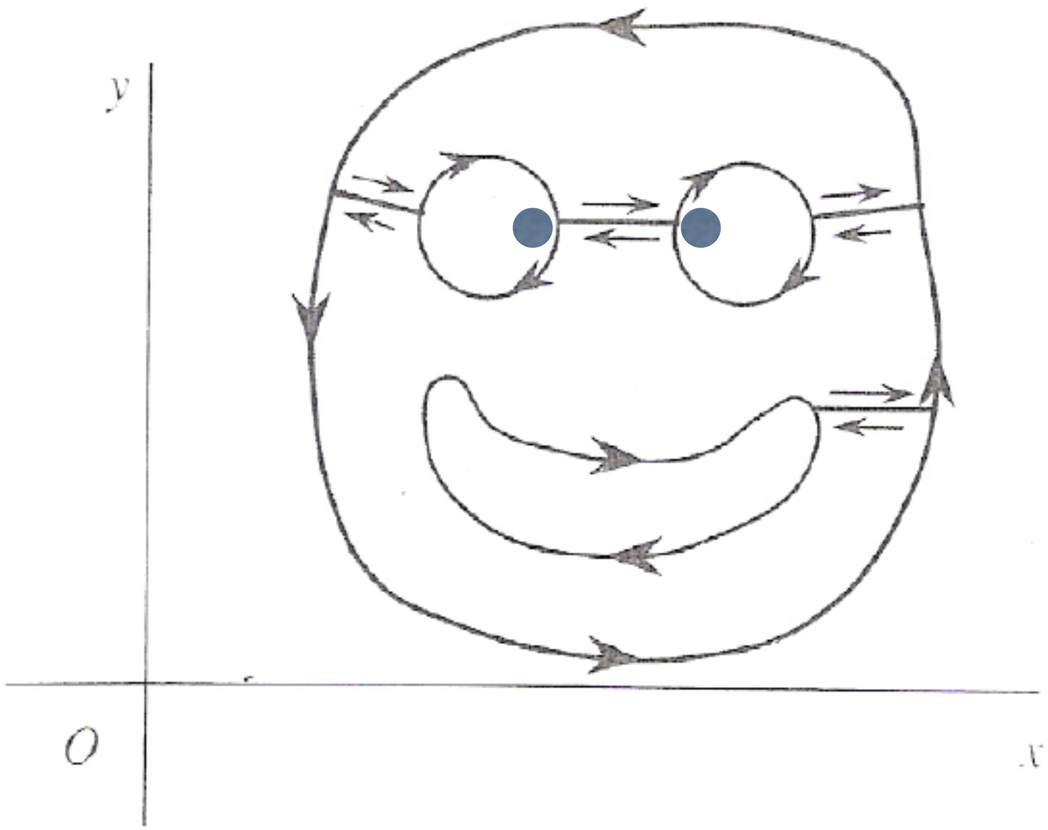
# förskräckliga integraler...

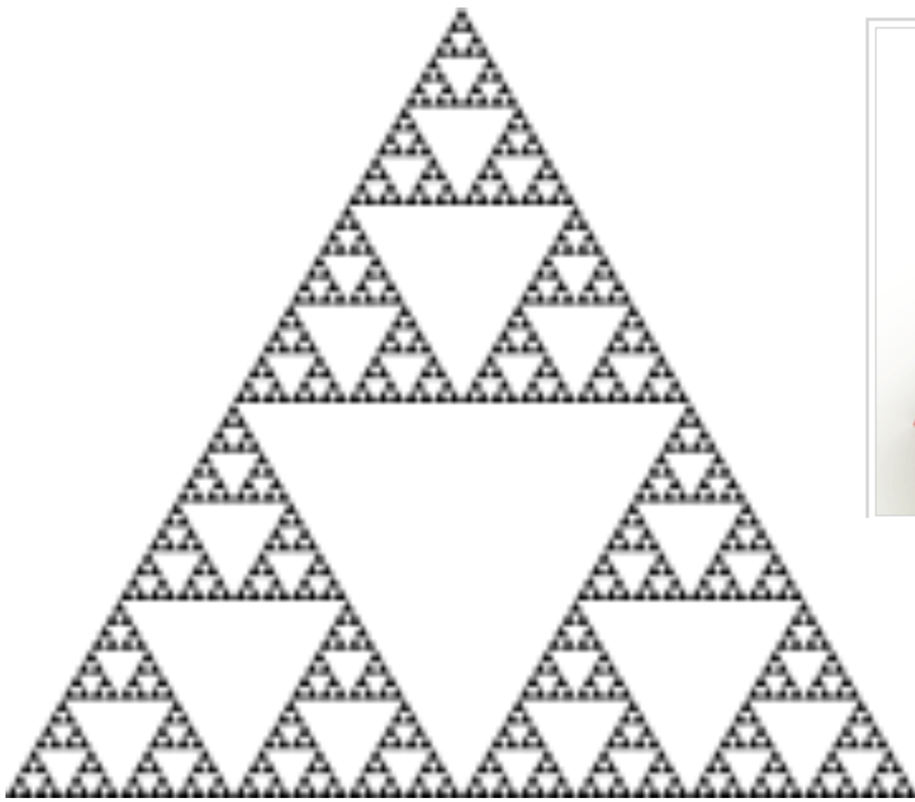


Hur integrera ***verkligt* komplicerade funktioner**, t.ex. funktioner som beskriver en

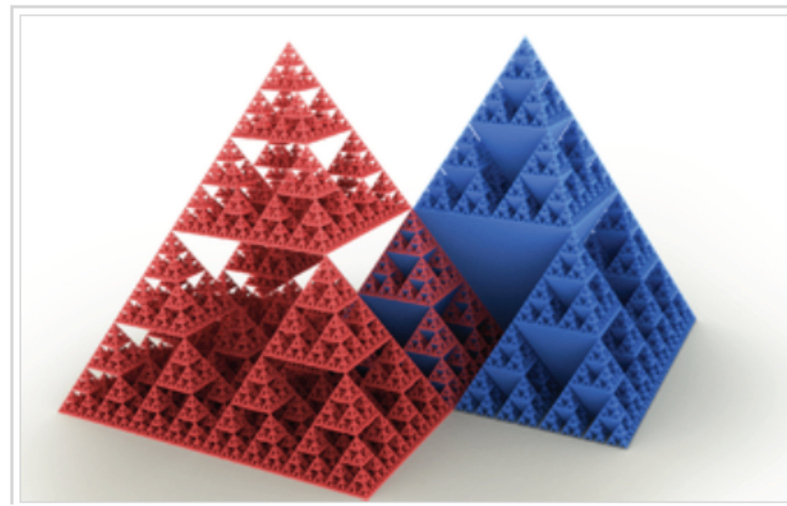
FRAKTAL eller är definierade på en FRAKTAL?

## Hur integrera *verkligt* komplicerade funktioner, t.ex. funktioner som beskriver en

# FRAKTAL eller är definierade på en FRAKTAL?

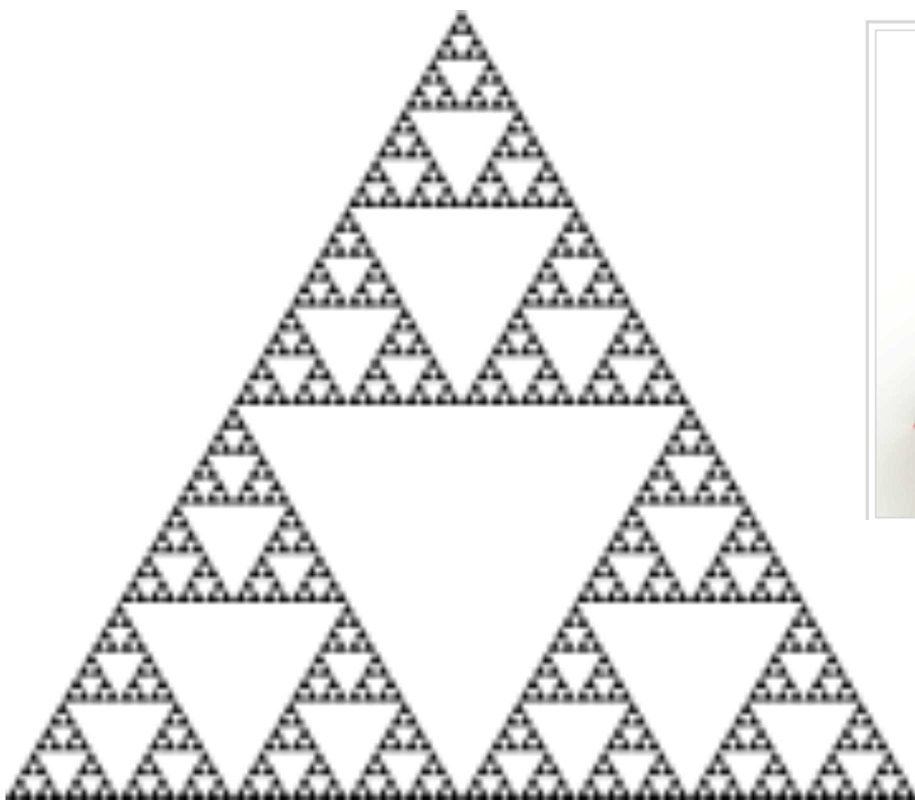


**Sierpinskis triangel**

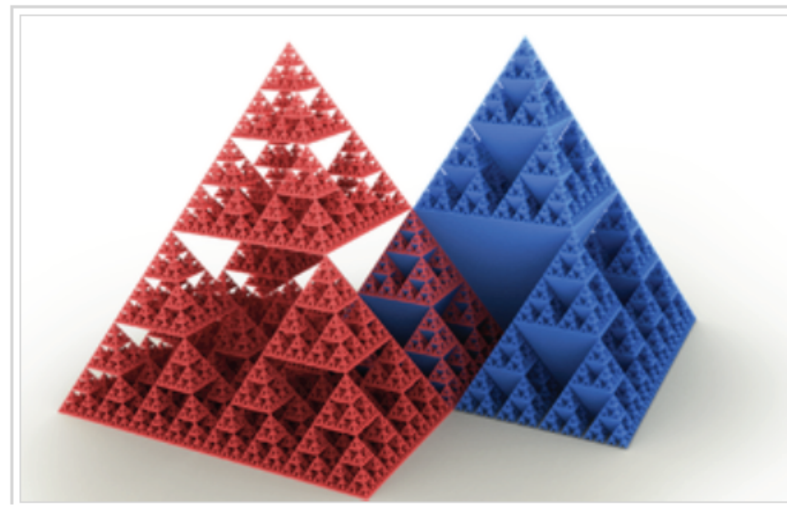


## Hur integrera *verkligt* komplicerade funktioner, t.ex. funktioner som beskriver en

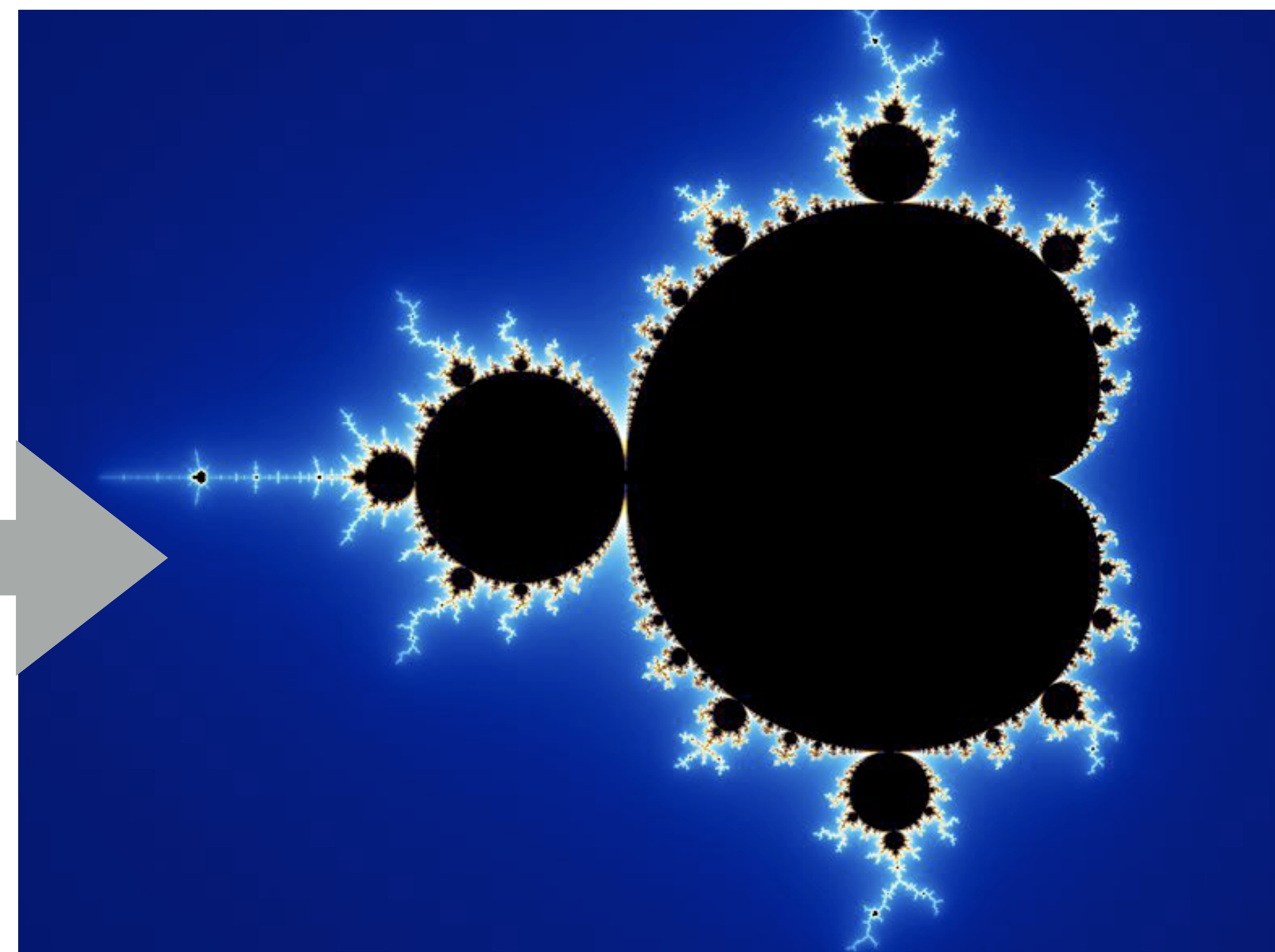
# FRAKTAL eller är definierade på en FRAKTAL?



