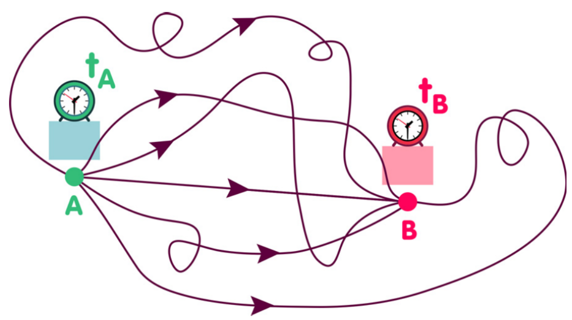
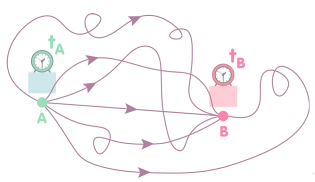
Feynmans vägintegralformulering av kvantmekaniken (epilog)





Feynmans vägintegralformulering av kvantmekaniken (epilog)

VI KAN DÅ SKRIVA $\hat{H} = \hat{p}^2/2m$

$$\mathcal{A}_{S \to 0} = \langle q_F | e^{-i\hat{H}T} | q_I \rangle = \int \mathcal{D}[q(t)]\, e^{i\int_0^T dt\, \frac{1}{2} m \dot{q}^2}$$

VI HAR GJORT HÄRLEDNINGEN FÖR EN FRI PARTIKEL…

GENERALISERA TILL FALLET MED NOLLSKILD POTENTIAL

$\hat{H} = \hat{p}^2/2m + V(q)$

$$\mathcal{A} = \langle q_F | e^{-i\hat{H}T} | q_I \rangle = \int \mathcal{D}[q(t)]\, e^{i\int_0^T dt\, \underbrace{\left(\frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q)\right)}_{L(q,\dot{q})}}$$

Hamilton-operator

klassisk Lagrange-funktion

$$\langle q_F | e^{-i\hat{H}T/\hbar} | q_I \rangle = \int_{q_I} \mathcal{D}[q(t)]\, e^{\underbrace{i\int_0^T dt\, L(q,\dot{q})}_{S'}/\hbar}$$

klassisk verkan S

$$= \underbrace{\int_{q_I}^{q_F} \mathcal{D}[q(t)]\, e^{iS'/\hbar}}_{\text{FEYNMANS VÄGINTEGRAL}}$$

$$\langle q_F | e^{-i\hat{H}T/\hbar} | q_I \rangle = \int_{q_I}^{q_F} \mathcal{D}[q(t)]\, e^{i\underbrace{\int_0^T dt\, L(q,\dot{q})}_{S'}/\hbar}$$

$$= \int_{q_I}^{q_F} \mathcal{D}[q(t)]\, e^{iS'/\hbar}$$

matriselement av tidsutvecklingsoperatorn **(”propagator”)**
= amplituden för en partikel att gå från $|q_I\rangle$ till $|q_F\rangle$

klassisk verkan S

FEYNMANS VÄGINTEGRAL

$$\langle q_F | e^{-i\hat{H}T/\hbar} | q_I \rangle = \int_{q_I}^{q_F} \mathcal{D}[q(t)]\, e^{i\overbrace{\int_0^T dt\, L(q,\dot{q})}^{S'}/\hbar}$$

$$= \underbrace{\int_{q_I}^{q_F} \mathcal{D}[q(t)]\, e^{iS'/\hbar}}_{\text{FEYNMANS VÄGINTEGRAL}}$$

matriselement av tidsutvecklingsoperatorn (**”propagator”**)
= amplituden för en partikel att gå från $|q_I\rangle$ till $|q_F\rangle$

klassisk verkan S

Fermioniska vägintegraler måste skrivas i termer av (antikommuterande) Grassmann-variabler

rules for the integration of a Grassmann quantity:

$$\int 1\, d\theta = 0$$
$$\int \theta\, d\theta = 1$$

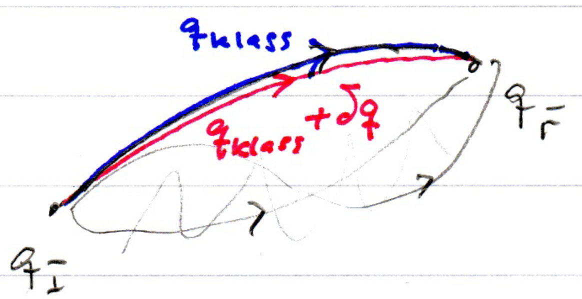
we conclude that the operations of integration and differentiation of a Grassmann number are identical

