, 1826 - 1866

Riemann-integral

$$\int_a^b f(x)dx \equiv \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})$$

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ styckvis kontinuerlig

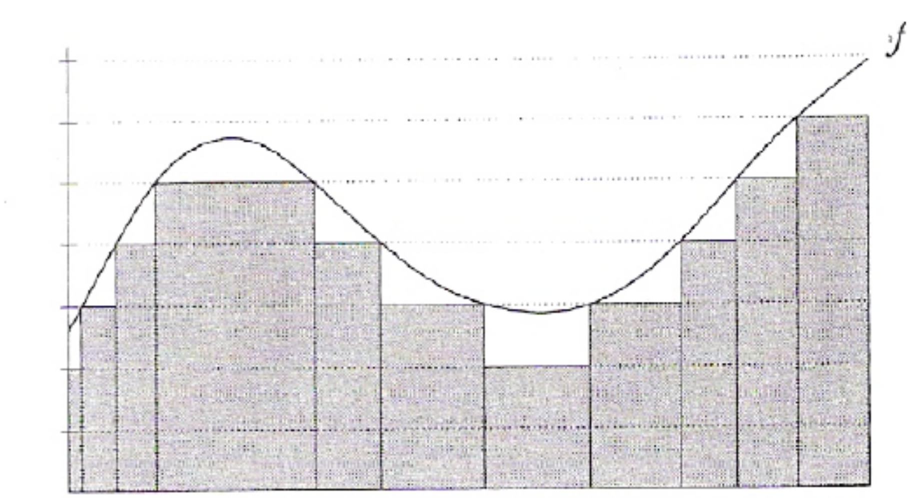


Lebesgue-integral

$$\int_a^b f(x)dx \equiv \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \mu(A_k^{(n)}) \cdot \frac{k}{2^n}$$