Sierpinskis triangel



Mandelbrotmängd

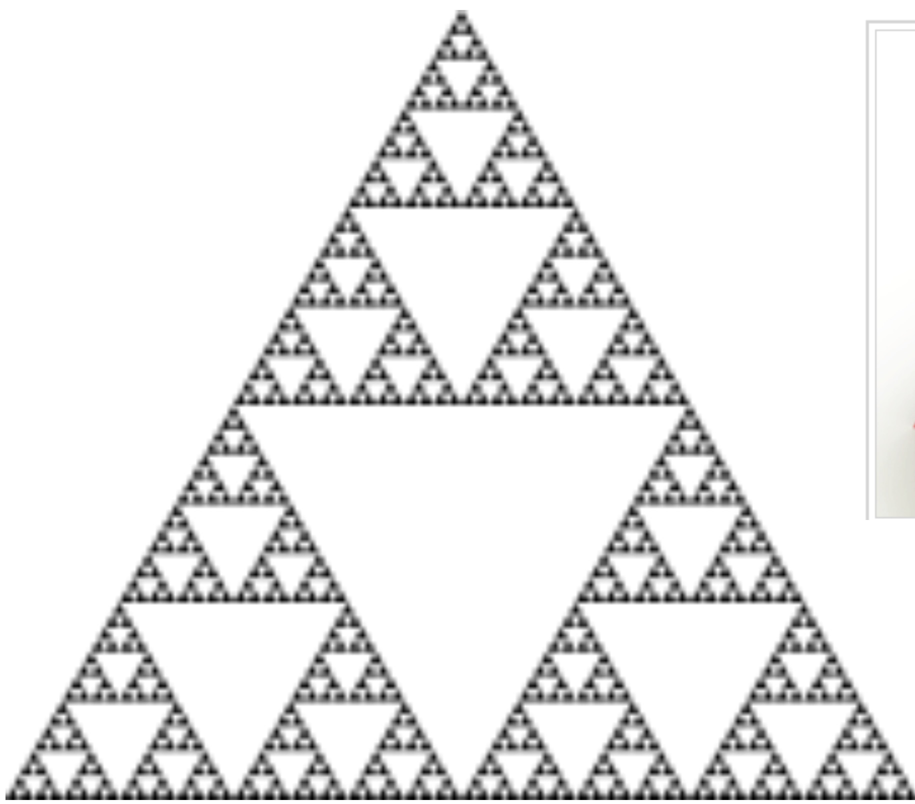


Mandelbrotmängden representeras i ett komplext talplan av alla komplexa tal $c$ sådana att

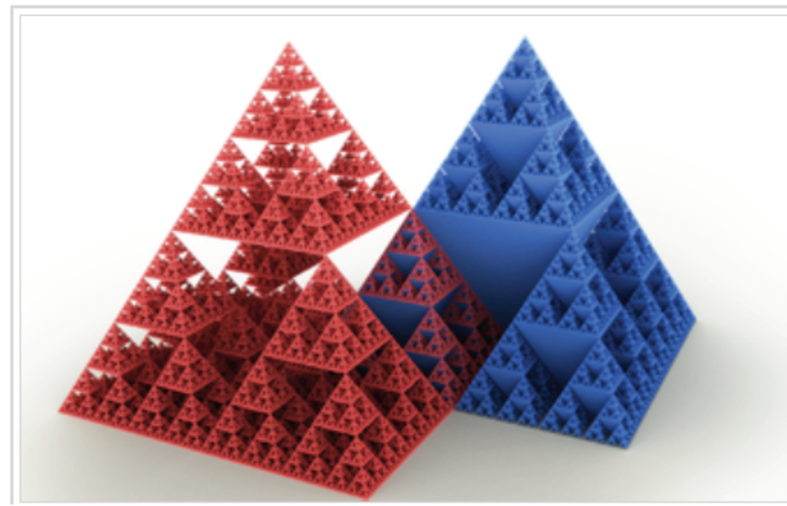
$$\{c \mid z_{n+1} = z_n^2 + c \not\to \infty \text{ då } n \to \infty, z_0 = 0\}$$

## Hur integrera *verkligt* komplicerade funktioner, t.ex. funktioner som beskriver en

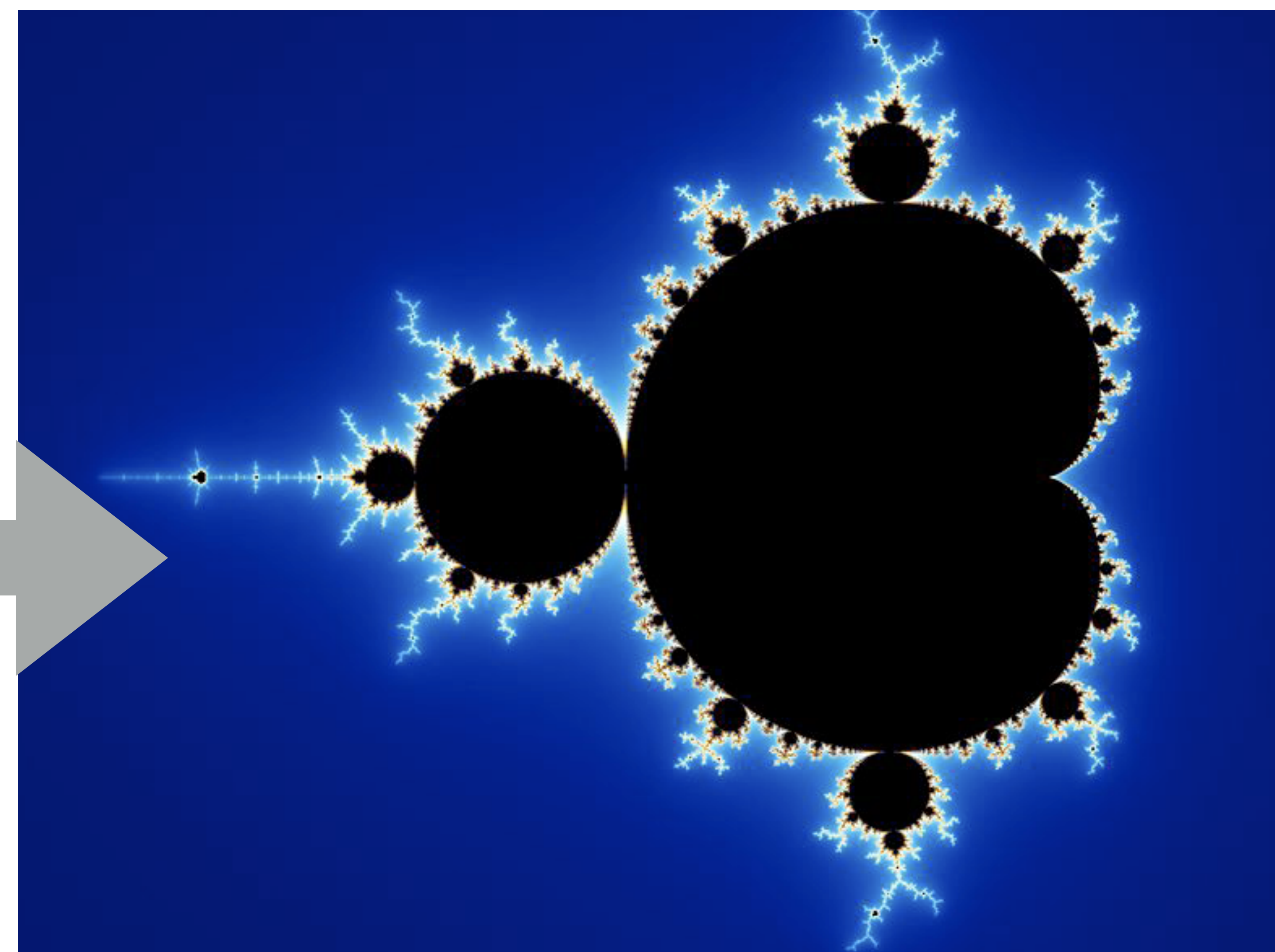
# FRAKTAL eller är definierade på en FRAKTAL?



Sierpinskis triangel



Mandelbrotmängd



Mandelbrotmängden representeras i ett komplext talplan av alla komplexa tal $c$ sådana att

$$\{c \mid z_{n+1} = z_n^2 + c \not\to \infty \text{ då } n \to \infty, z_0 = 0\}$$

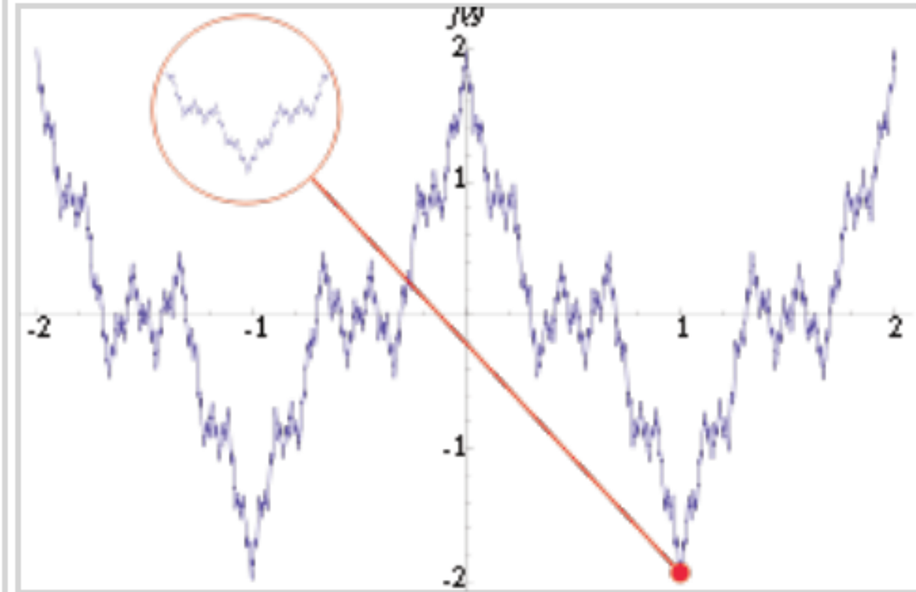
http://www.youtube.com/watch?v=gEw8xpb1aRA

# Weierstrassfunktionen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x), \quad ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$$

Karl Weierstrass

...kontinuerlig funktion som inte är deriverbar någonstans!



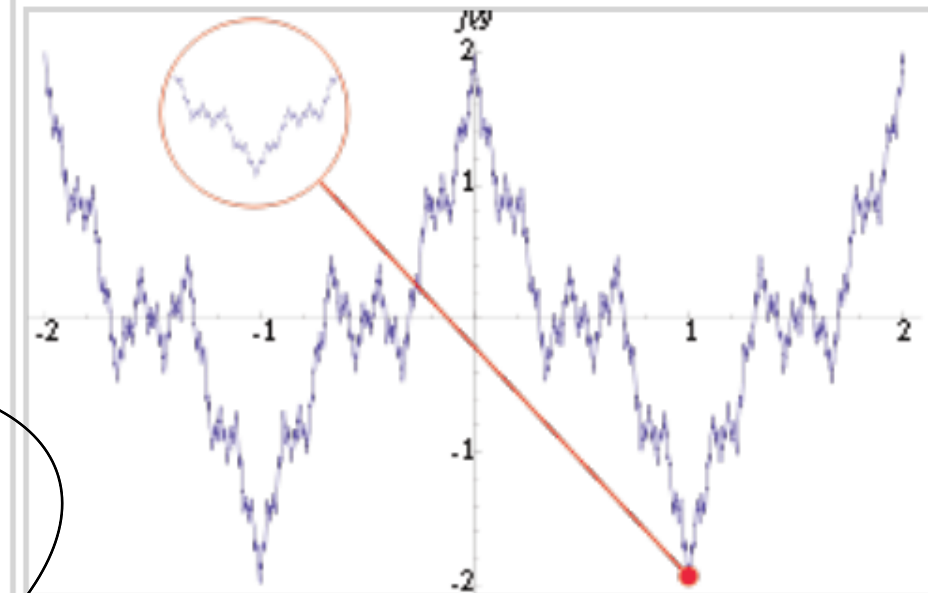

Plot of Weierstrass Function over the interval $[-2, 2]$. Like fractals, the function exhibits self-similarity: every zoom (red circle) is similar to the global plot.