Vi kan "förstå" minsta verkans princip som en konsekvens av den klassiska gränsen $\hbar \to 0$ $\Rightarrow$ NÄRLIGGANDE VÄGAR INTERFERERAR DESTRUKTIVT P.G.A. VÅLDSAMMA FASFLUKTUATIONER OM DEN KLASSISKA VERKAN INTE ÄR STATIONÄR

$$= \int_{q_I}^{q_F} \mathcal{D}[q(t)]\, e^{iS/\hbar}$$

FEYNMANS VÄGINTEGRAL

Vi kan "förstå" minsta verkans princip som en konsekvens av den klassiska gränsen $\hbar \to 0$ $\Rightarrow$ NÄRLIGGANDE VÄGAR INTERFERERAR DESTRUKTIVT P.G.A. VÅLDSAMMA FASFLUKTUATIONER OM DEN KLASSISKA VERKAN INTE ÄR STATIONÄR



$$= \int_{q_I}^{q_F} \mathcal{D}[q(t)]\, e^{iS/\hbar}$$

FEYNMANS VÄGINTEGRAL

DEN KLASSISKA VÄGEN q_{klass} UPPFYLLER

$$\delta S[q_{klass}] = 0$$

$$\Downarrow$$

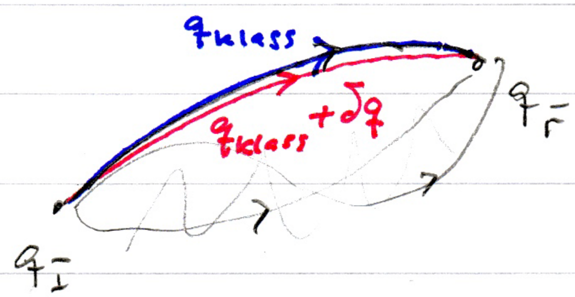
$$S[q_{klass}] - S[q_{klass} + \delta q] \approx 0$$

$$\Downarrow$$

$$e^{iS[q_{klass}]/\hbar} \approx e^{iS[q_{klass} + \delta q]/\hbar}$$

KONSTRUKTIV INTERFERENS !

Vi kan "förstå" **minsta verkans princip** som en konsekvens av den klassiska gränsen $\hbar \to 0$ $\Rightarrow$ NÄRLIGGANDE VÄGAR INTERFERERAR <u>DESTRUKTIVT</u> P.G.A. VÅLDSAMMA FASFLUKTUATIONER OM DEN KLASSISKA VERKAN <u>INTE</u> ÄR STATIONÄR



$$= \int_{q_I}^{q_F} \mathcal{D}[q(t)]\, e^{iS/\hbar}$$

FEYNMANS VÄGINTEGRAL

DEN <u>KLASSISKA VÄGEN</u> q_{klass} UPPFYLLER

$$\delta S[q_{klass}] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$S[q_{klass}] - S[q_{klass} + \delta q] \approx 0$$

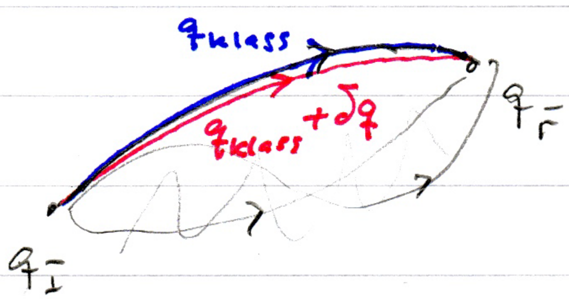
$$\Downarrow$$

$$e^{iS[q_{klass}]/\hbar} \approx e^{iS[q_{klass} + \delta q]/\hbar}$$

KONSTRUKTIV INTERFERENS!

Bara den klassiska vägen "överlever" i gränsen h –> 0.
Villkor: S stationär, dvs. minsta verkans princip är uppfylld!

Vi kan "förstå" **minsta verkans princip** som en konsekvens av den klassiska gränsen $\hbar \to 0$ $\Rightarrow$ NÄRLIGGANDE VÄGAR INTERFERERAR DESTRUKTIVT P.G.A. VÅLDSAMMA FASFLUKTUATIONER OM DEN KLASSISKA VERKAN INTE ÄR STATIONÄR



ett formellt argument använder *stationära fasapproximationen* (se AWH)

$$= \int_{q_I}^{q_F} \mathcal{D}[q(t)]\, e^{iS/\hbar}$$

FEYNMANS VÄGINTEGRAL

DEN KLASSISKA VÄGEN q_{klass} UPPFYLLER

$$\delta S[q_{klass}] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$S[q_{klass}] - S[q_{klass} + \delta q] \approx 0$$