$$A_k^{(n)} = f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]\right)$$

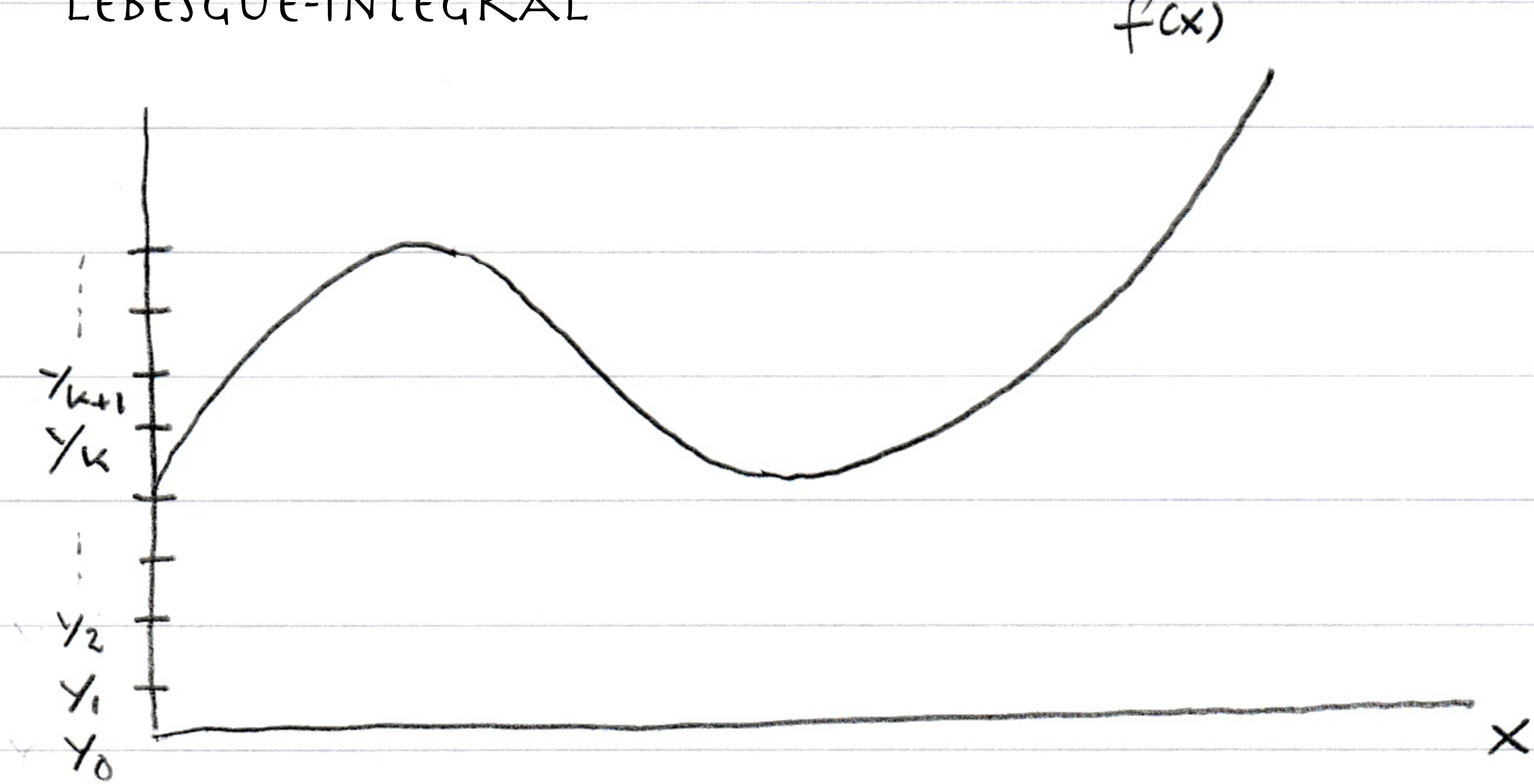
μ Lebesguemått



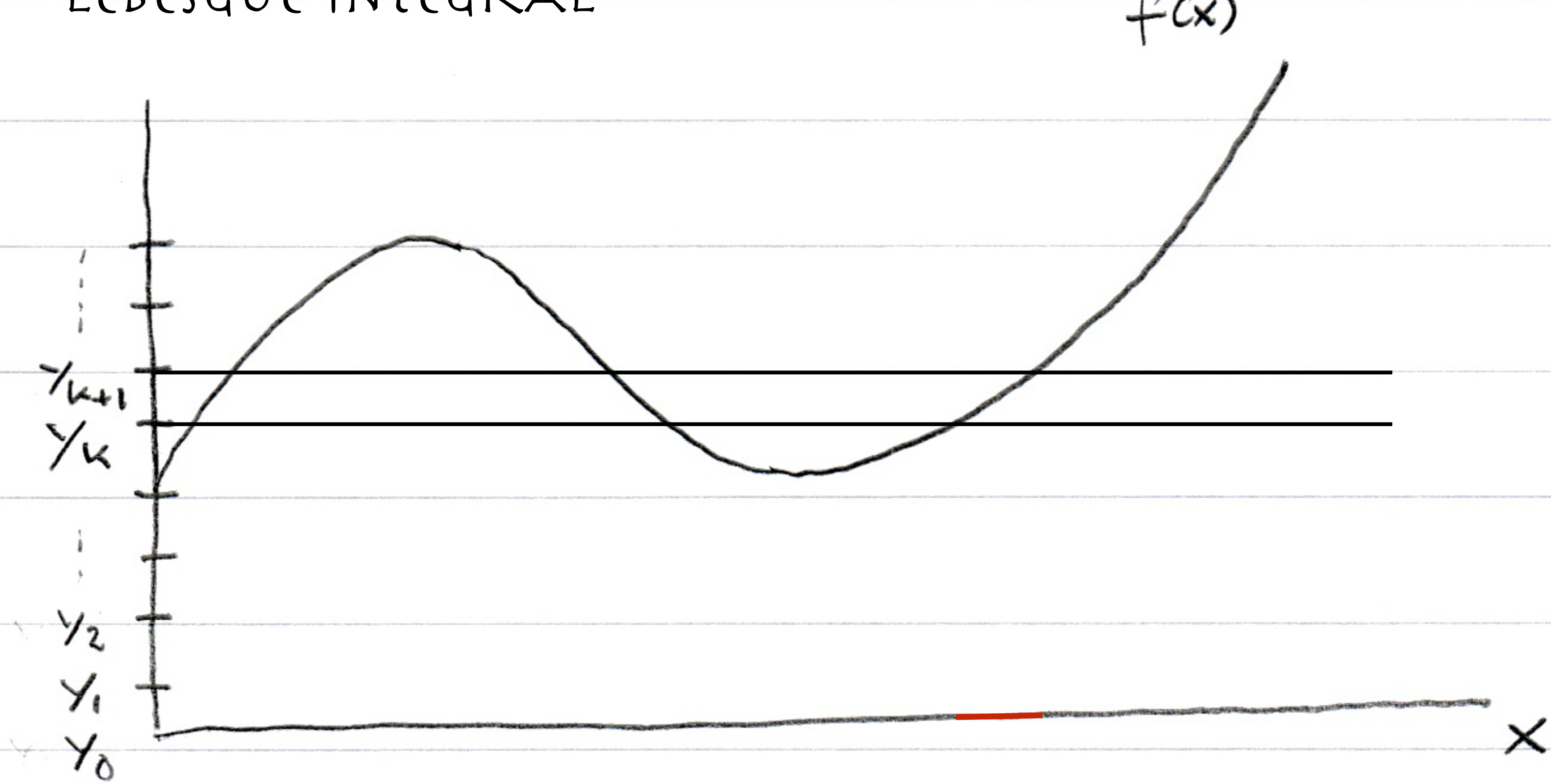
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *mätbar* funktion

