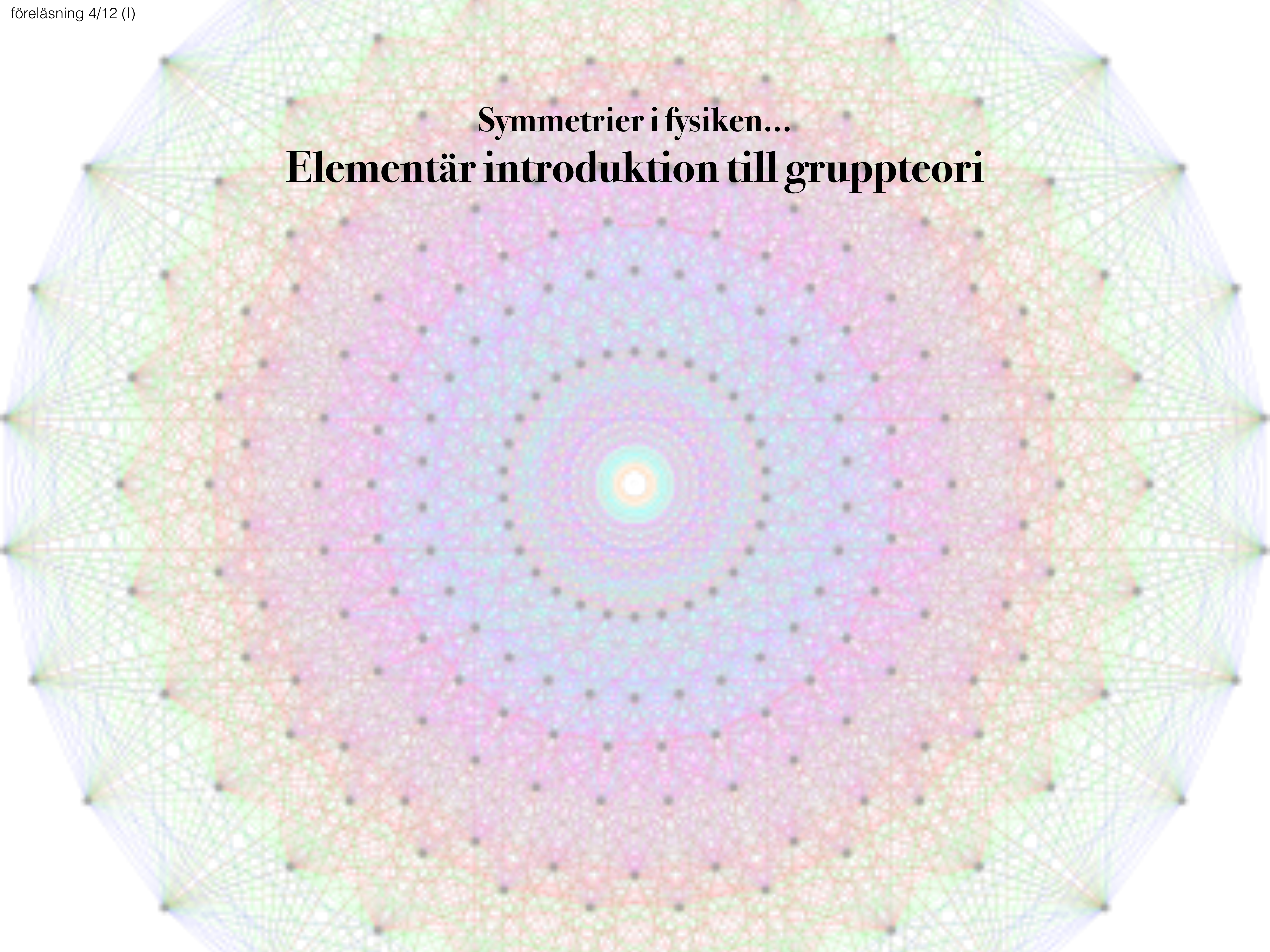


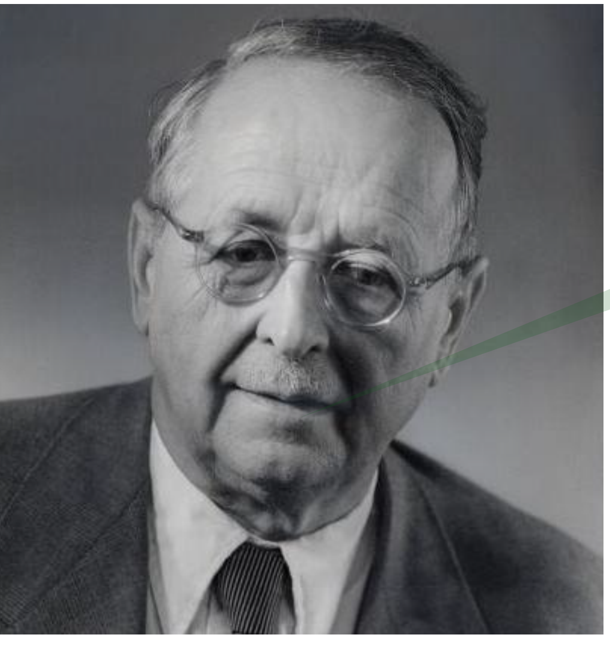
Symmetrier i fysiken…

Elementär introduktion till gruppteori

Vad är en symmetri?