$$\Downarrow$$

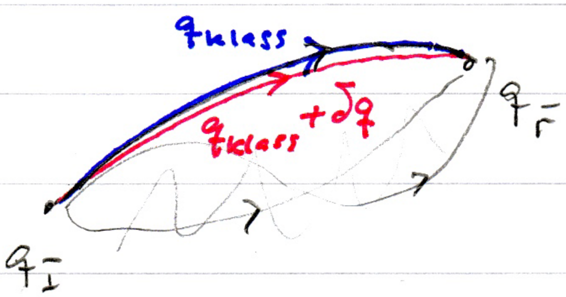
$$e^{iS[q_{klass}]/\hbar} \approx e^{iS[q_{klass} + \delta q]/\hbar}$$

KONSTRUKTIV INTERFERENS!

Bara den klassiska vägen
"överlever" i gränsen h –> 0.
Villkor: S stationär, dvs. minsta
verkans princip är uppfylld!

Vi kan "förstå" minsta verkans princip som en konsekvens av den klassiska gränsen $\hbar \to 0$ $\Rightarrow$ NÄRLIGGANDE VÄGAR INTERFERERAR DESTRUKTIVT P.G.A. VÅLDSAMMA FASFLUKTUATIONER OM DEN KLASSISKA VERKAN INTE ÄR STATIONÄR

ett formellt argument använder *stationära fasapproximationen* (se AWH)



$$= \int_{q_I}^{q_F} \mathcal{D}[q(t)]\, e^{iS/\hbar}$$

FEYNMANS VÄGINTEGRAL

DEN KLASSISKA VÄGEN q_{klass} UPPFYLLER

$$\delta S[q_{klass}] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$S[q_{klass}] - S[q_{klass} + \delta q] \approx 0$$

$$\Downarrow$$

$$e^{iS[q_{klass}]/\hbar} \approx e^{iS[q_{klass} + \delta q]/\hbar}$$

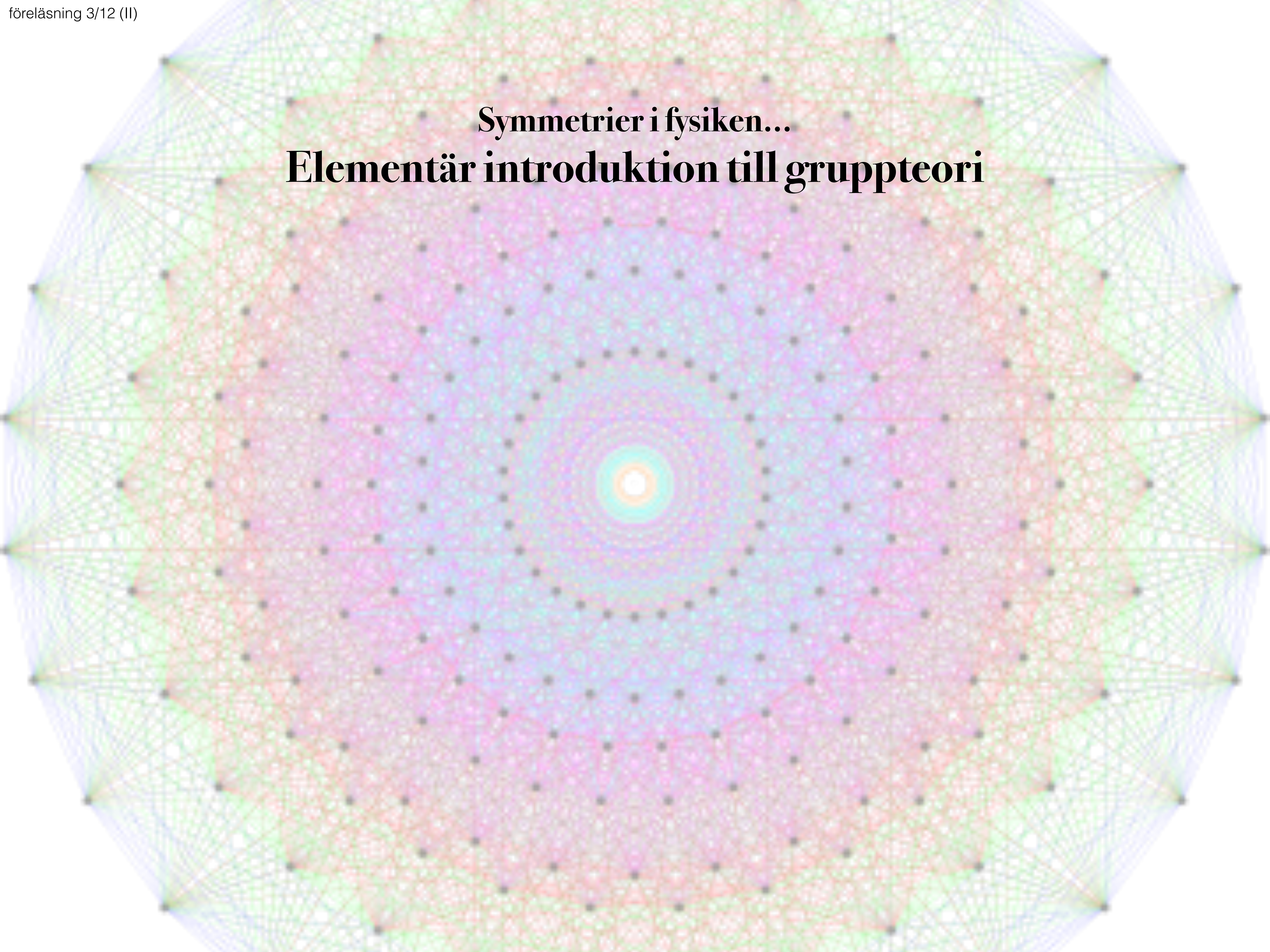
KONSTRUKTIV INTERFERENS !