Henri Lebesgue, 1875 -1941

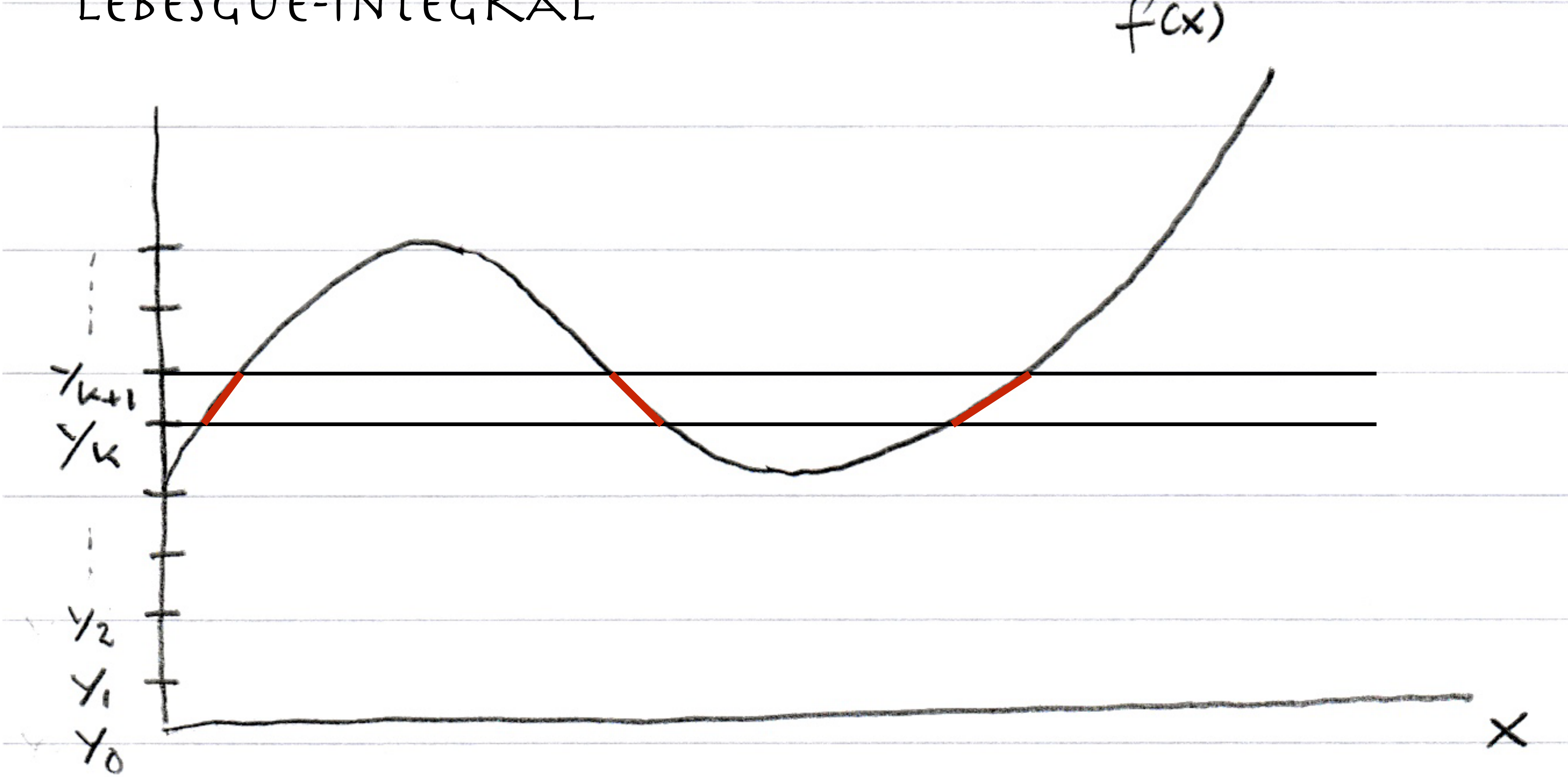
LEBESGUE-INTEGRAL



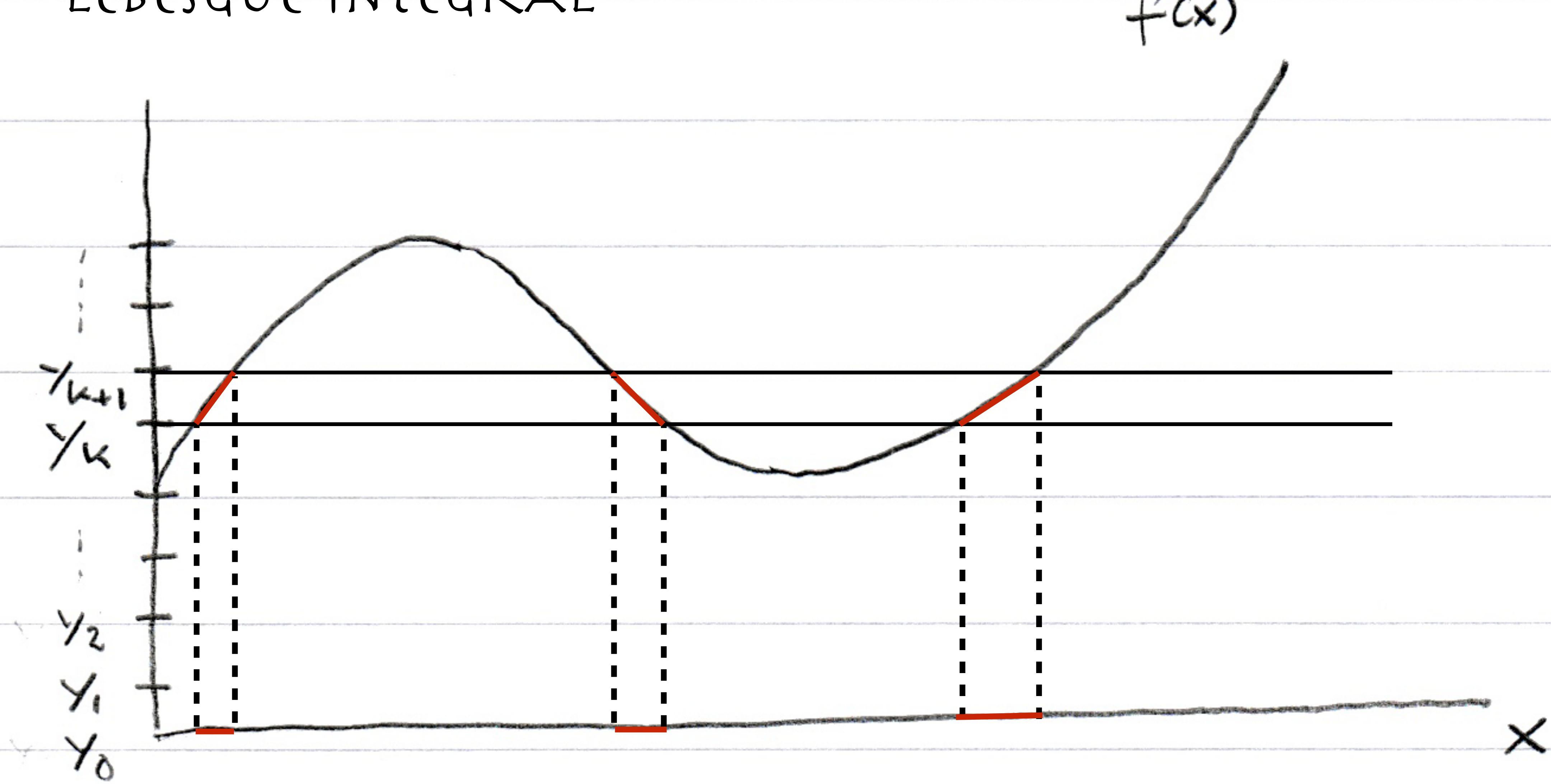
LEBESGUE-INTEGRAL



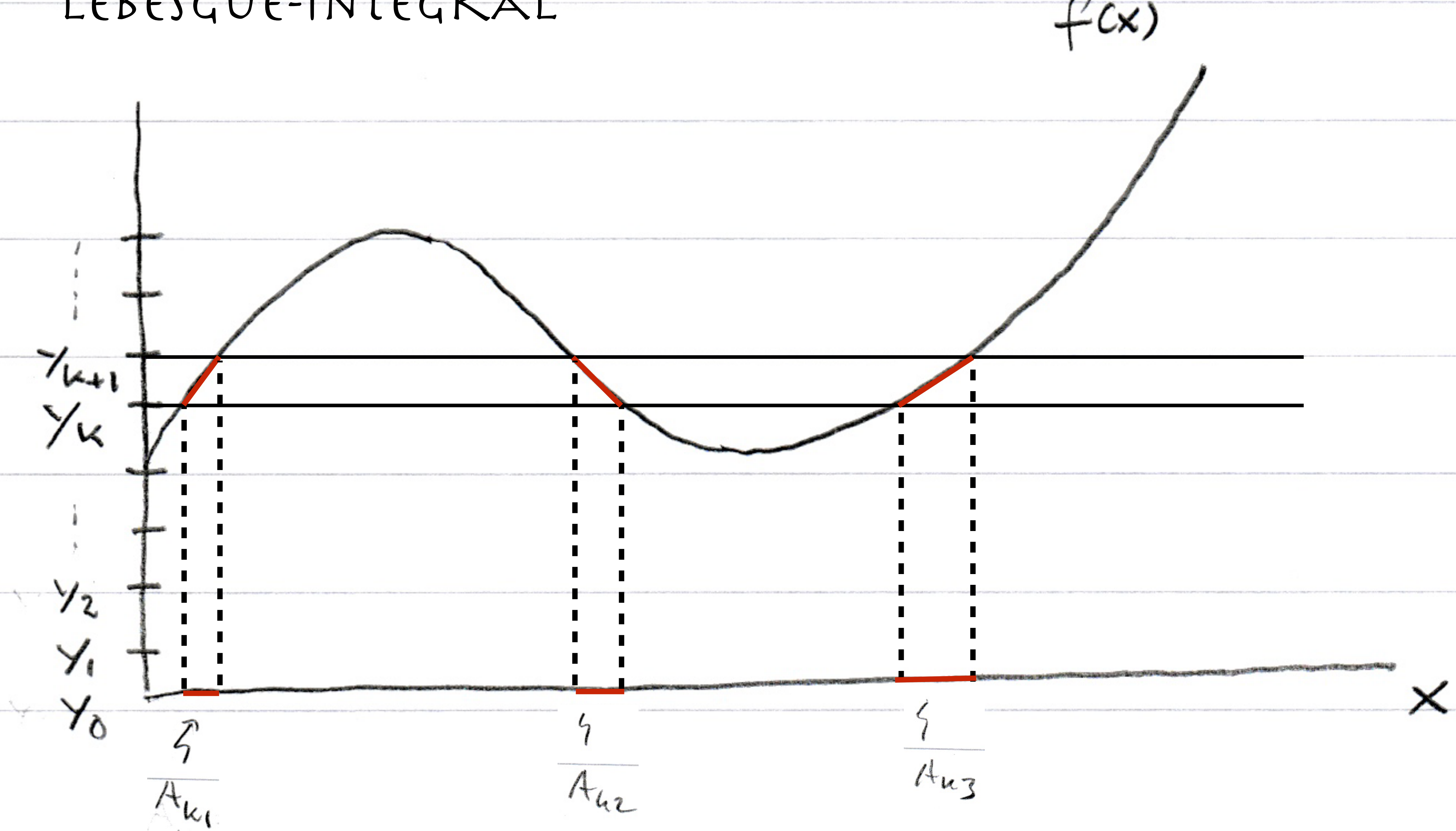
LEBESGUE-INTEGRAL



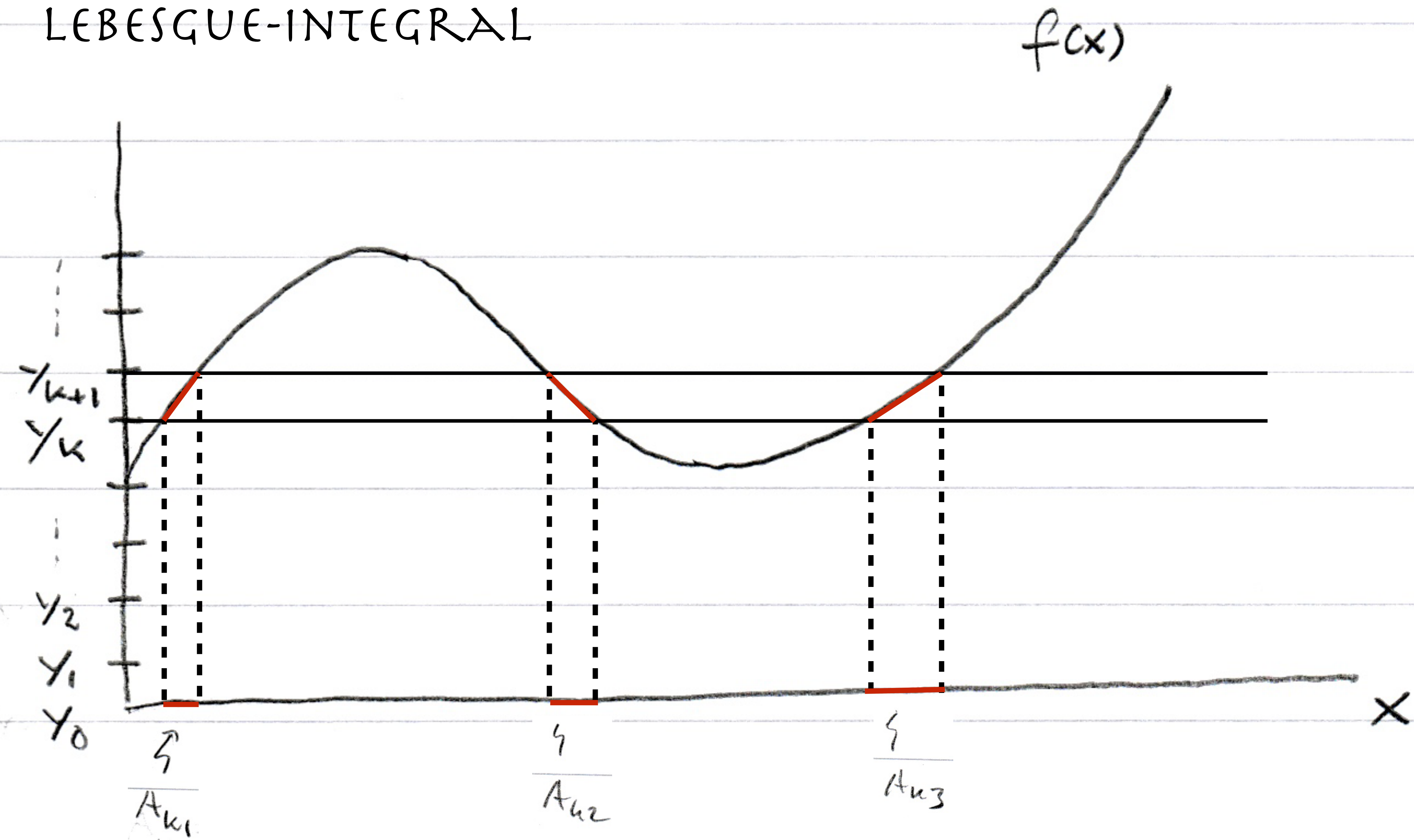
LEBESGUE-INTEGRAL



LEBESGUE-INTEGRAL

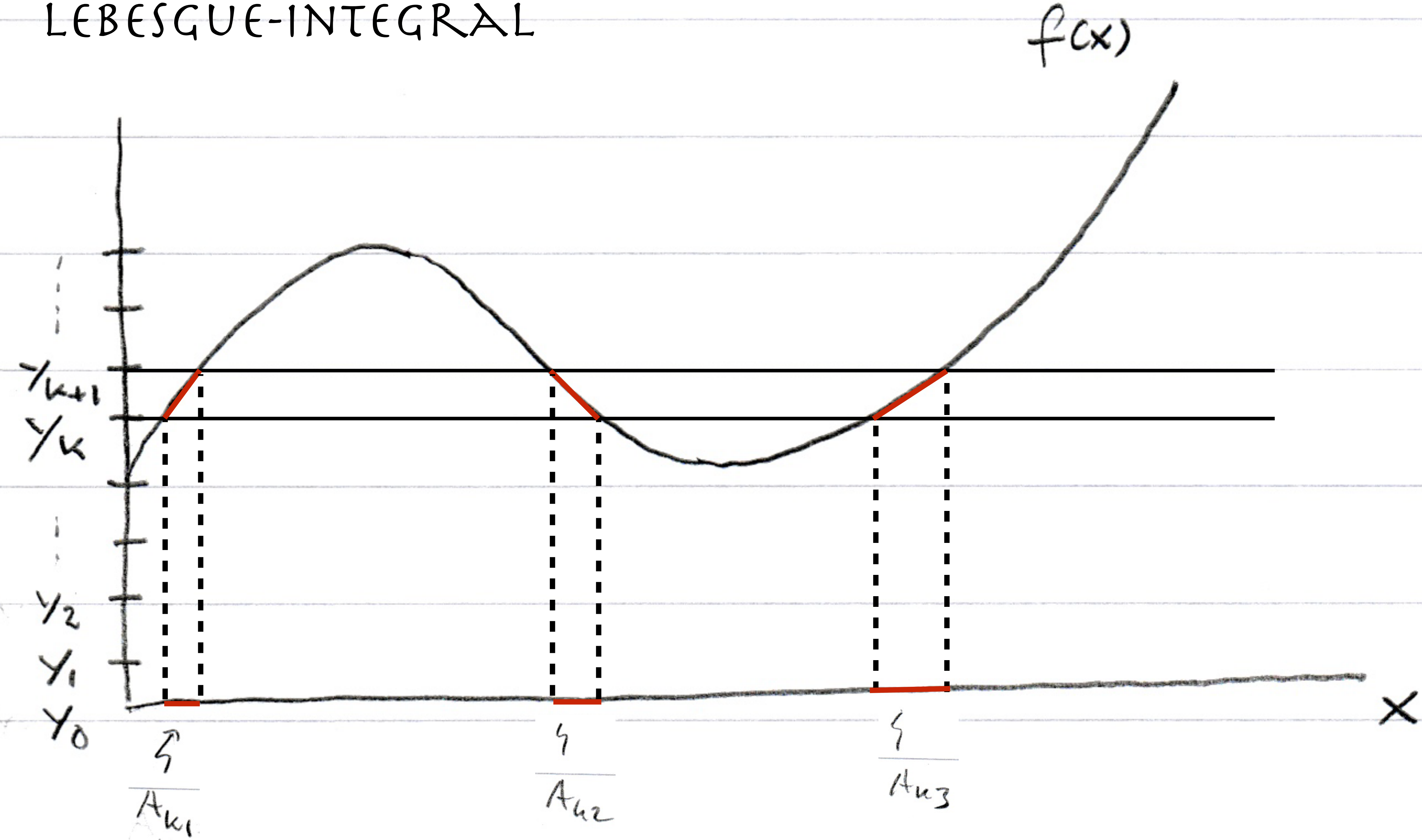


LEBESGUE-INTEGRAL



$$A_k = A_{k_1} \cup A_{k_2} \cup A_{k_3} = f^{-1}([y_k, y_{k+1}])$$

LEBESGUE-INTEGRAL



$$A_k^{(n)} = A_{k_1} \cup A_{k_2} \cup A_{k3} = f^{-1}([y_k, y_{k+1}])$$

$$= f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]\right)$$

LEBESGUE-INTEGRAL

$$A_k^{(n)} = A_{k_1} \cup A_{k_2} \cup A_{k_3} = f^{-1}([y_k, y_{k+1}])$$

$$= f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]\right)$$

$\mu(A_k^{(n)})$ = LEBESGUEMÅTTET AV $A_k^{(n)}$

= LÄNGD FÖR KONTINUUM-INTERVALL

= 0 FÖR INTERVALL SOM INNEHÅLLER UPPRÄKNELIGT MÅNGA PUNKTER

LEBESGUE-INTEGRAL

$$A_k^{(n)} = A_{k_1} \cup A_{k_2} \cup A_{k_3} = f^{-1}([y_k, y_{k+1}])$$

$$= f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]\right)$$

$\mu(A_k^{(n)})$ = LEBESGUEMÅTTET AV $A_k^{(n)}$

= LÄNGD FÖR KONTINUUM-INTERVALL

= 0 FÖR INTERVALL SOM INNEHÅLLER UPPRÄKNELIGT MÅNGA PUNKTER

$$\int_a^b f(x)dx \equiv \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \mu(A_k^{(n)}) \cdot \frac{k}{2^n}$$