# Weierstrassfunktionen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x), \quad ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$$

... ett patologiskt monster!

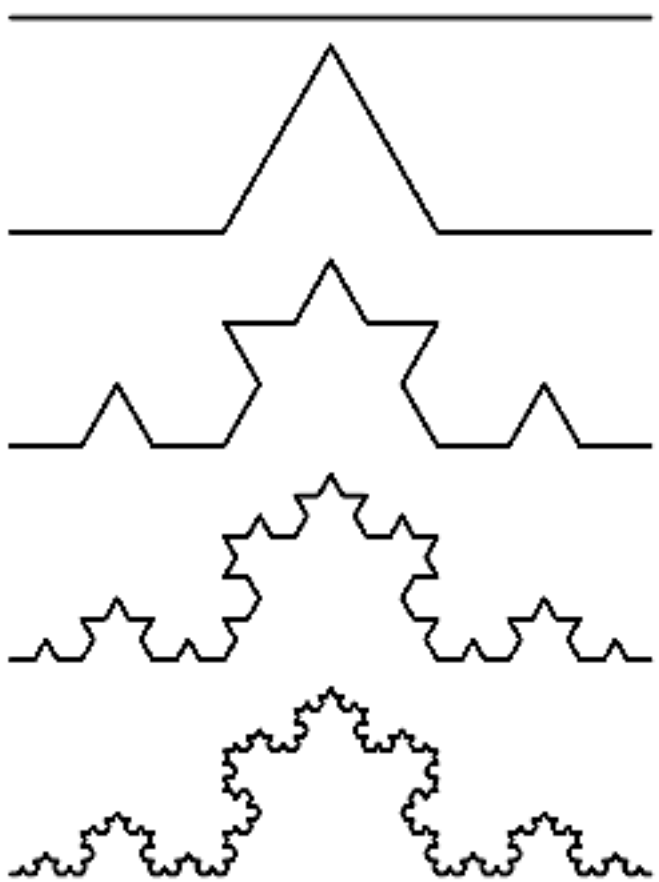
...ovärdigt matematiken!




Plot of Weierstrass Function over the interval [−2, 2]. Like fractals, the function exhibits self-similarity: every zoom (red circle) is similar to the global plot.

Charles Hermite, omkring 1887

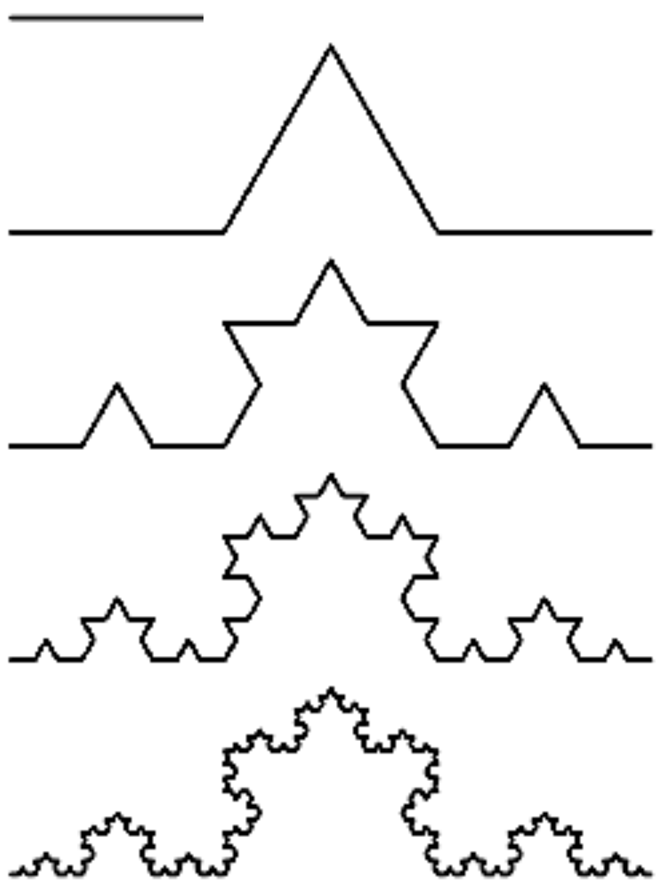
# Kochkurva



1. Tag en linje.
2. Dela linjen i tre lika stora delar.
3. Gör ~~en kopia~~ två kopior av den mellersta delen.
4. Sätt upp de två kopiorna i vinkel mot varandra så att de får plats inom samma sträcka som en ensam linje annars gör.
5. Upprepa (iterera) från steg 2 för alla de nya linjer som uppkommit av operationen.