MEN ... $\hbar \neq 0$!

BOHRS ARGUMENT : $\hbar \sim 6.6 \times 10^{-16}$ eVs ≈ 0 PÅ MAKROSKOPISKA SKALOR !

Bara den klassiska vägen "överlever" i gränsen h –> 0. Villkor: S stationär, dvs. minsta verkans princip är uppfylld!

föreläsning 3/12 (I)



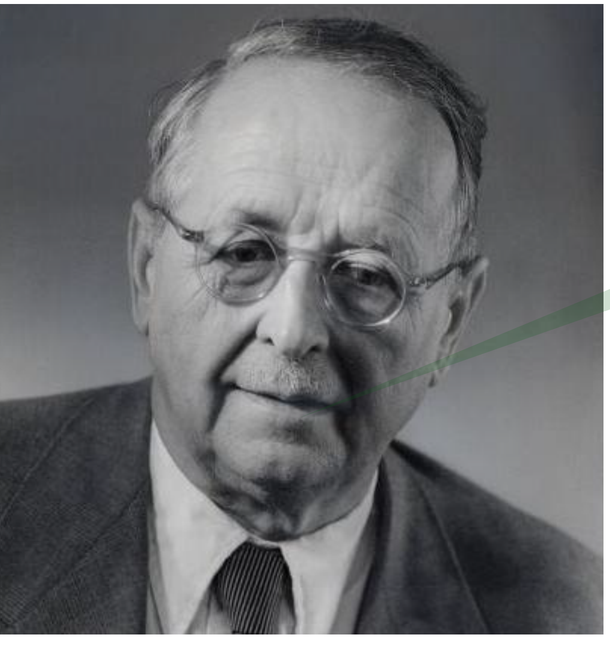
Symmetrier i fysiken…

Elementär introduktion till gruppteori

Vad är en symmetri?

Vad är en symmetri?

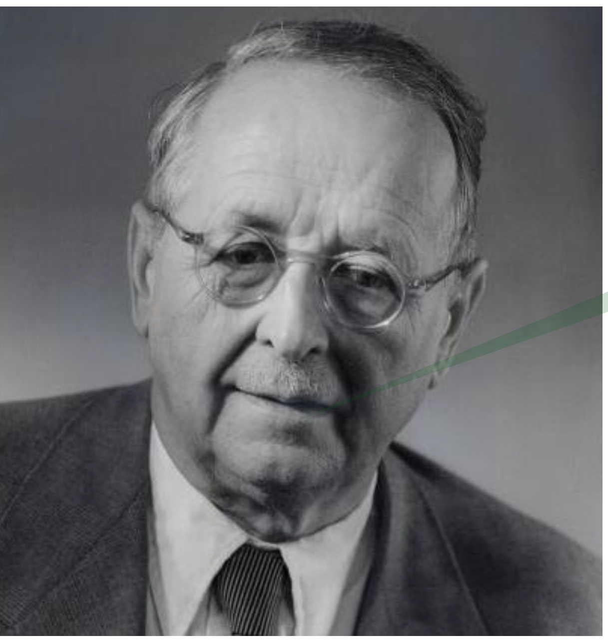
”Ett objekt har en symmetri om det finns en transformation som avbildar objektet på sig självt.”