Allt som behövs för Lebesgue-integrabilitet är att funktionens inversa mängd har ett väldefinierat Lebesguemått. OK för nästan *alla* funktioner!

LEBESGUE-INTEGRAL

$$A_k^{(n)} = A_{k_1} \cup A_{k_2} \cup A_{k_3} = f^{-1}([y_k, y_{k+1}])$$

$$= f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]\right)$$

$\mu(A_k^{(n)})$ = LEBESGUEMÅTTET AV $A_k^{(n)}$

= LÄNGD FÖR KONTINUUM-INTERVALL

= 0 FÖR INTERVALL SOM INNEHÅLLER UPPRÄKNELIGT MÅNGA PUNKTER

$$\int_a^b f(x)dx \equiv \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \mu(A_k^{(n)}) \cdot \frac{k}{2^n}$$

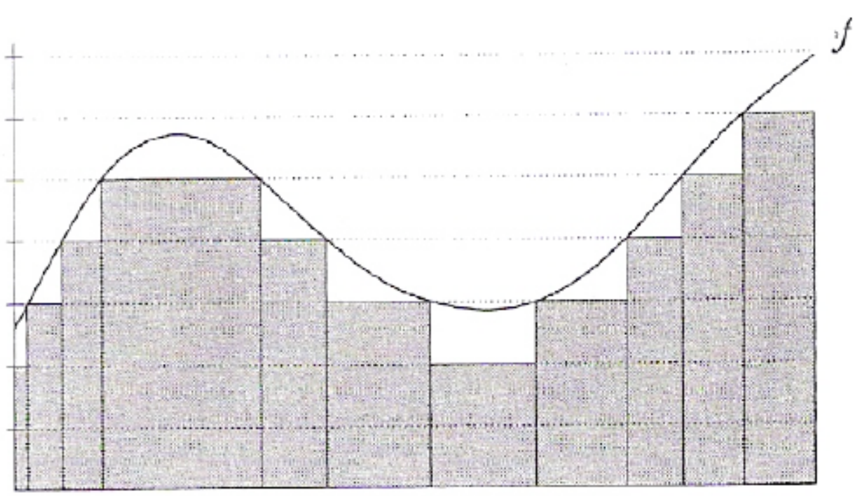
Allt som behövs för Lebesgue-integrabilitet är att funktionens inversa mängd har ett väldefinierat Lebesguemått. OK för nästan *alla* funktioner!

Exempel på en mängd som *inte* har ett väldefinierat Lebesguemått: VITALIMÄNGDEN $\mathscr{V}$

$\mathcal{V} \subset [0,1]$ består av mängden av reella tal v sådana att $\forall r \in R\ \exists! v \in \mathcal{V} : r - v \in Q$

LEBESGUE-INTEGRALEN...

$$\int_a^b f(x)dx \equiv \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \mu(A_k^{(n)}) \cdot \frac{k}{2^n} \qquad A_k^{(n)} = f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]\right)$$