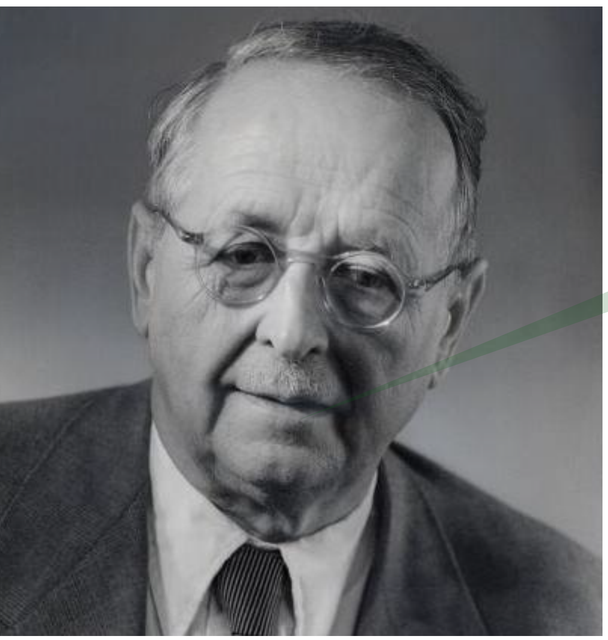
Vad är en symmetri?

”Ett objekt har en symmetri om det finns en transformation som avbildar objektet på sig självt.”



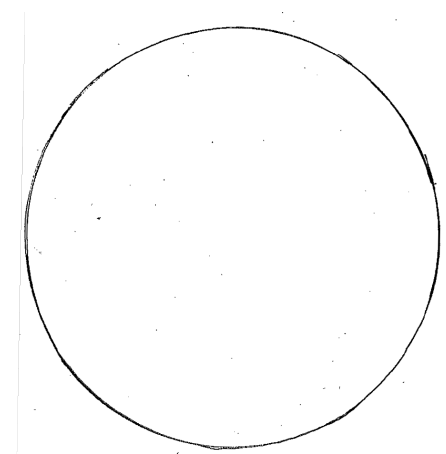
Herman Weyl
1885-1955

Vad är en symmetri?



Herman Weyl
1885-1955

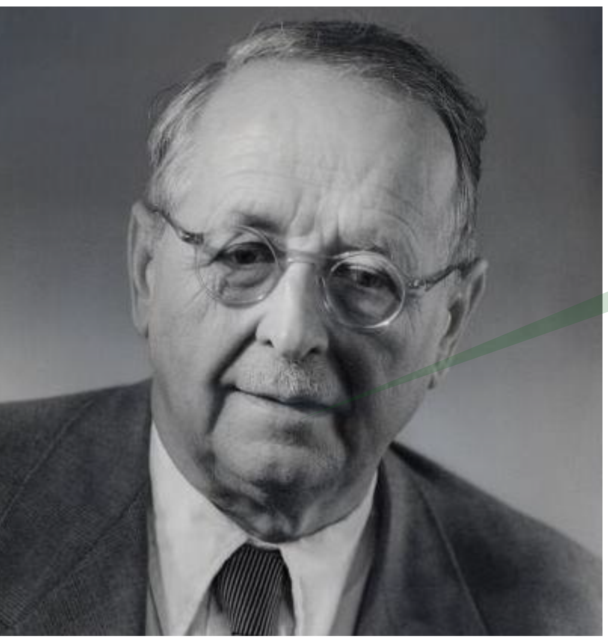
”Ett objekt har en symmetri om det finns en transformation som avbildar objektet på sig självt.”



$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0$$

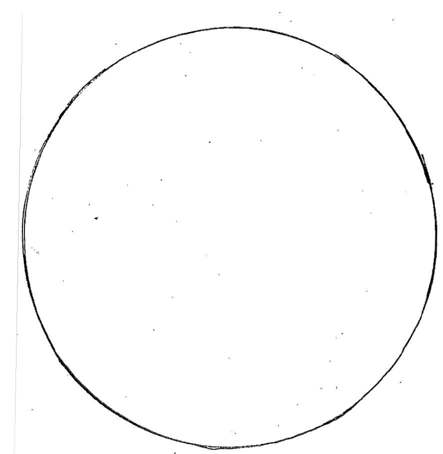
Vad är en symmetri?

”Ett objekt har en symmetri om det finns en transformation som avbildar objektet på sig självt.”