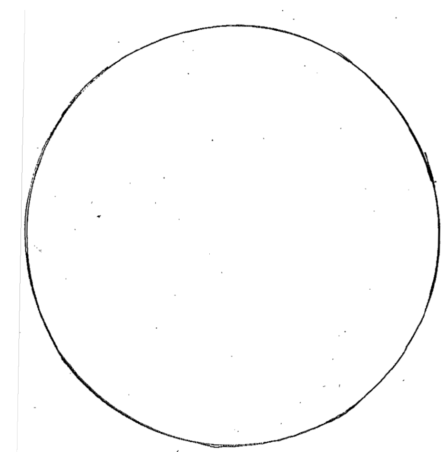
Herman Weyl
1885-1955

Vad är en symmetri?

”Ett objekt har en symmetri om det finns en transformation som avbildar objektet på sig självt.”



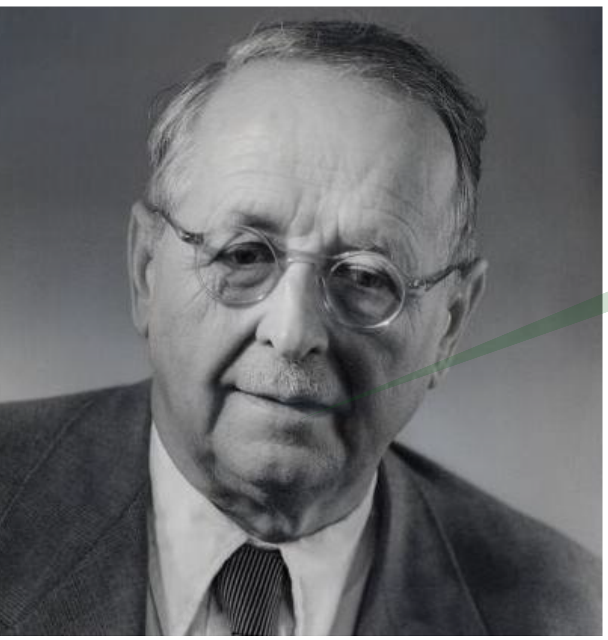
Herman Weyl
1885-1955



$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0$$

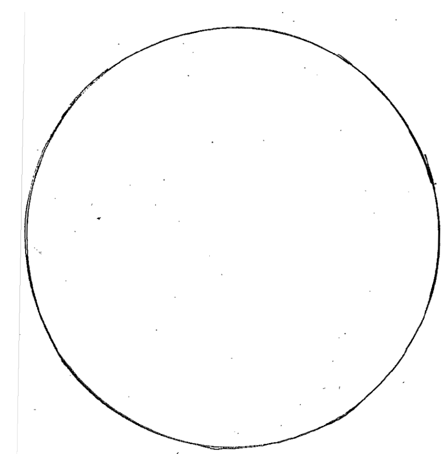
Vad är en symmetri?

"Ett objekt har en symmetri om det finns en transformation som avbildar objektet på sig självt."



Herman Weyl
1885-1955

invariant under spegling



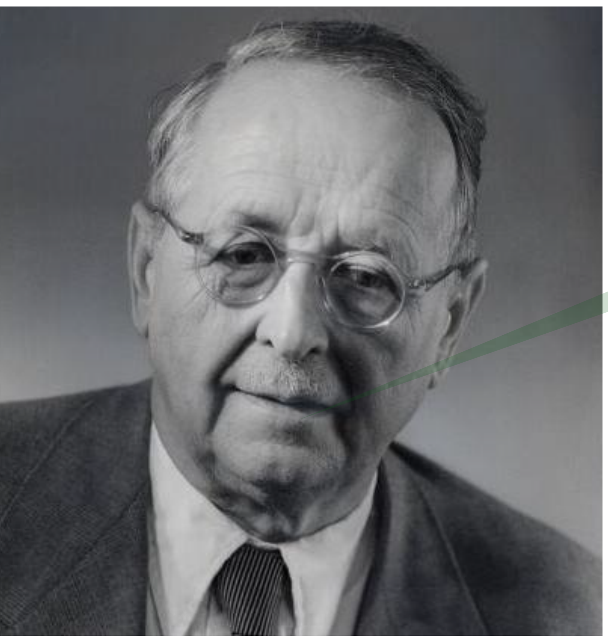
invariant under rotation

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0$$

invariant under en Lorentztransformation

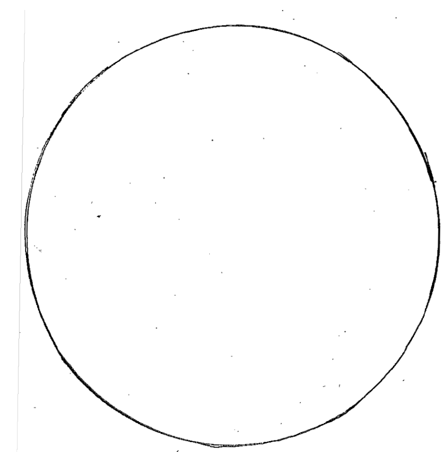
Vad är en symmetri?