... KAN ANVÄNDAS FÖR ATT BEVISA MYCKET ANVÄNDBARA TEOREM OM **INTEGRALER OCH GRÄNSVÄRDEN** (DERIVATOR, SERIER, ANDRA INTEGRALER,...)

Lebesgues (dominerade) konvergensteorem (lättversion)

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$$

om f_n konvergerar punktvis till f nästan överallt
och det existerar en Lebesgue-integrabel funktion
g sådan att $|\,f_n\,| \leq g$ nästan överallt

punktvis konvergens: $\forall x\,\exists N |f_n(x) - f(x)| < \epsilon,\ n > N$

likformig konvergens: $\exists N\,\forall x |f_n(x) - f(x)| < \epsilon,\ n > N$

Fubini (-Tonelli) teoremet (lättversion)

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y)\,dy\right) dx = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,dx\right) dy$$

där $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ är en icke-negativ funktion

För en bra diskussion av omkastning av derivata och integral med användande av Lebesgueteori, se

http://www.wikiwand.com/en/Leibniz_integral_rule#/Measure_theory_statement

Men…i allmänhet… i fysiken…
…att ta gränsvärden är subtilt och kräver eftertanke,
fysikalisk intuition, och matematisk erfarenhet!

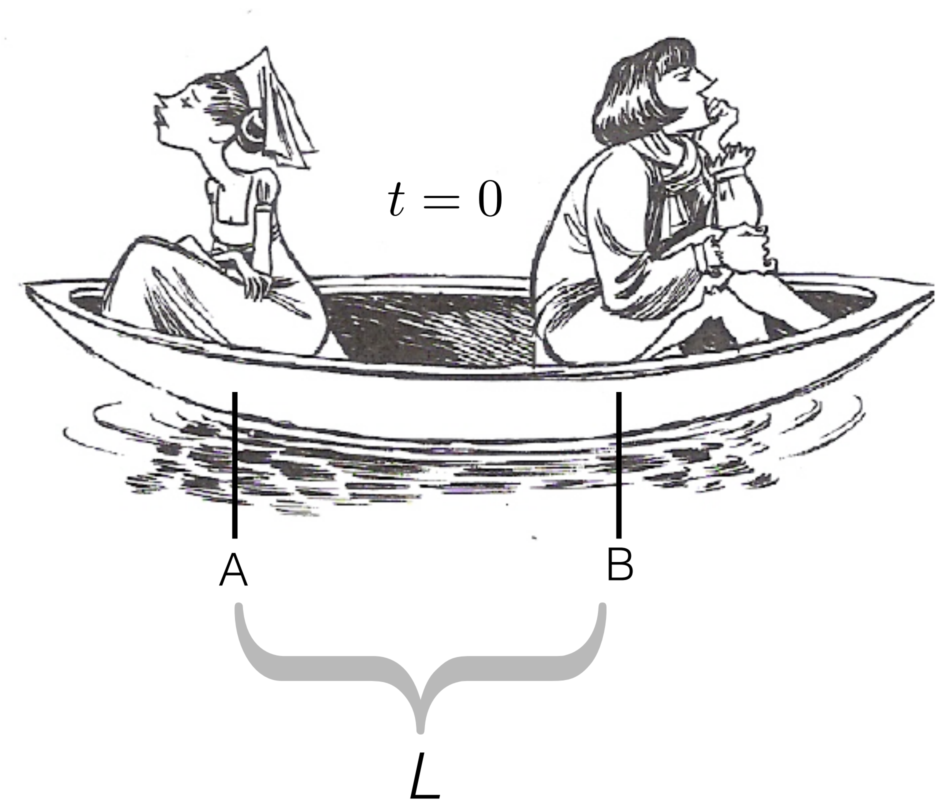
Att ta gränsvärden i fysiken är subtilt och kräver eftertanke, fysikalisk intuition,och matematisk erfarenhet!