**http://www.youtube.com/watch?v=JdMgvSWSKZI**

# Kochkurva



Hausdorff-dimension

$$D = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.26$$

# Hausdorff-dimension

1D $3 \times$   $3^1 = 3$

# Hausdorff-dimension

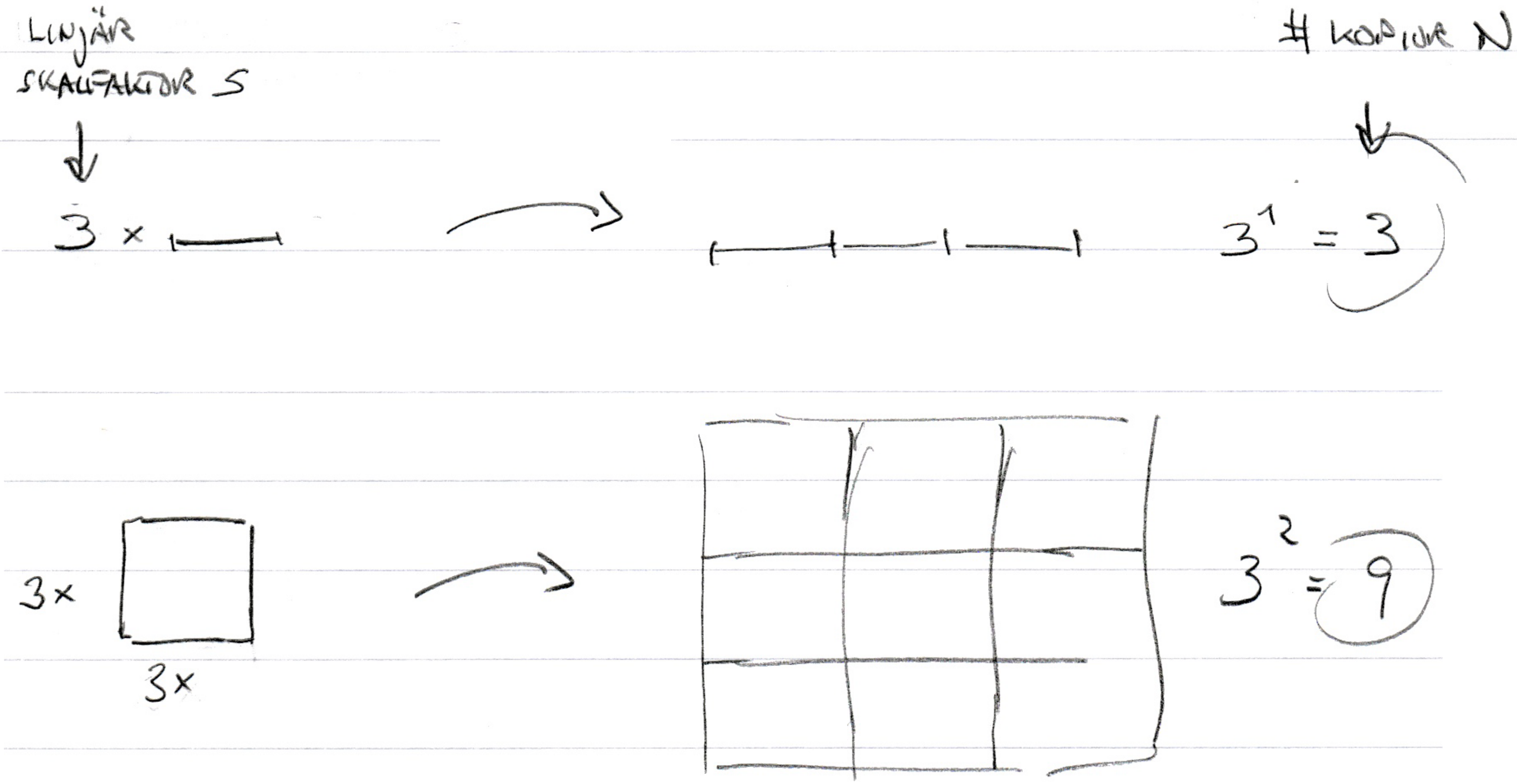
LINJÄR SKALFAKTOR $S$ | # KOPIOR $N$

1D $\quad 3 \times$ ⊢—⊣ $\longrightarrow$ ⊢—⊢—⊢—⊣ $\quad 3^1 = 3$

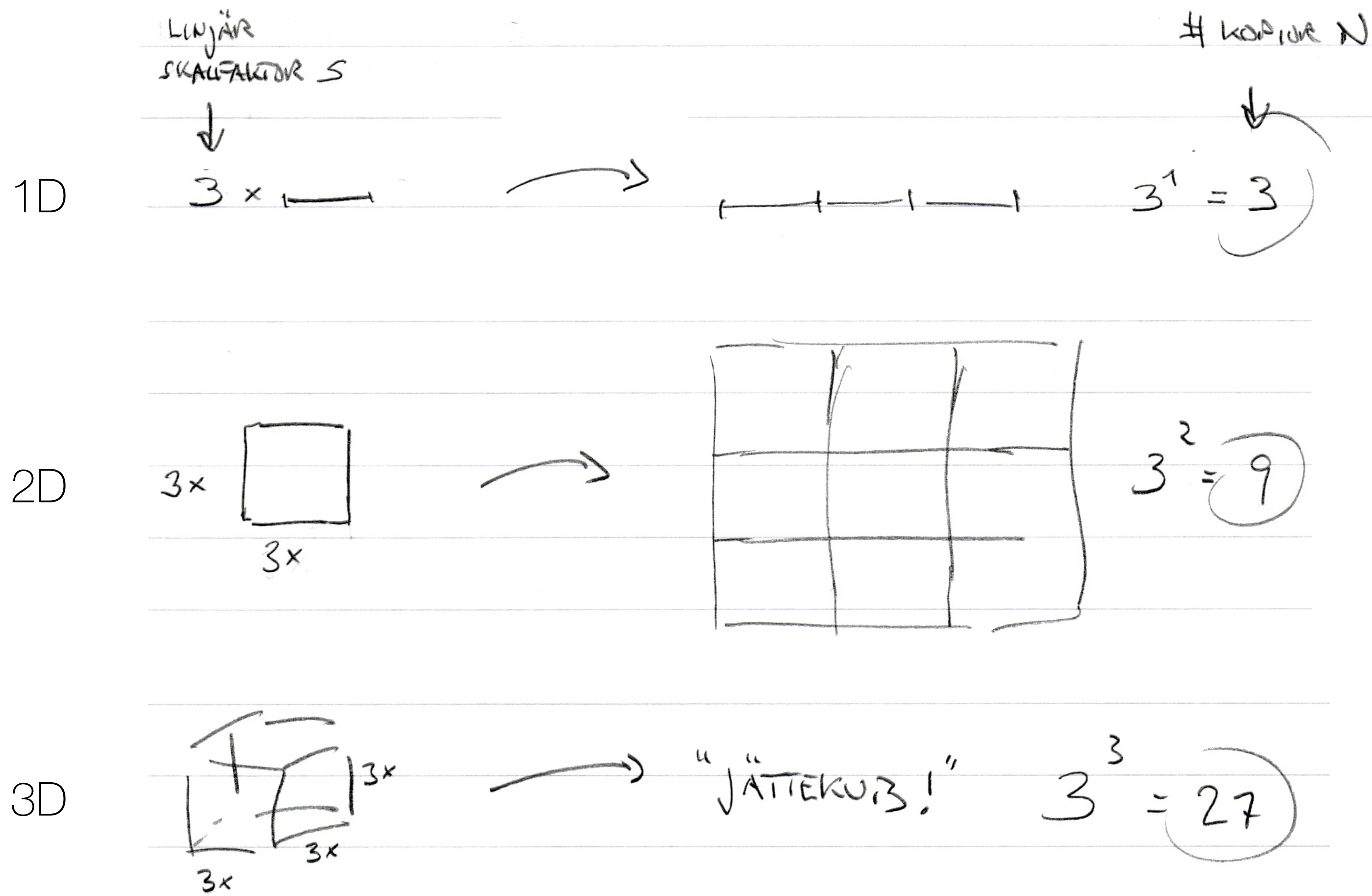
# Hausdorff-dimension

1D

2D



# Hausdorff-dimension



# Hausdorff-dimension

LINJÄR SKALFAKTOR $S$

\# KOPIOR $N$

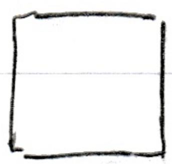
1D

$3 \times$

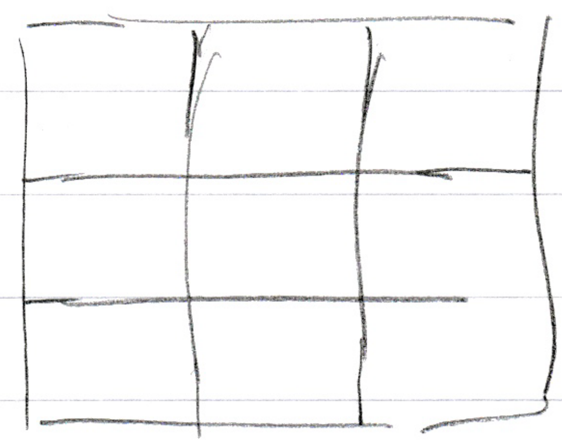
$3^1 = 3$

2D

$3\times$

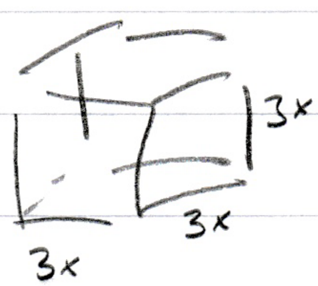


$3\times$



$3^2 = 9$

3D




"JÄTTEKUB!"

$3^3 = 27$

$$N = s^D \Rightarrow \ln N = D \ln s$$

$$\Downarrow$$

$$D = \frac{\ln N}{\ln s}$$

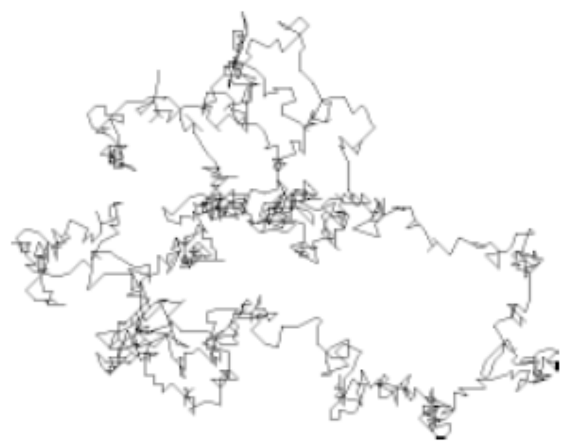
TILLÄMPNING PÅ KOCHKURVAN: $S = 3, N = 4$

$$\Downarrow$$

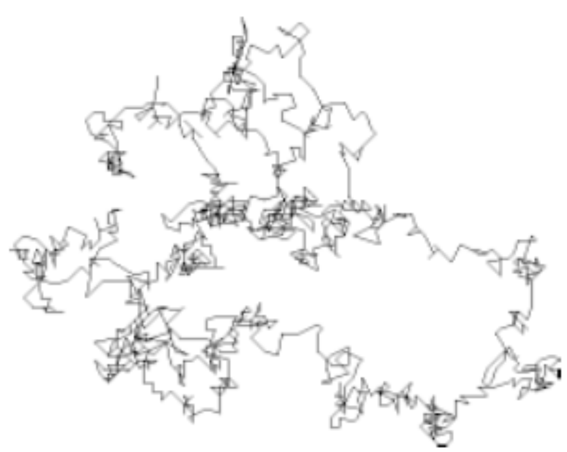
$$D = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1.26$$

# Brownsk rörelse (datoranimerad)

Length=8747, Step=16



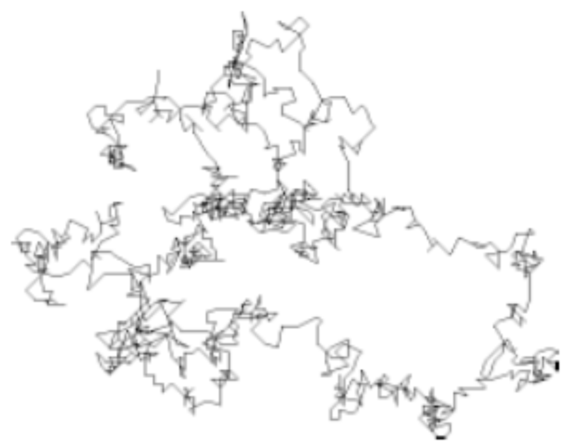
Length=12091, Step=8



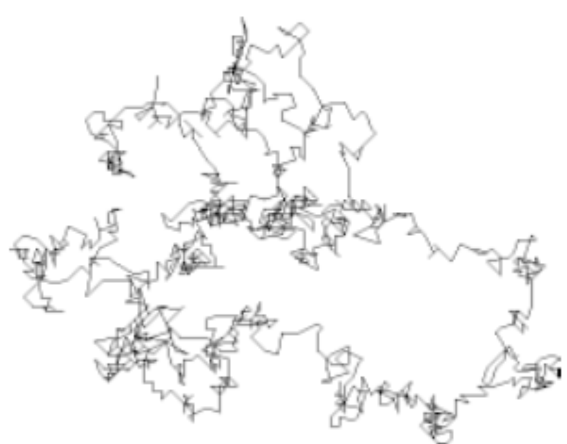
Length=17453, Step=4

# Brownsk rörelse (datoranimerad)

Length=8747, Step=16



Length=12091, Step=8



Length=17453, Step=4

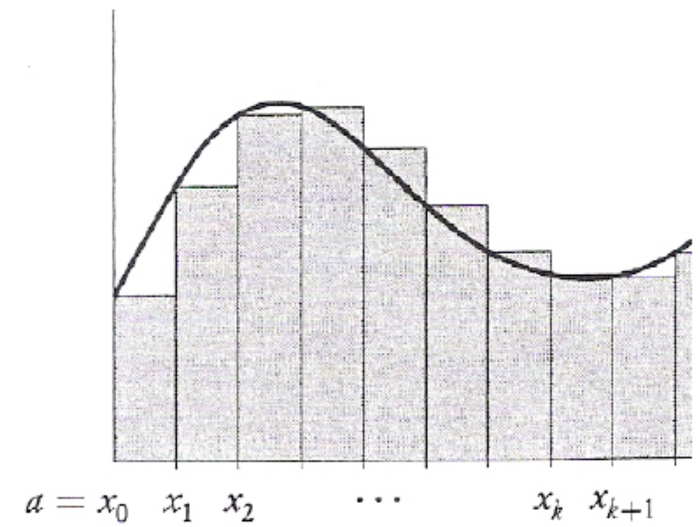
**Fysiktillämpning:**
Integrera över en funktion som beskriver statistiskt viktade "Brownska rörelser" i gränsen av en infinitesimalt kort steglängd

Bernhard Riemann, 1826 - 1866

# Riemann-integral

$$\int_a^b f(x)dx \equiv \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})$$

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ styckvis kontinuerlig

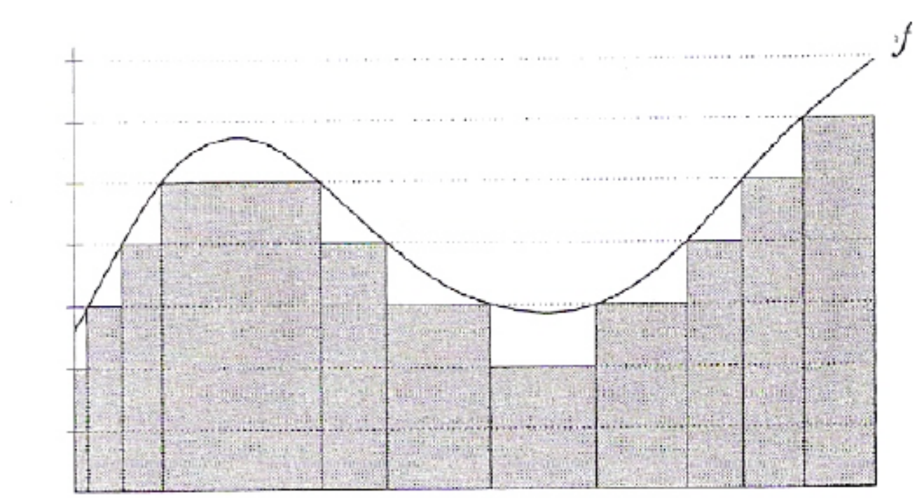



# Lebesgue-integral

$$\int_a^b f(x)dx \equiv \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \mu(A_k^{(n)}) \cdot \frac{k}{2^n}$$