”Ett objekt har en symmetri om det finns en transformation som avbildar objektet på sig självt.”



Herman Weyl
1885-1955

invariant under **spegling**



invariant under **rotation**

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0$$

invariant under en **Lorentztransformation**

exempel på **symmetritransformationer**

En mängd av **symmetritransformationer** kallas en *symmetrigrupp* om transformationerna uppfyller vissa villkor

En mängd av **symmetritransformationer** kallas en *symmetrigrupp*
om transformationerna uppfyller vissa villkor

Allmänt (i matematiken):
En *grupp* är en mängd av element som uppfyller de fyra gruppaxiomen

En mängd av **symmetritransformationer** kallas en *symmetrigrupp* om transformationerna uppfyller vissa villkor

Allmänt (i matematiken):
En *grupp* är en mängd av element som uppfyller de fyra gruppaxiomen

En mängd av **symmetritransformationer** kallas en *symmetrigrupp* om transformationerna uppfyller vissa villkor

Allmänt (i matematiken):

En *grupp* är en mängd av element som uppfyller de fyra gruppaxiomen

The universe is an enormous direct product of representations of symmetry groups.

—Steven Weinberg Nobel Prize winner in Physics 1979 (together with S. Glashow and A. Salam)

Introduktion till gruppteori

- gruppaxiomen
- delgrupp, Abelsk/icke-Abelsk grupp
- permutationsgruppen

- Cayleys sats
- cykliska gruppen C_n, diedergruppen D_n
- ekvivalensrelation, ekvivalensklass
- konjugering, konjugatklass
- sidoklass
- kvotmängd G/H, kvotgrupp
- Lagranges sats

Evariste Galois, 1811-1832

INTRODUKTION TILL GRUPPTEORI

$G = \{g_1, g_2, \ldots g_n\}$ + kompositionsregel ("gruppmultiplikation")

bildar en grupp omm elementen uppfyller.

GRUPPAXIOMEN

- $g_i g_j \in G \quad \forall g_i, g_j$
- $(g_i g_j) g_k = (g_i g_j) g_k \quad , \quad \forall g_i, g_j, g_k$
- $\exists e \in G, \quad e g_i = g_i e = g_i \quad \forall g_i$
- $\forall g_i \exists g_i^{-1} : g_i g_i^{-1} = g_i^{-1} g_i = e$

$H \subset G$ DELGRUPP om H uppfyller gruppaxiomen.

$\{e\}, G$ "TRIVIALA DELGRUPPER".

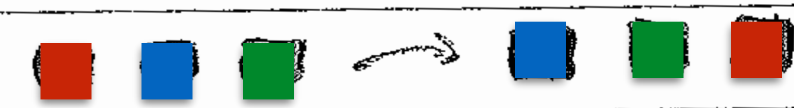
$g_i g_j = g_j g_i \quad \forall g_i, g_j \Rightarrow$ ABELSK GRUPP

Ett speciellt viktigt exempel på en ändlig grupp är
PERMUTATIONSGRUPPEN $S_n = \{P_1, P_2, \dots, P_{n!}\}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

något av $P_1, P_2, \dots, P_{n!}$

EX $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$:



$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix} \neq QP \Rightarrow S_n \text{ är ICKE-ABELSK}$$

EX

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{(1)}(23)\cdot(132) = (12)\cancel{(3)}$$