Att ta gränsvärden i fysiken är subtilt och kräver
eftertanke, fysikalisk intuition, och matematisk erfarenhet!

Ett exempel: Romeo och Julia på en roddtur

Att ta gränsvärden i fysiken är subtilt och kräver eftertanke, fysikalisk intuition, och matematisk erfarenhet!

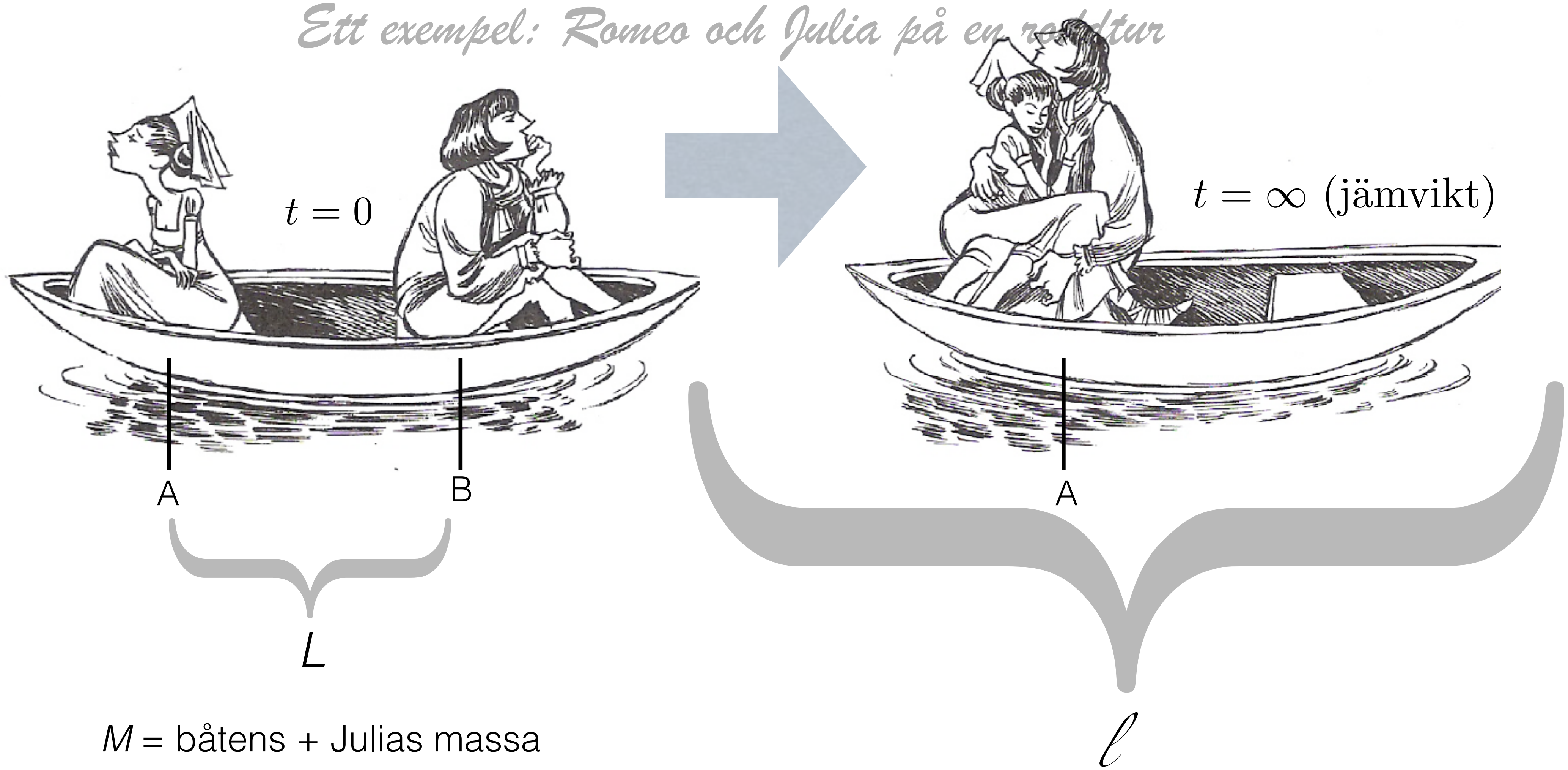
Ett exempel: Romeo och Julia på en roddtur



M = båtens + Julias massa
m = Romeos massa

Att ta gränsvärden i fysiken är subtilt och kräver
eftertanke, fysikalisk intuition, och matematisk erfarenhet!