$$A_k^{(n)} = f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]\right)$$

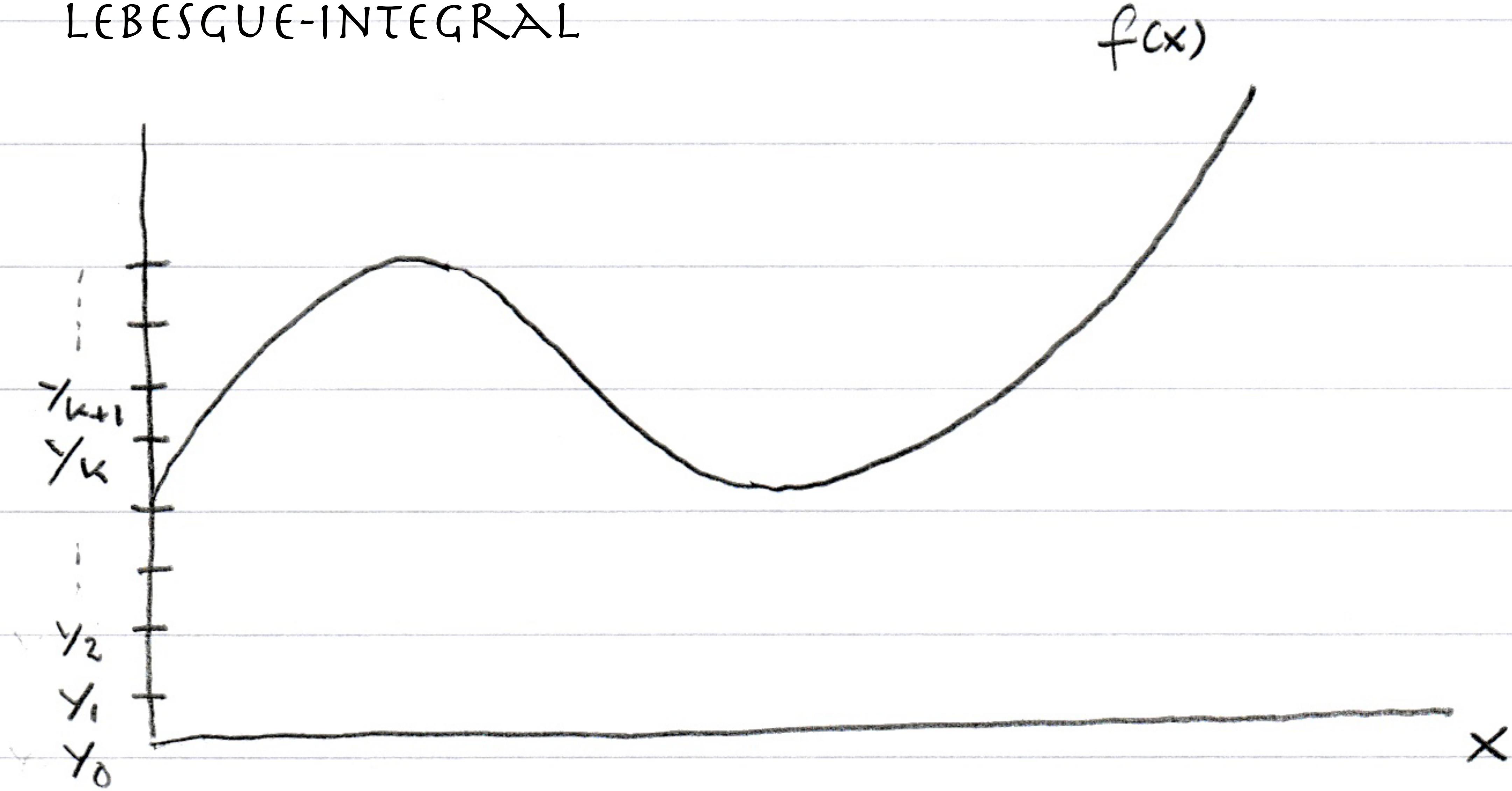
$\mu$ Lebesguemått



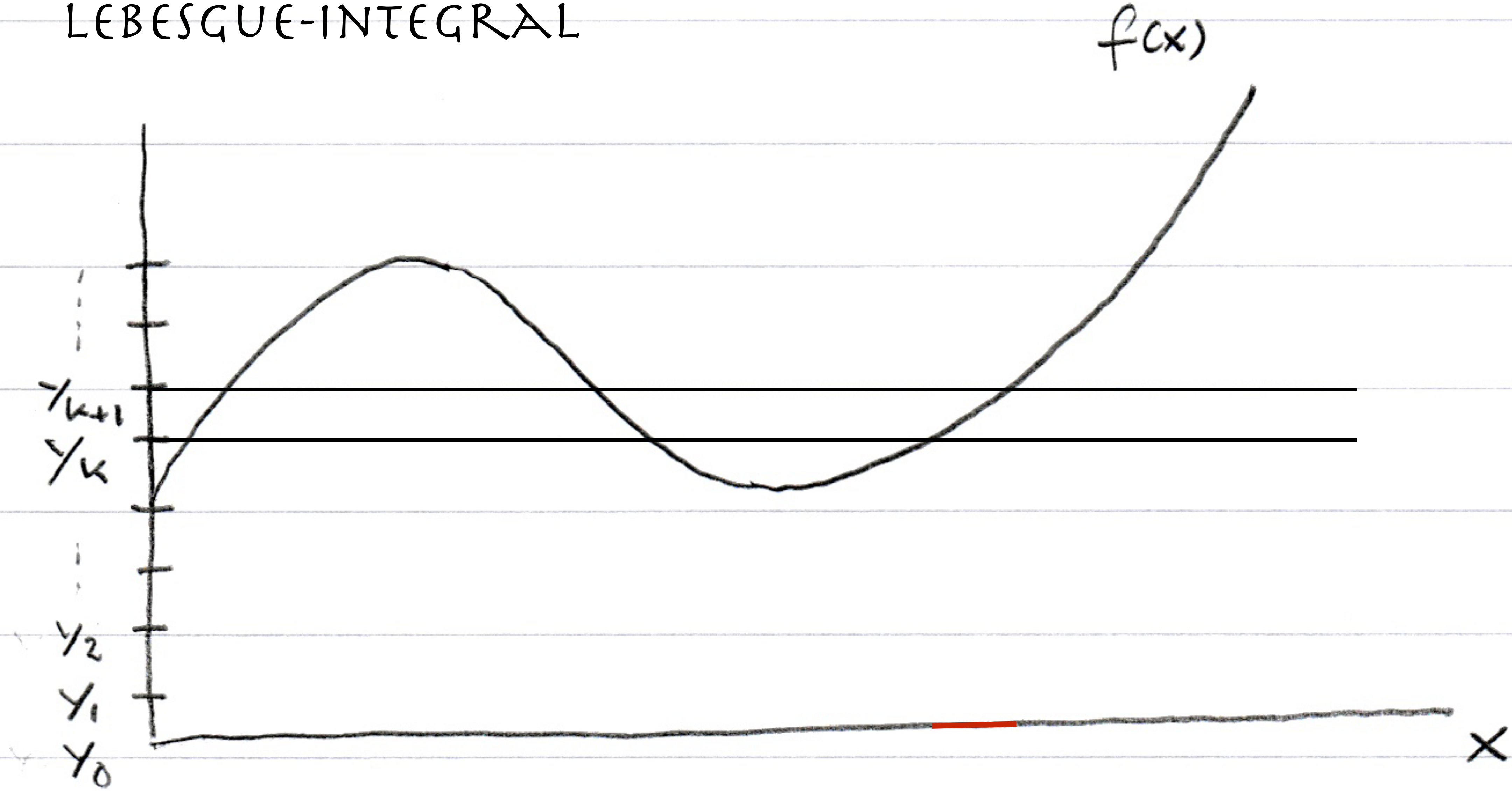

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *mätbar* funktion

Henri Lebesgue, 1875 -1941

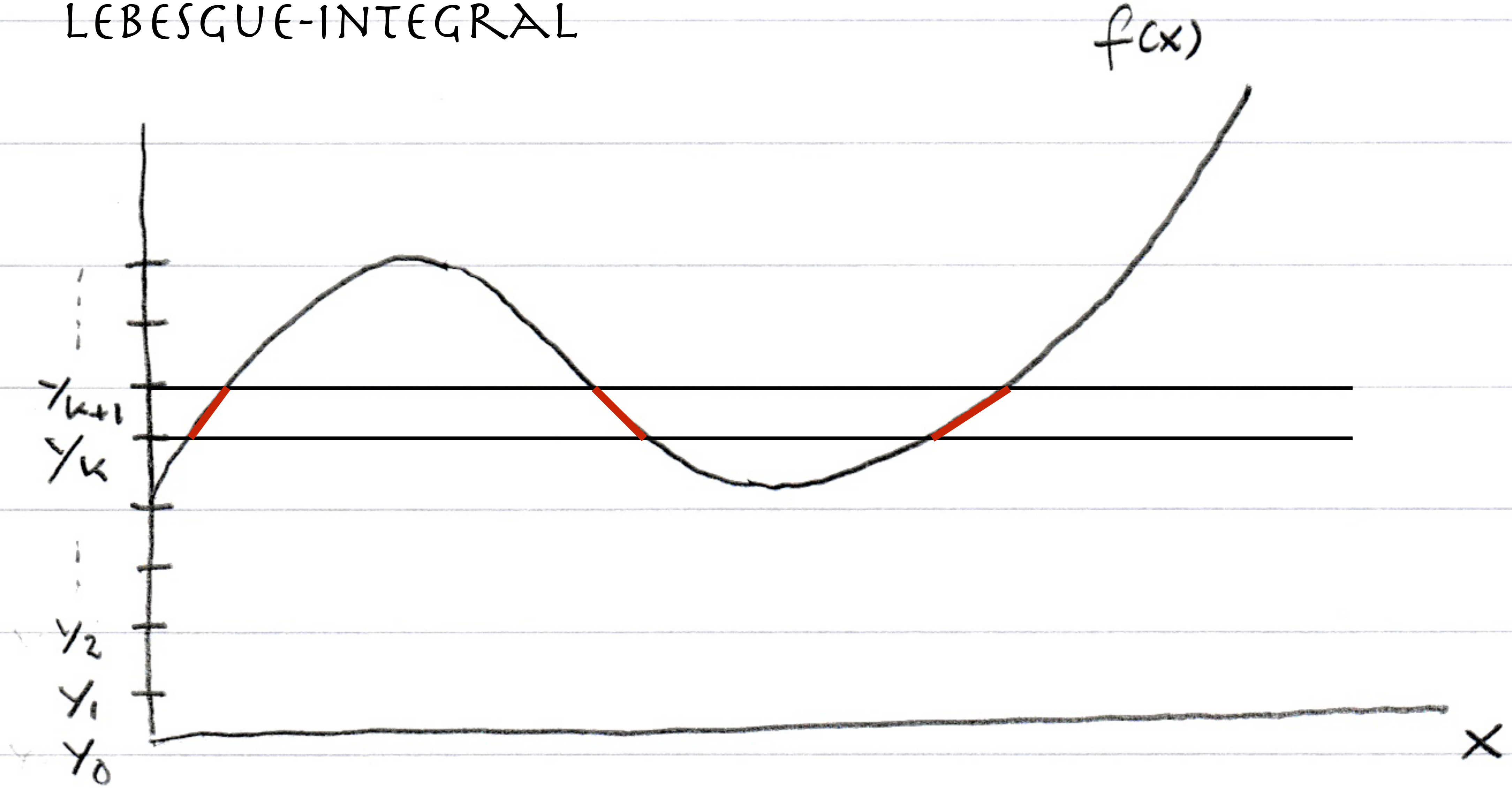
# LEBESGUE-INTEGRAL



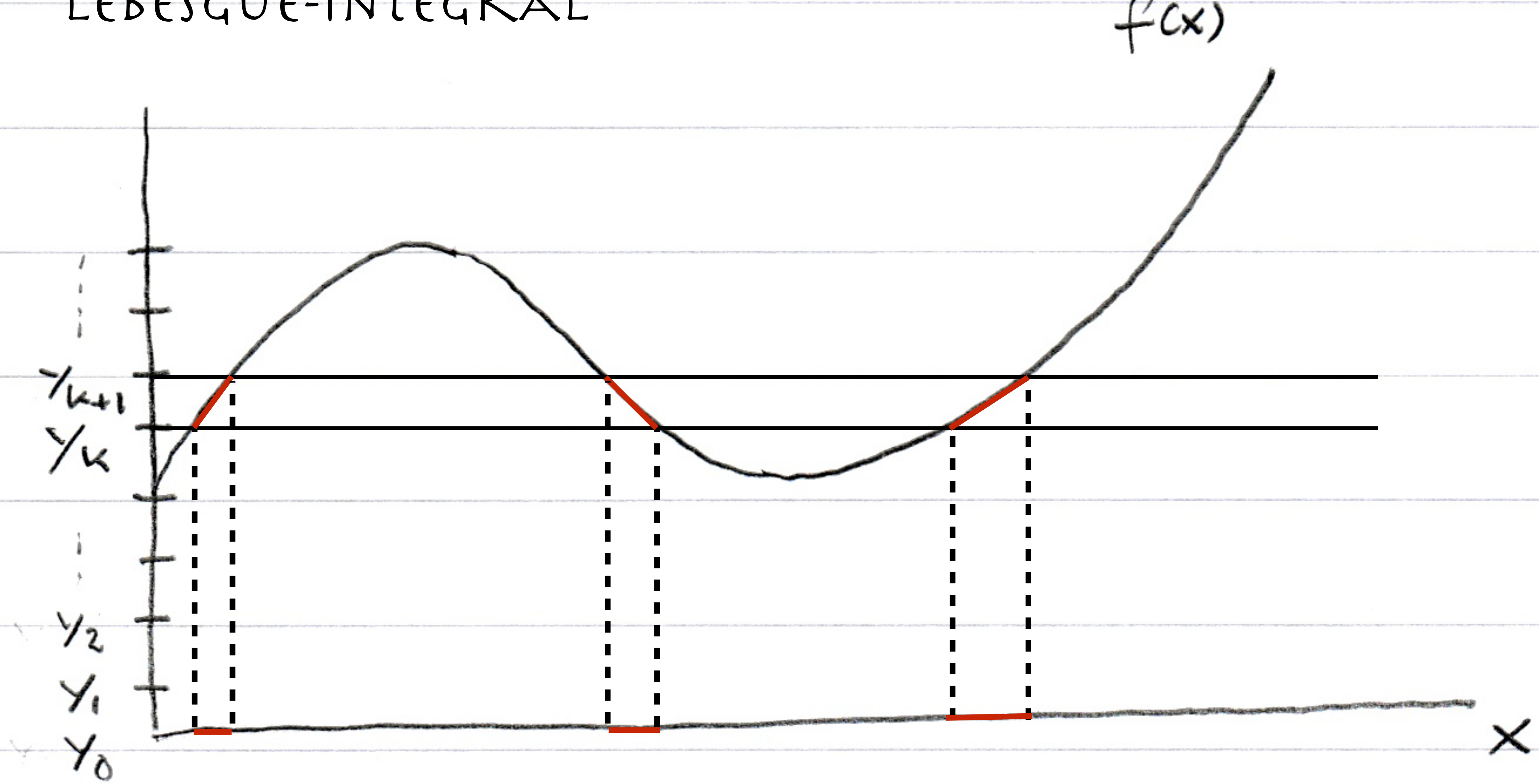
# LEBESGUE-INTEGRAL



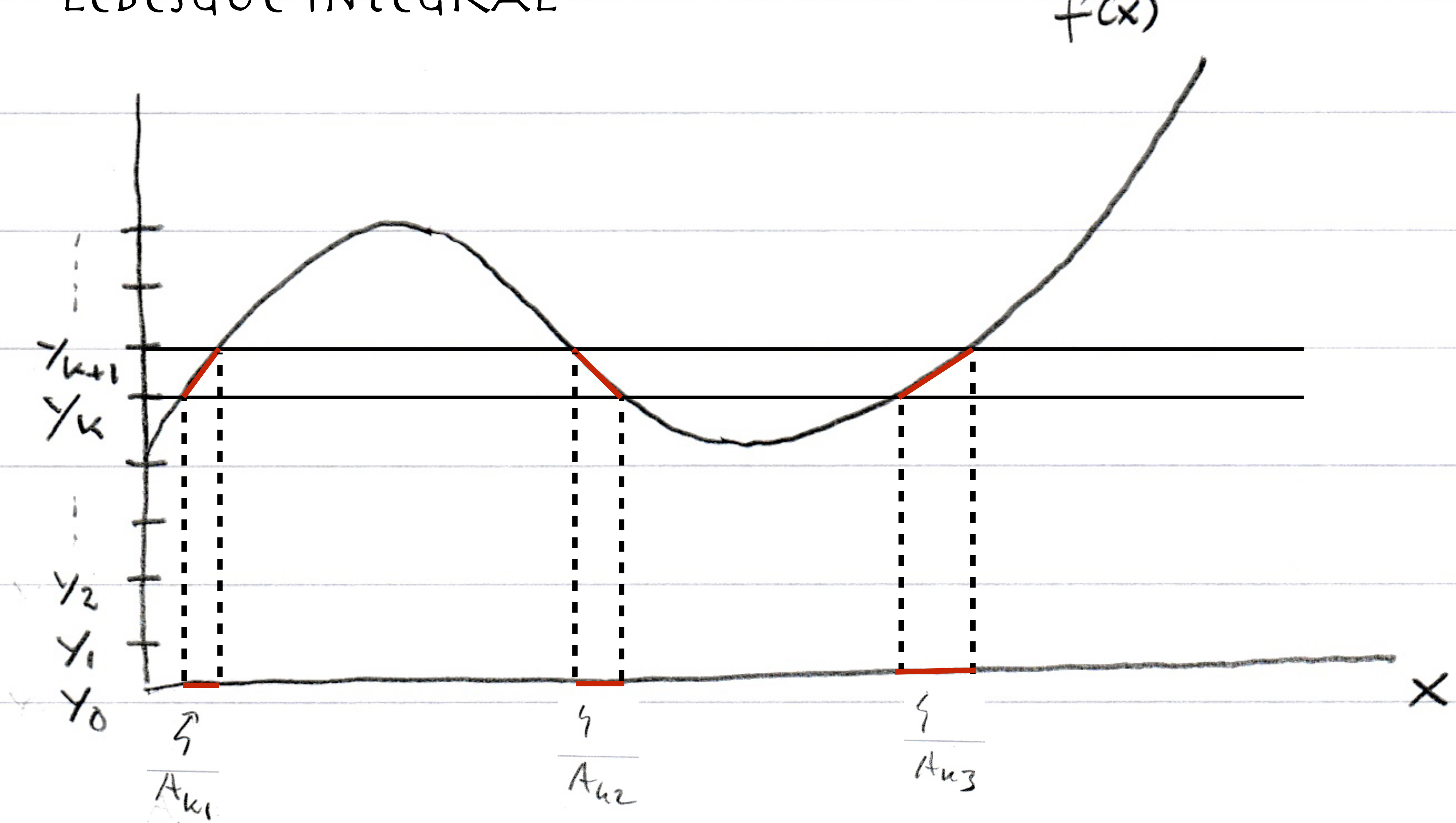
# LEBESGUE-INTEGRAL



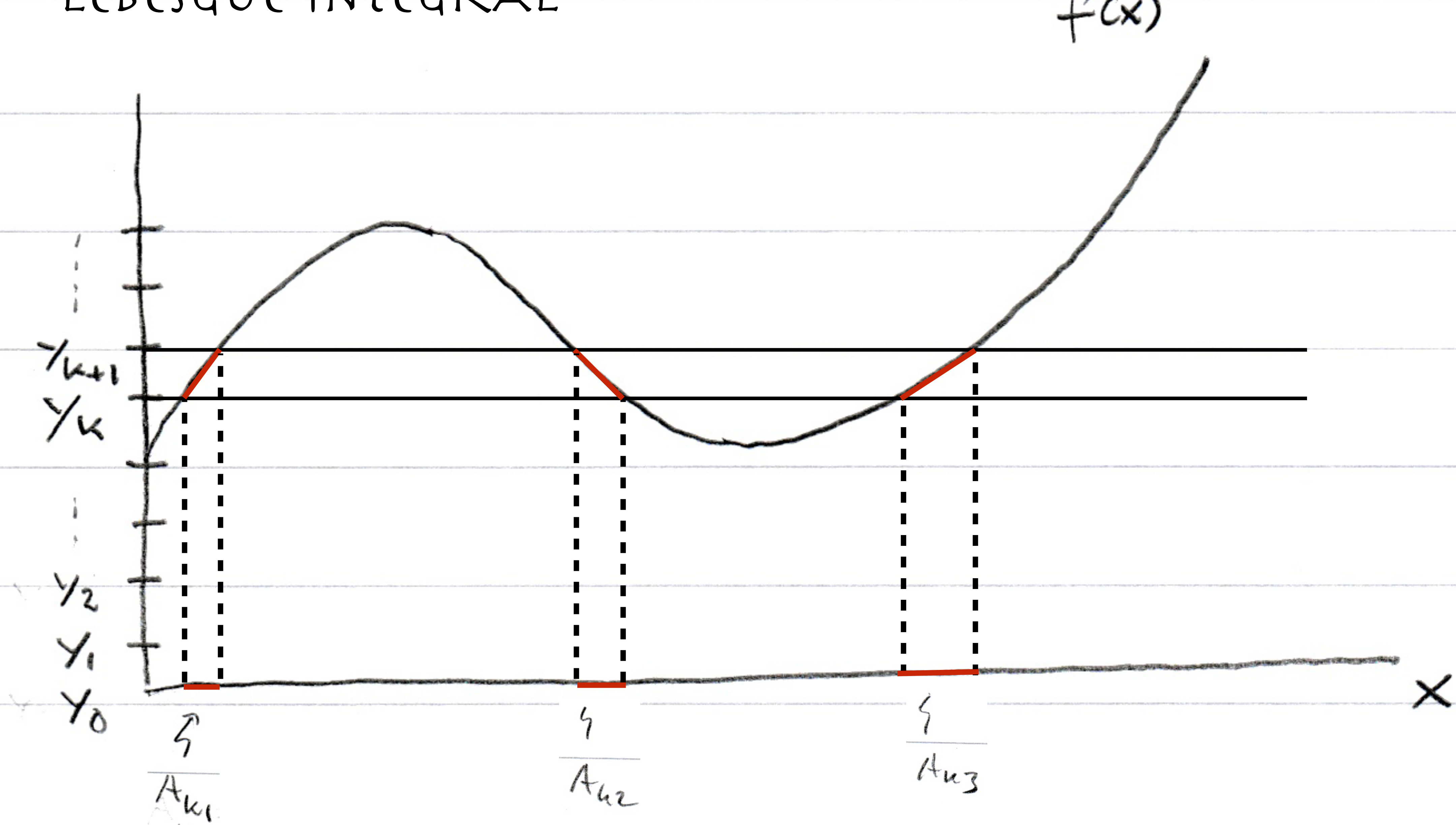
# LEBESGUE-INTEGRAL



# LEBESGUE-INTEGRAL

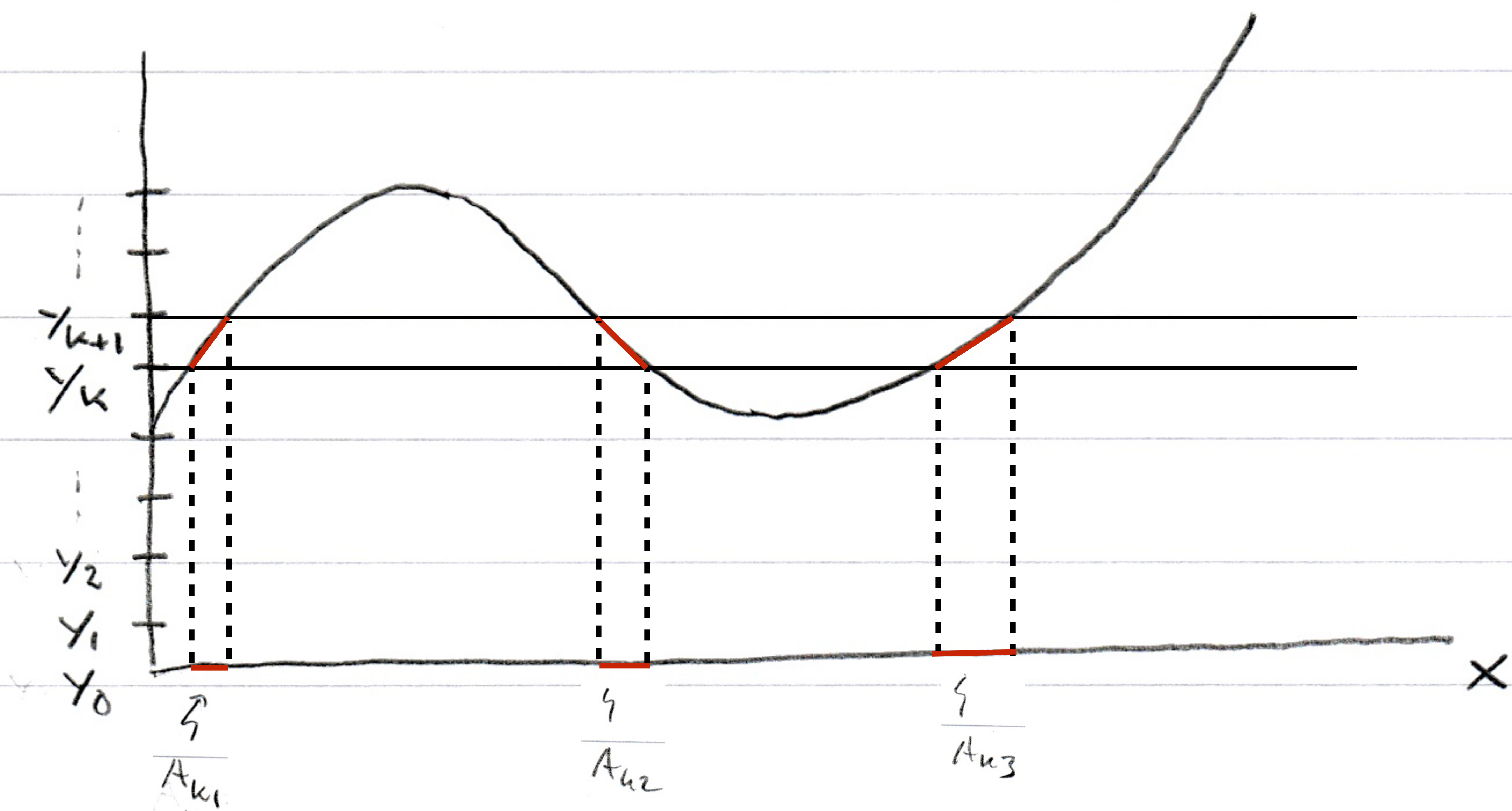


# LEBESGUE-INTEGRAL




$$A_k = A_{k_1} \cup A_{k_2} \cup A_{k_3} = f^{-1}([y_k, y_{k+1}])$$

# LEBESGUE-INTEGRAL




$$A_k^{(n)} = A_{k_1} \cup A_{k_2} \cup A_{k_3} = f^{-1}([y_k, y_{k+1}])$$

$$= f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]\right)$$