$$(23)(132) = (12)$$

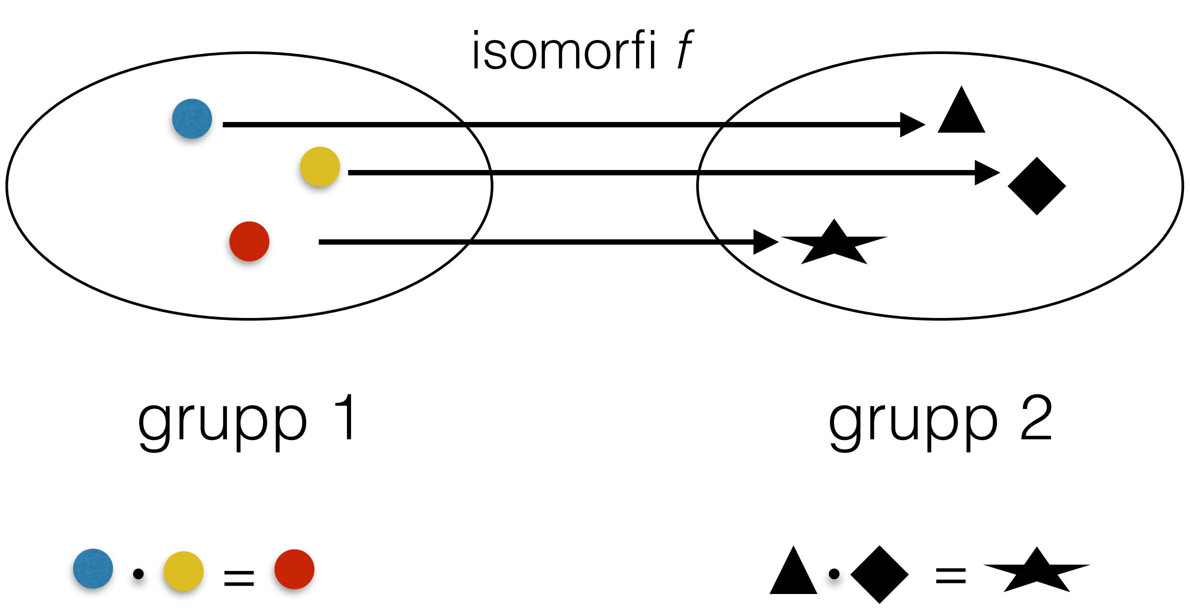
Varje element i S_n kan skrivas som en produkt av disjunkta CYKLER. Cykler kommuterar.

Varför är S_n intressant? Jo,

- 1-1
- gruppmultiplikationen bevarad

CAYLEYS SATS

Varje grupp av ordning n är ISOMORF med en delgrupp till S_n.



BEVIS AV CAYLEYS TEOREM

	g_1	g_2	$\cdots$	g_n
g_1				
g_2				
$\vdots$				
g_j	$g_j g_1$	$g_j g_2$	$\cdots$	$g_j g_n$
$\vdots$				
g_n				

BEVIS AV CAYLEYS TEOREM

	g_1	g_2	$\cdots$	g_n
g_1				
g_2				
$\cdot$				
g_j	$g_j g_1$	$g_j g_2$	$\cdots$	$g_j g_n$
$\vdots$				
g_n				

Permutation av $g_1 g_2 \cdots g_n$

$$\Downarrow$$

$$g_j \eqsim p_j \in S_n$$

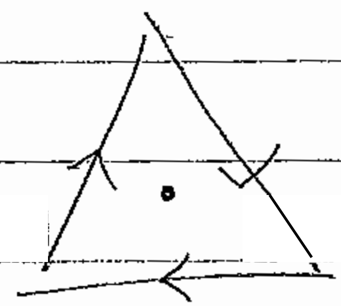
Andra viktiga ändliga grupper:

CYKLISKA GRUPPEN C_n (= symmetrigruppen av rotationen av en liksidig polygon med n orienterade sidor) och

DIEDERGRUPPEN D_n (= ... icke-orienterade sidor)

EX

C_3



$C_3 = \{a, b, e\}$

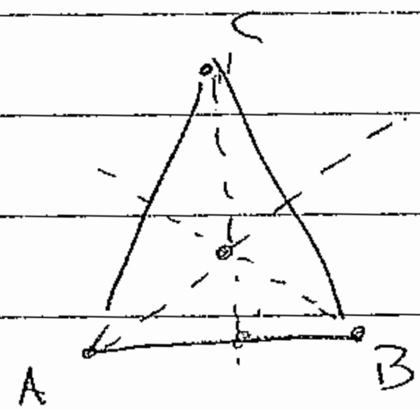
a: $2\pi/3$-rotation runt •

b: $4\pi/3$-rotation runt •

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

"multiplikationstabell"

Ex D_3



$$D_3 = \{a, b, e, c_1, c_2, c_3\}$$

π-rotation runt OA, OB, OC

$$\simeq S_3$$

isomorf

NÅGRA VIKTIGA BEGREPP

KONJUGERING

$a, b \in G$ är KONJUGERADE om $\exists g \in G$

"konjugerande element"

$a = gbg^{-1}$

a, b ekvivalenta under konjugering : $a \sim b$

Ex på en EKVIVALENSRELATION

definieras av

(i) $a \sim a$ reflexiv

(ii) $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ symmetrisk

(iii) $a \sim b,\ b \sim c \Rightarrow a \sim c$ transitiv

Är konjugering en ekvivalensrelation ?