Ett exempel: Romeo och Julia på en roddtur

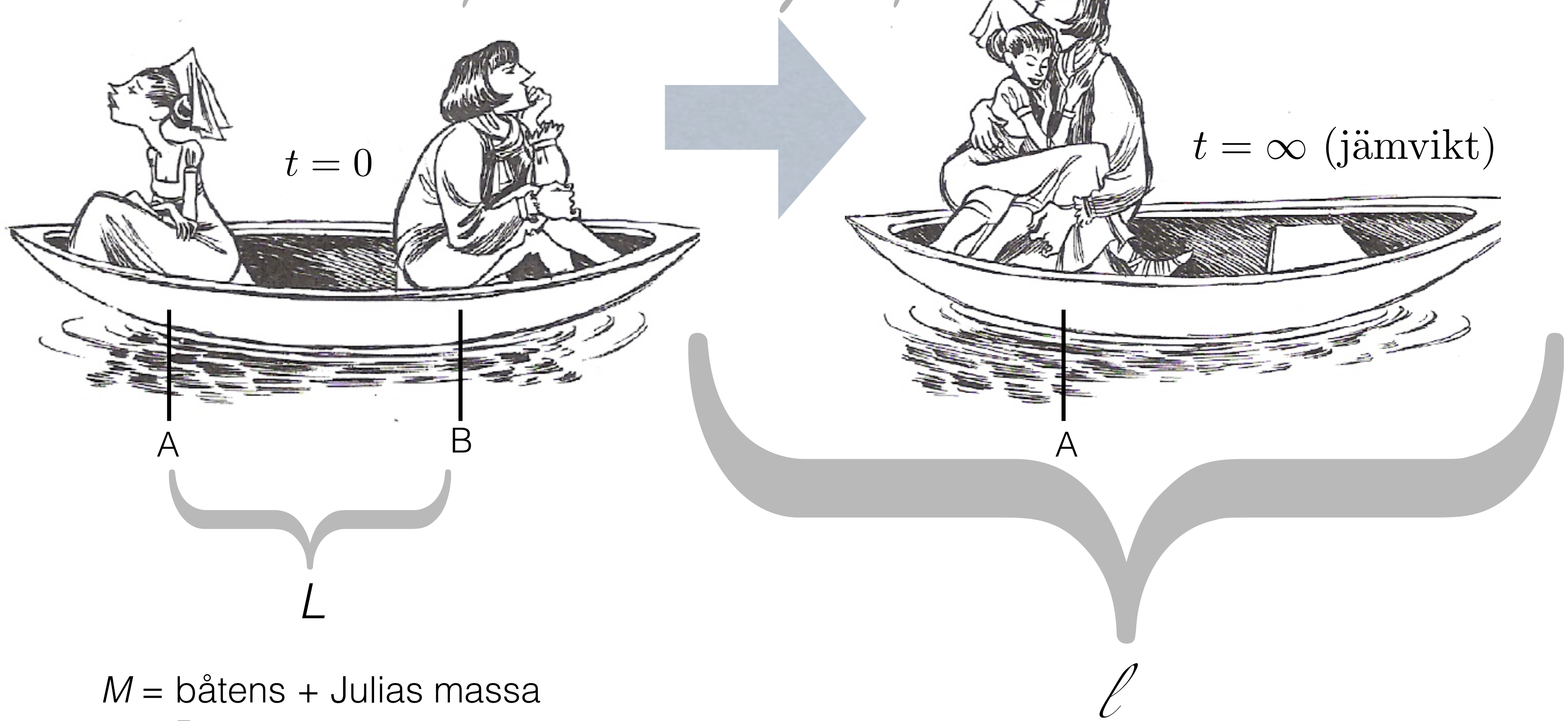


M = båtens + Julias massa
m = Romeos massa

Problem: Romeo går från B till A. Båten förflyttar sig (rekyleffekt). Hur långt?

Att ta gränsvärden i fysiken är subtilt och kräver eftertanke, fysikalisk intuition, och matematisk erfarenhet!

Ett exempel: Romeo och Julia på en roddtur



M = båtens + Julias massa
m = Romeos massa

Problem: Romeo går från B till A. Båten förflyttar sig (rekyleffekt). Hur långt?

Två fall att räkna på:

(1) perfekt fluid, $\eta = 0$

motstånd mot flöden

(2) viskös fluid, $\eta \neq 0$ (H_2O har $\eta \approx 9 \times 10^{-4}$ Pa s)

(1) $\vec{R}_{CM}(\text{båt} + \text{Julia} + \text{Romeo}_B) = \vec{R}_{CM}(\text{båt} + \text{Julia} + \text{Romeo}_A)$

ty inga yttre krafter

$$\Rightarrow \ell = \frac{m}{m+M} L$$

(1) $\vec{R}_{CM}(\text{båt+Julia+Romeo}_B) = \vec{R}_{CM}(\text{båt+Julia+Romeo}_A)$

ty inga yttre krafter

$\Rightarrow \ell = \frac{m}{m+M} L$

(2) Yttre kraft! Skriv rörelseekvationen för problemet.

$x(t)$ = läget för båt+Julias CM relativt ett yttre fixt koordinatsystem

$y(t)$ = läget för Romeos CM

$$\Rightarrow \quad M\ddot{x} + m\ddot{y} = -\eta\dot{x} \qquad (i)$$

Integrera från $t=0$ till $t=\infty$

$\dot{x} \to 0$ då $t \to \infty$ p.g.a. friktion ($\eta \neq 0$)

$\Rightarrow \dot{y} \to 0$ —"—

Vi har vidare antagit att $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$

$\Bigg\}$ (ii)

$$(i) \Rightarrow \underbrace{M\dot{x} + m\dot{y}\Big|_{t=0}^{\infty}}_{\text{från (ii)} = 0} = -\eta x\Big|_{t=0}^{\infty} = -\eta\big(\underbrace{x(t=\infty) - x(t=0)}_{\ell}\big)$$

$$\Rightarrow \ell = 0$$

föreläsning 26/11 (II)

(1) $\vec{R}_{CM}(\text{båt+Julia+Romeo}_B) = \vec{R}_{CM}(\text{båt+Julia+Romeo}_A)$

ty inga yttre krafter

$$\Rightarrow \ell = \frac{m}{m+M} L$$

(2) Yttre kraft! Skriv rörelseekvationen för problemet.

$x(t)$ = läget för båt+Julias CM relativt ett yttre fixt koordinatsystem

$y(t)$ = läget för Romeos CM

$$\Rightarrow M\ddot{x} + m\ddot{y} = -\eta\dot{x} \qquad (i)$$

Integrera från $t=0$ till $t=\infty$

$$\left.\begin{array}{ll} \dot{x} \to 0 \text{ då } t \to \infty & \text{p.g.a. friktion } (\eta \neq 0) \\ \Rightarrow \dot{y} \to 0 & \text{—〃—} \\ \text{Vi har vidare antagit att } \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0 & \end{array}\right\} (ii)$$

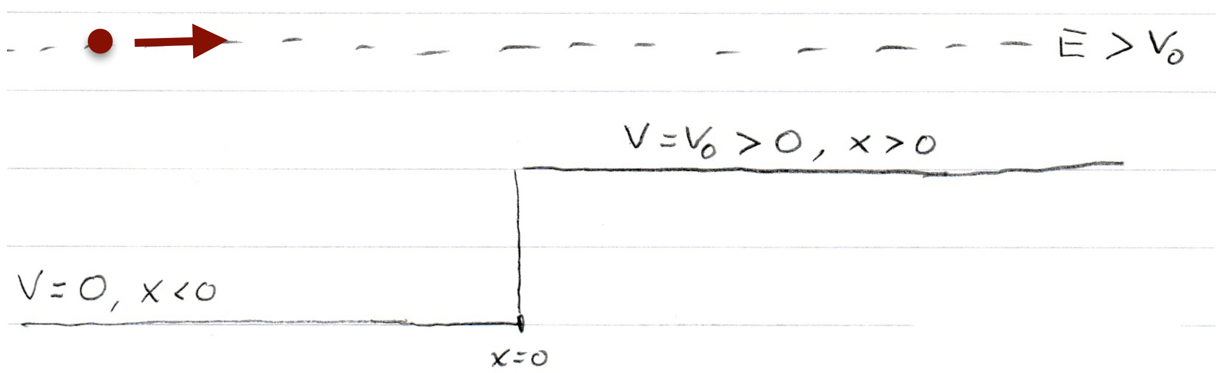
$$(i) \Rightarrow \underbrace{M\dot{x} + m\dot{y}\Big|_{t=0}^{\infty}}_{\text{från (ii)} \,=\, 0} = -\eta x\Big|_{t=0}^{\infty} = -\eta\big(\underbrace{x(t=\infty) - x(t=0)}_{\ell}\big)$$