# LEBESGUE-INTEGRAL

$$A_k^{(n)} = A_{k_1} \cup A_{k_2} \cup A_{k_3} = f^{-1}([y_k, y_{k+1}])$$

$$= f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]\right)$$

$\mu(A_k^{(n)})$ = LEBESGUEMÅTTET AV $A_k^{(n)}$

= LÄNGD FÖR KONTINUUM-INTERVALL

= 0 FÖR INTERVALL SOM INNEHÅLLER UPPRÄKNELIGT MÅNGA PUNKTER

# LEBESGUE-INTEGRAL

$$A_k^{(n)} = A_{k_1} \cup A_{k_2} \cup A_{k_3} = f^{-1}([y_k, y_{k+1}])$$

$$= f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]\right)$$

$\mu(A_k^{(n)})$ = LEBESGUEMÅTTET AV $A_k^{(n)}$

= LÄNGD FÖR KONTINUUM-INTERVALL

= 0 FÖR INTERVALL SOM INNEHÅLLER UPPRÄKNELIGT MÅNGA PUNKTER

$$\int_a^b f(x)dx \equiv \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \mu(A_k^{(n)}) \cdot \frac{k}{2^n}$$

Allt som behövs för Lebesgue-integrabilitet är att funktionens inversa mängd har ett väldefinierat Lebesguemått. OK för nästan *alla* funktioner!