TEST: (i) Ok ty $a = eae^{-1}$

(ii) Ok ty $a = gbg^{-1} \Rightarrow b = g^{-1}ag$

(iii) $a = gbg^{-1}$, $b = hch^{-1}$

$\Rightarrow a = g(hch^{-1})g^{-1} = (gh)c(gh)^{-1}$

$\Rightarrow a \sim c$ (med konjugerande element (gh))

EKVIVALENSKLASS

Välj $a \in G$ $\quad (a) = \{b \in G \mid b \sim a\}$

$(b) = \{c \in G \mid c \sim b\}$

$b \notin (a) \Rightarrow (a) \cap (b) = \emptyset$

ty antag att $\exists d$, $d \sim a$ och $d \sim b \Rightarrow a \sim b$ $\divideontimes$

KONJUGATKLASSER

$(a) = \{ b \mid b = gag^{-1}, \exists g \in G \}$

Det finns en annan typ av ekvivalensklass:

SIDOKLASS

$H = \{h_1, h_2, \ldots, h_r\}$ delgrupp till G.

Välj $g \in G$, bilda VÄNSTER SIDOKLASS AV H MED AVSEENDE PÅ g

$gH \equiv \{gh_1, gh_2, \ldots, gh_r\}$

(analogt för höger!)

Mängden av sidoklasser $\{g_1H, g_2H, \ldots, g_sH\} \equiv G/H$ kallas KVOTMÄNGD. Om H är normal, dvs $gH = Hg$ $\forall g$ så är G/H en grupp (KVOTGRUPP)

DEF: $a \sim b$: $b \in aH$

TEST (i) $a \in aH$ ok ty $e \in H$

(ii) $b \in aH \overset{?}{\Rightarrow} a \in bH$.

$b \in aH \Rightarrow \exists h : b = ah \Rightarrow a = bh^{-1}, \; h^{-1} \in H$

$\Rightarrow a \in bH$ ok

(iii) $b \in aH$ och $c \in bH \overset{?}{\Rightarrow} c \in aH$

$\Downarrow$ $\qquad\qquad\qquad$ $\Downarrow$

$b = ah, \exists h \in H \qquad c = bh', \exists h' \in H$

$\Downarrow$

$c = ahh' \Rightarrow c \in aH$ ty $hh' \in H$

(ordningen hos H) = [h] = r

Varje sidoklass innehåller r element

$gH = \{gh_1, gh_2, \ldots, gh_r\}$

Antag att $gh_1 = gh_2 \Rightarrow h_1 = h_2$ *

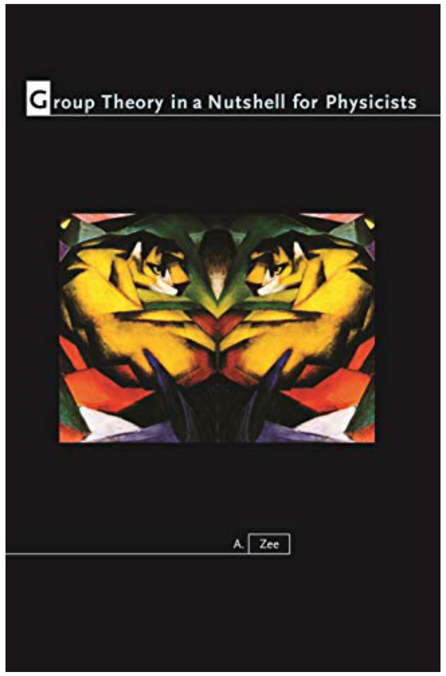
Sidoklasserna disjunkta : $s[h] = [g]$
ty ekvivalensklass

sidoklasser

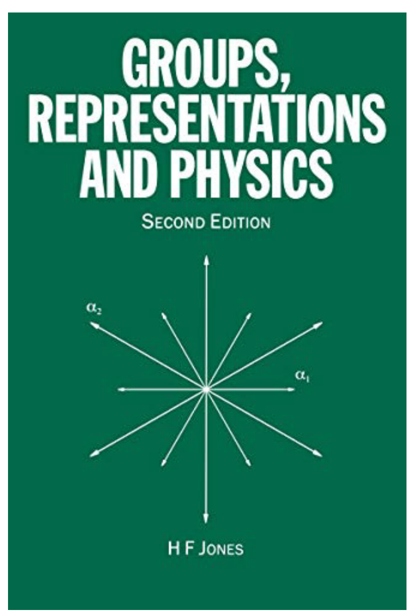
LAGRANGES TEOREM

En grupp av primtalsordning kan inte ha äkta delgrupper

För särskilt intresserade…



A. Zee, Group Theory in a Nutshell for Physicists, sec. 1.1, 1.2



H. F. Jones, Groups, Representations and Physics, chapt. 1, 2