$$\Rightarrow \ell = 0$$

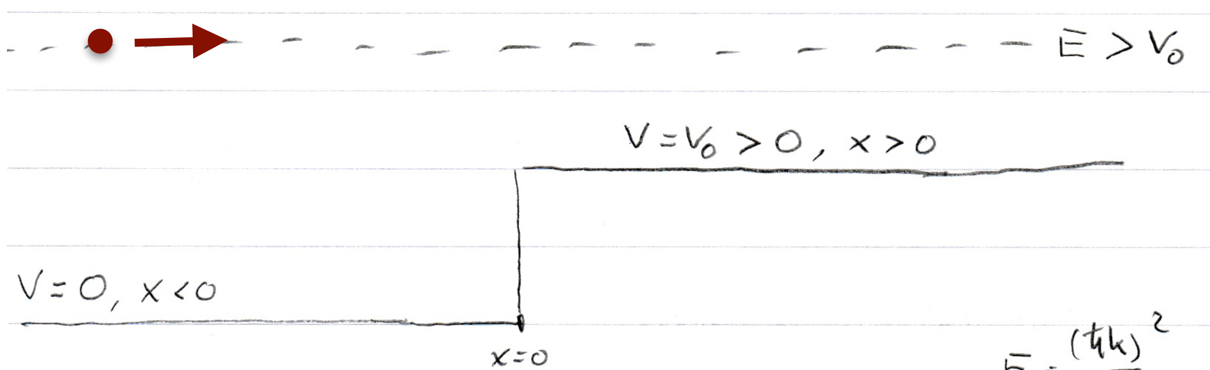
?

$$(1) \;\&\; (2) \Rightarrow \underbrace{\lim_{\eta \to 0} \ell(\eta)}_{=0} \neq \underbrace{\ell(0)}_{\frac{m}{m+M}L}$$

Kvantmekanisk potentialbarriär: singulär gräns?



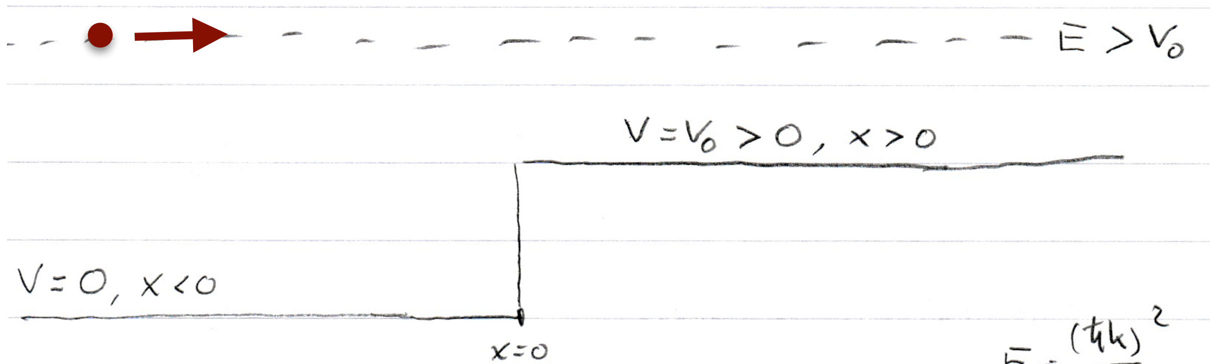
Kvantmekanisk potentialbarriär: singulär gräns?



$$E = \frac{(\hbar k)^2}{2m}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Be^{-ikx}, & x < 0, \quad k = \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \\ Ae^{ik'x}, & x > 0, \quad k' = \dfrac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar} \end{cases}$$

Kvantmekanisk potentialbarriär: singulär gräns?



$$E = \frac{(\hbar k)^2}{2m}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Be^{-ikx}, & x < 0, \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \\ Ae^{ik'x}, & x > 0, \quad k' = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar} \end{cases}$$

Sannolikhet R för reflektion vid $x = 0$: $R = |B|^2$

ψ och $\partial_x \psi$ måste vara kontinuerliga vid $x = 0$

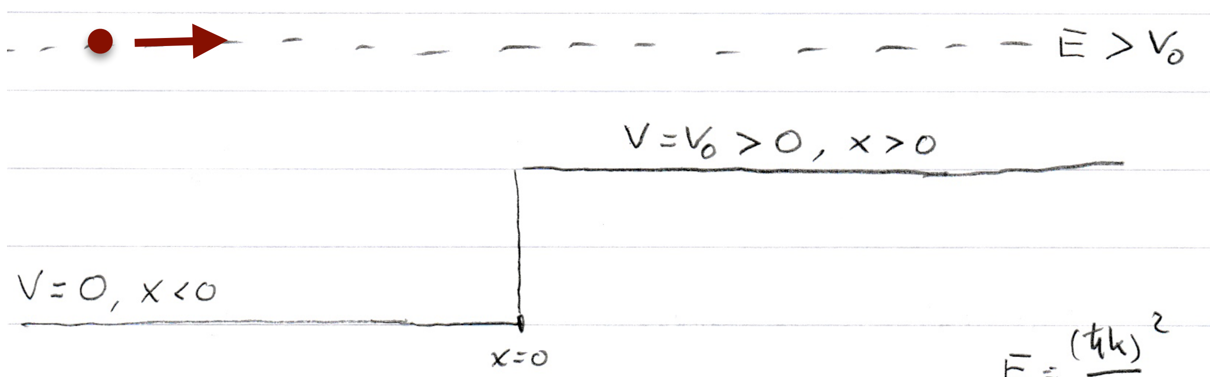
$\Downarrow$

$$\begin{cases} 1 + B = A & (\text{från } \psi(0^+) = \psi(0^-)) \\ k(1-B) = k'A & (\text{från } \psi'(0^+) = \psi'(0^-)) \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad A = 2k/(k+k'), \quad B = \dfrac{k-k'}{k+k'}$

$\Rightarrow \quad R = \left(\dfrac{k-k'}{k+k'}\right)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{E} - \sqrt{E-V_0}}{\sqrt{E} + \sqrt{E+V_0}}\right)^2$ oberoende av $\hbar$!

Kvantmekanisk potentialbarriär: singulär gräns?



$$E = \frac{(\hbar k)^2}{2m}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Be^{-ikx}, & x < 0, \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \\ Ae^{ik'x}, & x > 0, \quad k' = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar} \end{cases}$$

Sannolikhet R för reflektion vid $x = 0$: $R = |B|^2$

ψ och $\partial_x \psi$ måste vara kontinuerliga vid $x = 0$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} 1 + B = A & (\text{från } \psi(0^+) = \psi(0^-)) \\ k(1-B) = k'A & (\text{från } \psi'(0^+) = \psi'(0^-)) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad A = 2k/(k+k'), \quad B = \frac{k-k'}{k+k'}$$

$$\Rightarrow \quad R = \left(\frac{k-k'}{k+k'}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{E} - \sqrt{E-V_0}}{\sqrt{E} + \sqrt{E+V_0}}\right)^2$$ oberoende av $\hbar$!

Men $\hbar \to 0$ är en "klassisk gräns" (BOHRS KORRESPONDENSPRINCIP)

$$\lim_{\hbar \to 0} R(\hbar) \neq \underbrace{R(0) = 0}_{\text{KLASSISK FYSIK}}$$

?