# LEBESGUE-INTEGRAL

$$A_k^{(n)} = A_{k_1} \cup A_{k_2} \cup A_{k_3} = f^{-1}([y_k, y_{k+1}])$$

$$= f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]\right)$$

$\mu(A_k^{(n)})$ = LEBESGUEMÅTTET AV $A_k^{(n)}$

= LÄNGD FÖR KONTINUUM-INTERVALL

= 0 FÖR INTERVALL SOM INNEHÅLLER UPPRÄKNELIGT MÅNGA PUNKTER

$$\int_a^b f(x)dx \equiv \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \mu(A_k^{(n)}) \cdot \frac{k}{2^n}$$

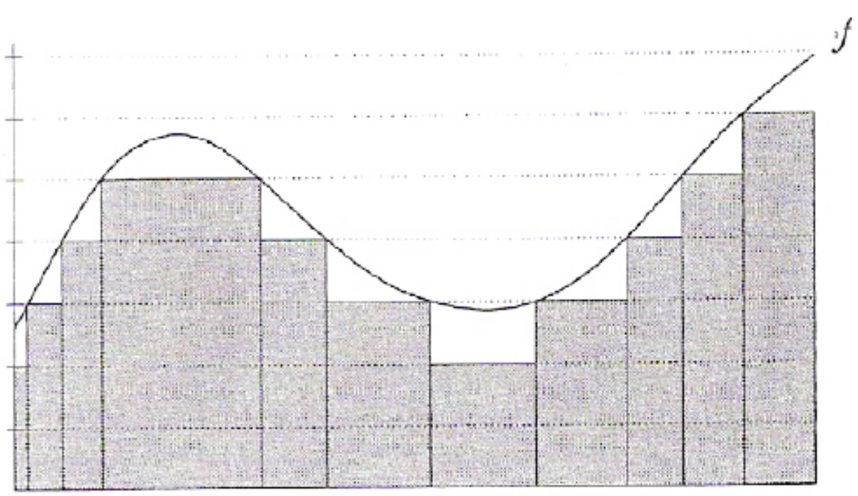
Allt som behövs för Lebesgue-integrabilitet är att funktionens inversa mängd har ett väldefinierat Lebesguemått. OK för nästan *alla* funktioner!

Exempel på en mängd som *inte* har ett väldefinierat Lebesguemått:
VITALIMÄNGDEN $\mathscr{V}$

$\mathcal{V} \subset [0,1]$ består av mängden av reella tal $v$ sådana att $\forall r \in R\ \exists! v \in \mathcal{V} : r - v \in Q$

# Lebesgue-integralen...

$$\int_a^b f(x)dx \equiv \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \mu(A_k^{(n)}) \cdot \frac{k}{2^n} \qquad A_k^{(n)} = f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]\right)$$




... kan användas för att bevisa mycket användbara teorem om **integraler och gränsvärden** (derivator, serier, andra integraler,...)

## Lebesgues (dominerade) konvergensteorem (lättversion)

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$$

om $f_n$ konvergerar punktvis till $f$ nästan överallt
och det existerar en Lebesgue-integrabel funktion
$g$ sådan att $|f_n| \leq g$ nästan överallt

punktvis konvergens: $\forall x \, \exists N |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, $n > N$

likformig konvergens: $\exists N \, \forall x |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, $n > N$

## Fubini (-Tonelli) teoremet (lättversion)

$$\int_X (\int_Y f(x,y)\,dy)\,dx = \int_Y (\int_X f(x,y)\,dx)\,dy$$

där $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ är en icke-negativ funktion

För en bra diskussion av omkastning av derivata och integral med användande av Lebesgueteori, se

http://www.wikiwand.com/en/Leibniz_integral_rule#/Measure_theory_statement

*Men…i allmänhet… i fysiken…*

*…att ta gränsvärden är subtilt och kräver eftertanke,*

*fysikalisk intuition, och matematisk erfarenhet!*

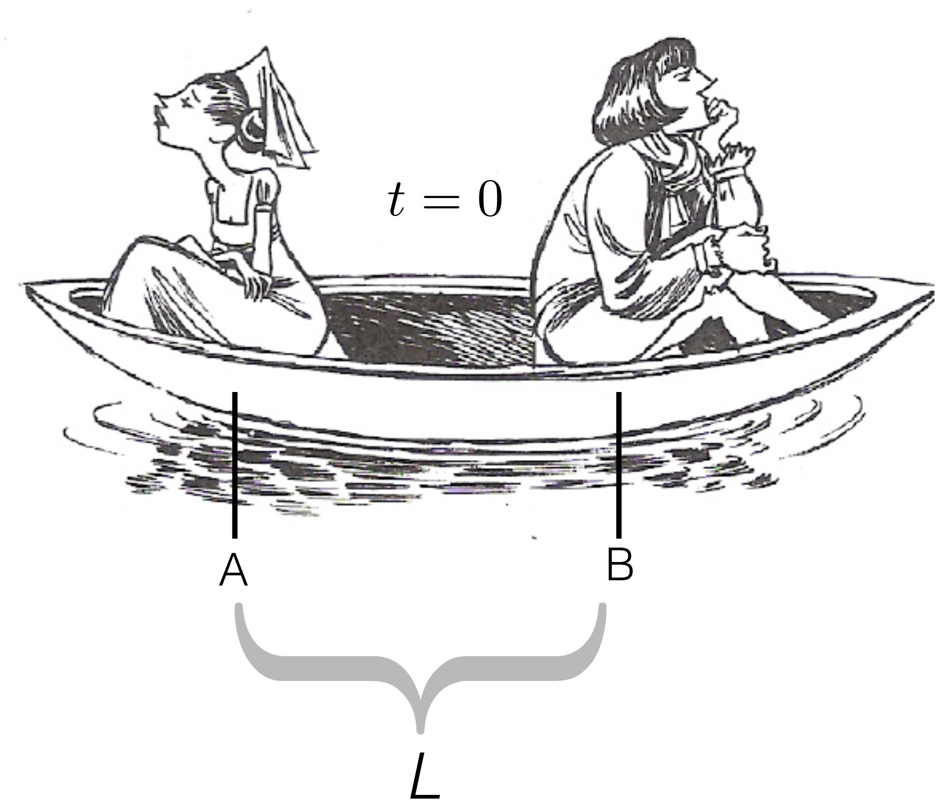
*Att ta gränsvärden i fysiken är subtilt och kräver eftertanke, fysikalisk intuition, och matematisk erfarenhet!*

*Att ta gränsvärden i fysiken är subtilt och kräver eftertanke, fysikalisk intuition, och matematisk erfarenhet!*

*Ett exempel: Romeo och Julia på en roddtur*

Att ta gränsvärden i fysiken är subtilt och kräver eftertanke, fysikalisk intuition, och matematisk erfarenhet!

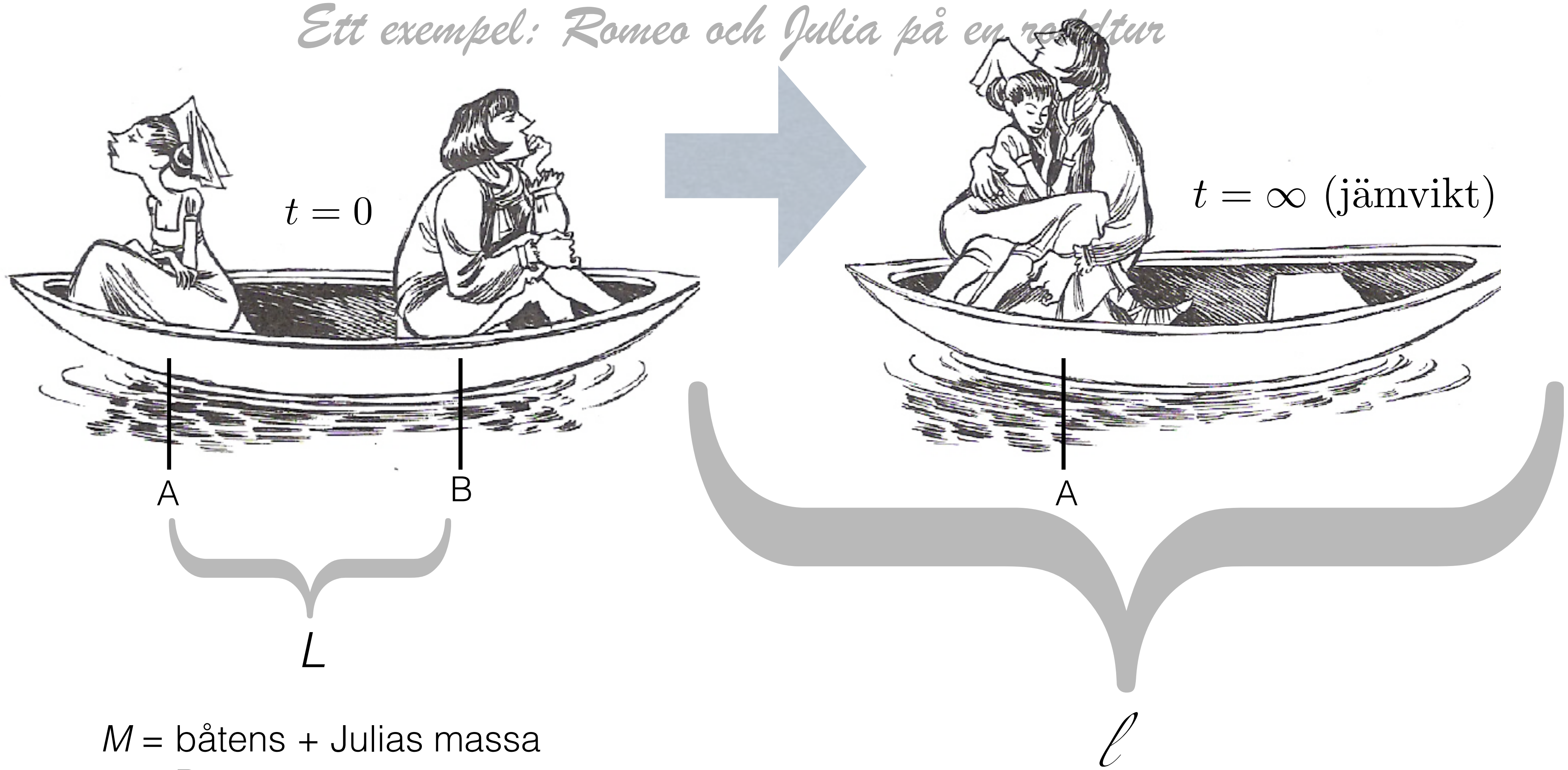
Ett exempel: Romeo och Julia på en roddtur




$M$ = båtens + Julias massa
$m$ = Romeos massa

*Att ta gränsvärden i fysiken är subtilt och kräver eftertanke, fysikalisk intuition, och matematisk erfarenhet!*

*Ett exempel: Romeo och Julia på en roddtur*

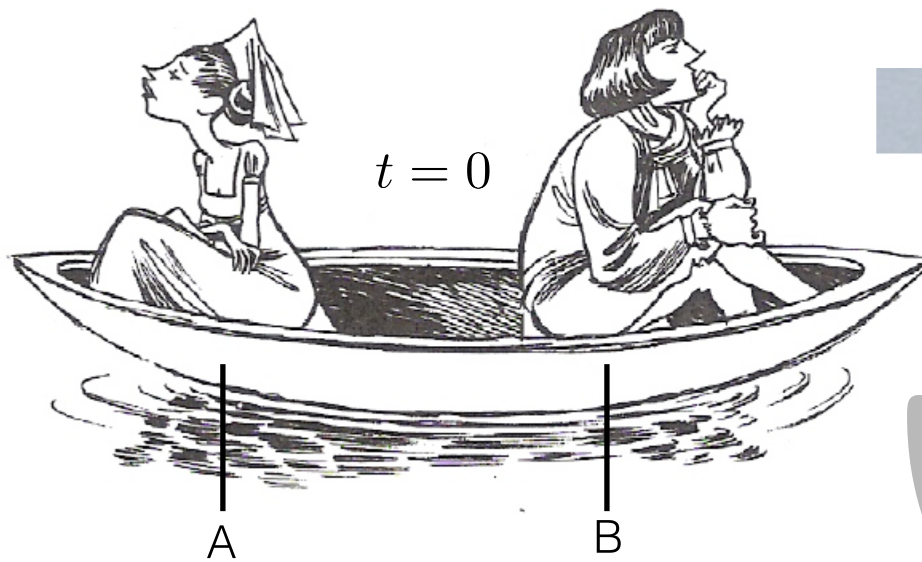


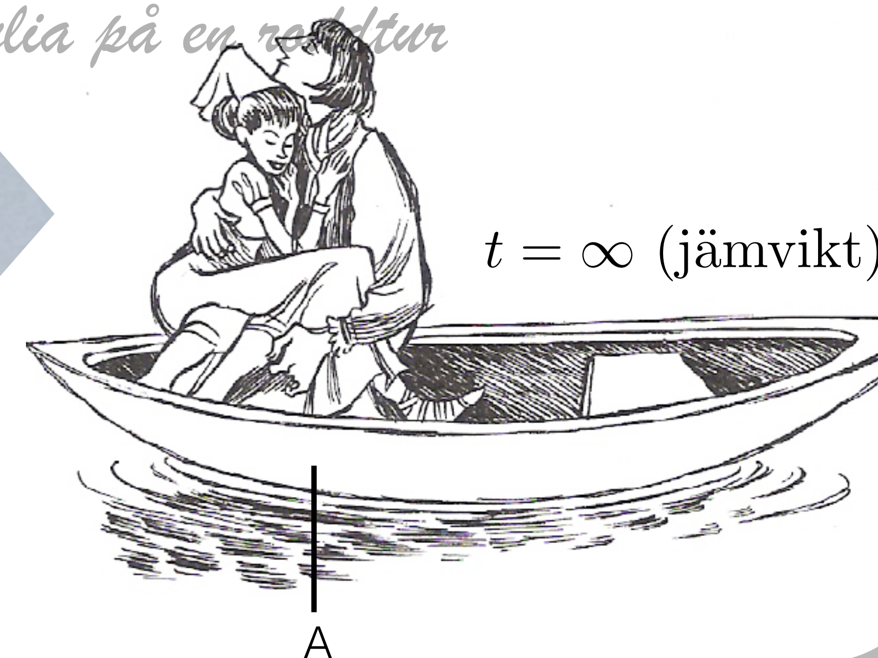

$M$ = båtens + Julias massa
$m$ = Romeos massa

Problem: Romeo går från B till A. Båten förflyttar sig (rekyleffekt). Hur långt?

*Att ta gränsvärden i fysiken är subtilt och kräver eftertanke, fysikalisk intuition, och matematisk erfarenhet!*

*Ett exempel: Romeo och Julia på en roddtur*




$L$

$\ell$

$M$ = båtens + Julias massa
$m$ = Romeos massa

Problem: Romeo går från B till A. Båten förflyttar sig (rekyleffekt). Hur långt?

Två fall att räkna på:

(1) perfekt fluid, $\eta = 0$

motstånd mot flöden

(2) viskös fluid, $\eta \neq 0$ ($H_2O$ har $\eta \approx 9 \times 10^{-4}$ Pa s)

(1) $\vec{R}_{CM}(\text{båt} + \text{Julia} + \text{Romeo}_B) = \vec{R}_{CM}(\text{båt} + \text{Julia} + \text{Romeo}_A)$

ty inga yttre krafter

$$\Rightarrow \ell = \frac{m}{m+M} L$$

(1) $\vec{R}_{CM}(\text{båt+Julia+Romeo}_B) = \vec{R}_{CM}(\text{båt+Julia+Romeo}_A)$

ty inga yttre krafter

$\Rightarrow \ell = \frac{m}{m+M} L$

(2) Yttre kraft! Skriv rörelseekvationen för problemet.

$x(t)$ = läget för båt+Julias CM relativt ett yttre fixt koordinatsystem

$y(t)$ = läget för Romeos CM

$$\Rightarrow M\ddot{x} + m\ddot{y} = -\eta\dot{x} \qquad (i)$$

Integrera från $t=0$ till $t=\infty$

$\dot{x} \to 0$ då $t \to \infty$ p.g.a. friktion $(\eta \neq 0)$

$\Rightarrow \dot{y} \to 0$ —"—

Vi har vidare antagit att $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$

(ii)

$$(i) \Rightarrow \underbrace{M\dot{x} + m\dot{y}\Big|_{t=0}^{\infty}}_{\text{från (ii)} = 0} = -\eta x\Big|_{t=0}^{\infty} = -\eta\big(\underbrace{x(t=\infty) - x(t=0)}_{\ell}\big)$$

$$\Rightarrow \ell = 0$$

föreläsning 27/11 (II)

(1) $\vec{R}_{CM}(\text{båt+Julia+Romeo}_B) = \vec{R}_{CM}(\text{båt+Julia+Romeo}_A)$

ty inga yttre krafter

$\Rightarrow \ \ell = \frac{m}{m+M} L$

(2) Yttre kraft! Skriv rörelseekvationen för problemet.

$x(t)$ = läget för båt+Julias CM relativt ett yttre fixt koordinatsystem

$y(t)$ = läget för Romeos CM

$\Rightarrow \quad M\ddot{x} + m\ddot{y} = -\eta\dot{x} \qquad (i)$

Integrera från $t=0$ till $t=\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x} \to 0 \text{ då } t \to \infty \quad \text{p.g.a. friktion } (\eta \neq 0) \\ \Rightarrow \dot{y} \to 0 \quad \text{—"—} \\ \\ \text{Vi har vidare antagit att } \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0 \end{array}\right\} (ii)$$

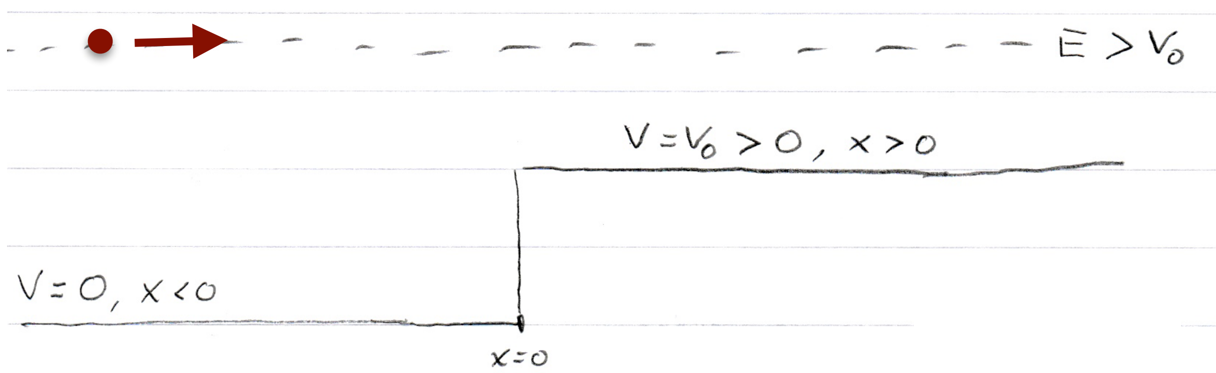
$$(i) \Rightarrow \underbrace{M\dot{x} + m\dot{y}\Big|_{t=0}^{\infty}}_{\text{från (ii)} \ = 0} = -\eta x\Big|_{t=0}^{\infty} = -\eta\underbrace{\left(x(t=\infty) - x(t=0)\right)}_{\ell}$$

$\Rightarrow \quad \ell = 0$

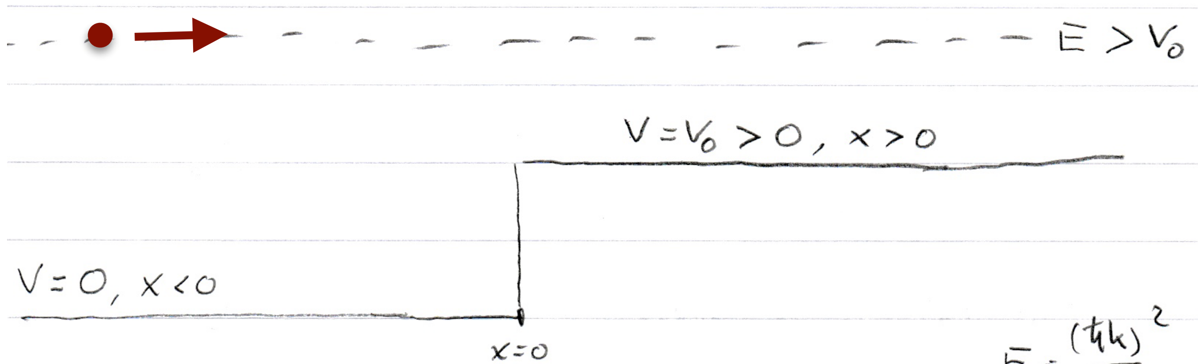
$$(1) \ \& \ (2) \Rightarrow \underbrace{\lim_{\eta \to 0} \ell(\eta)}_{=0} \neq \underbrace{\ell(0)}_{\frac{m}{m+M}L}$$

?

# Kvantmekanisk potentialbarriär: singulär gräns?



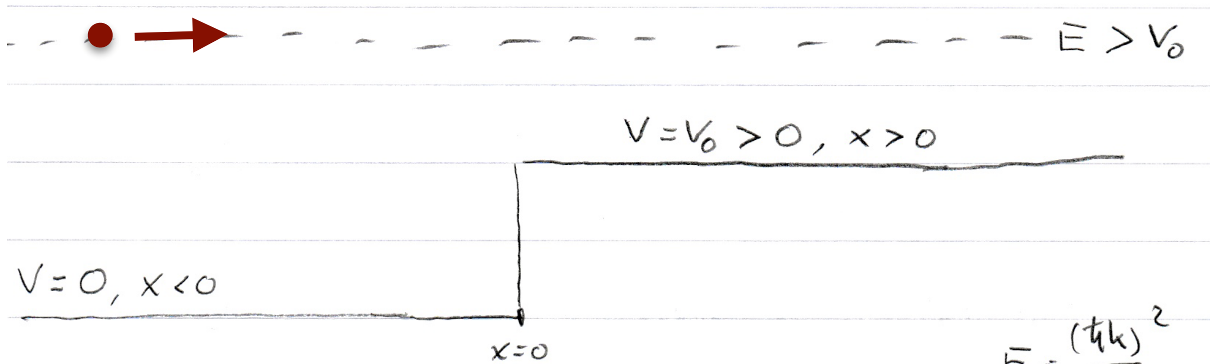
# Kvantmekanisk potentialbarriär: singulär gräns?




$$E = \frac{(\hbar k)^2}{2m}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + B e^{-ikx}, & x < 0, \quad k = \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \\ A e^{ik'x}, & x > 0, \quad k' = \dfrac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar} \end{cases}$$

# Kvantmekanisk potentialbarriär: singulär gräns?




$$E = \frac{(\hbar k)^2}{2m}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Be^{-ikx}, & x < 0, \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \\ Ae^{ik'x}, & x > 0, \quad k' = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar} \end{cases}$$

Sannolikhet $R$ för reflektion vid $x = 0$ : $R = |B|^2$

$\psi$ och $\partial_x \psi$ måste vara kontinuerliga vid $x = 0$

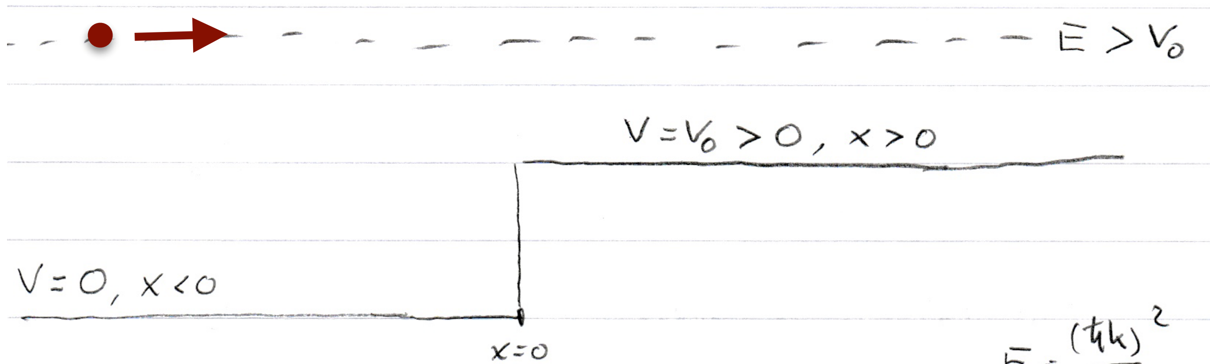
$\Downarrow$

$$\begin{cases} 1 + B = A & (\text{från } \psi(0^+) = \psi(0^-)) \\ k(1-B) = k'A & (\text{från } \psi'(0^+) = \psi'(0^-)) \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad A = 2k/(k+k') \,, \quad B = \frac{k-k'}{k+k'}$

$\Rightarrow \quad R = \left(\frac{k-k'}{k+k'}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{E} - \sqrt{E-V_0}}{\sqrt{E} + \sqrt{E+V_0}}\right)^2$ oberoende av $\hbar$ !

# Kvantmekanisk potentialbarriär: singulär gräns?




$$E = \frac{(\hbar k)^2}{2m}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Be^{-ikx}, & x < 0, \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \\ Ae^{ik'x}, & x > 0, \quad k' = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar} \end{cases}$$

Sannolikhet $R$ för reflektion vid $x = 0$: $R = |B|^2$

$\psi$ och $\partial_x \psi$ måste vara kontinuerliga vid $x = 0$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} 1 + B = A & (\text{från } \psi(0^+) = \psi(0^-)) \\ k(1-B) = k'A & (\text{från } \psi'(0^+) = \psi'(0^-)) \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad A = 2k/(k+k'), \quad B = \frac{k-k'}{k+k'}$

$\Rightarrow \quad R = \left(\frac{k-k'}{k+k'}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{E} - \sqrt{E-V_0}}{\sqrt{E} + \sqrt{E+V_0}}\right)^2$ oberoende av $\hbar$!

Men $\hbar \to 0$ är en "klassisk gräns" (BOHRS KORRESPONDENSPRINCIP)

$$\lim_{\hbar \to 0} R(\hbar) \neq \underbrace{R(0) = 0}_{\text{KLASSISK FYSIK}}$$

?