Herman Weyl
1885-1955

invariant under spegling



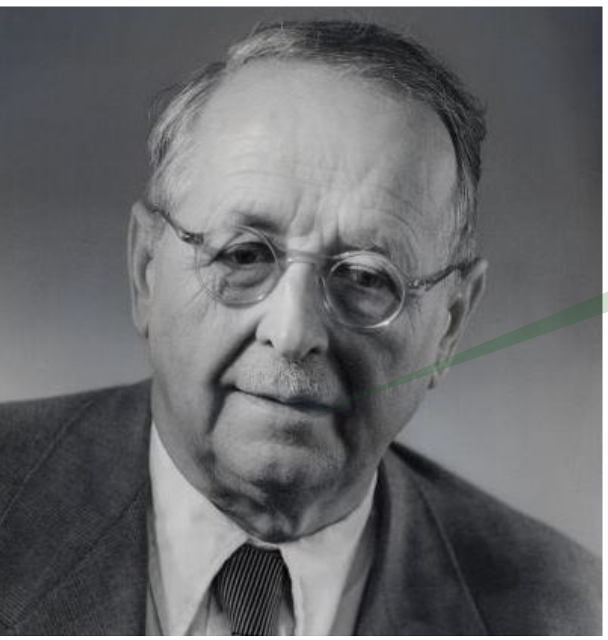
invariant under rotation

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0$$

invariant under en Lorentztransformation

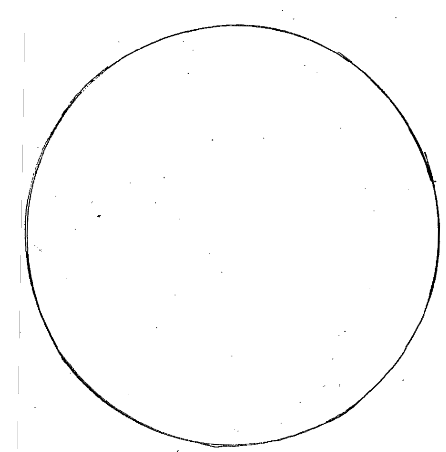
Vad är en symmetri?

”Ett objekt har en symmetri om det finns en transformation som avbildar objektet på sig självt.”



Herman Weyl
1885-1955

invariant under **spegling**



invariant under **rotation**

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0$$

invariant under en **Lorentztransformation**

exempel på **symmetritransformationer**

En mängd av **symmetritransformationer** kallas en *symmetrigrupp*
om transformationerna uppfyller vissa villkor

En mängd av **symmetritransformationer** kallas en *symmetrigrupp* om transformationerna uppfyller vissa villkor

Allmänt (i matematiken):

En *grupp* är en mängd av element som uppfyller de fyra gruppaxiomen

En mängd av **symmetritransformationer** kallas en *symmetrigrupp*
om transformationerna uppfyller vissa villkor

Allmänt (i matematiken):
En *grupp* är en mängd av element som uppfyller de fyra gruppaxiomen

En mängd av **symmetritransformationer** kallas en *symmetrigrupp* om transformationerna uppfyller vissa villkor

Allmänt (i matematiken):

En *grupp* är en mängd av element som uppfyller de fyra gruppaxiomen

The universe is an enormous direct product of representations of symmetry groups.
—Steven Weinberg Nobel Prize winner in Physics 1979 (together with S. Glashow and A. Salam)

Introduktion till gruppteori

- gruppaxiomen
- delgrupp, Abelsk/icke-Abelsk grupp
- permutationsgruppen

- Cayleys sats
- cykliska gruppen C_n, diedergruppen D_n
- ekvivalensrelation, ekvivalensklass
- konjugering, konjugatklass
- sidoklass
- kvotmängd G/H, kvotgrupp
- Lagranges sats

Evariste Galois, 1811-1832

INTRODUKTION TILL GRUPPTEORI

$G = \{g_1, g_2, \dots g_n\}$ + kompositionsregel ("gruppmultiplikation")

bildar en grupp omm elementen uppfyller.

GRUPPAXIOMEN

- $g_i g_j \in G \quad \forall g_i, g_j$
- $(g_i g_j) g_k = (g_i g_j) g_k \quad , \quad \forall g_i, g_j, g_k$
- $\exists e \in G, \; e g_i = g_i e = g_i \quad \forall g_i$
- $\forall g_i \exists g_i^{-1} : g_i g_i^{-1} = g_i^{-1} g_i = e$

$H \subset G$ DELGRUPP om H uppfyller gruppaxiomen.

$\{e\}, G$ "TRIVIALA DELGRUPPER".

$g_i g_j = g_j g_i \quad \forall g_i, g_j \Rightarrow$ ABELSK GRUPP

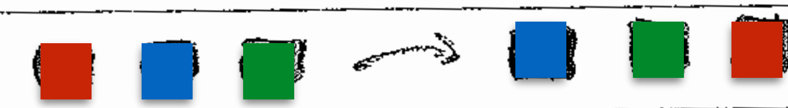
Ett speciellt viktigt exempel på en ändlig grupp är

PERMUTATIONSGRUPPEN $S_n = \{P_1, P_2, \dots, P_{n!}\}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

något av $P_1, P_2, \dots, P_{n!}$

EX $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$:



$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix} \neq QP \Rightarrow S_n \text{ är ICKE-ABELSK}$$

EX

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{(1)}(23) \cdot (132) = (12)\cancel{(3)}$$

$$(23)(132) = (12)$$

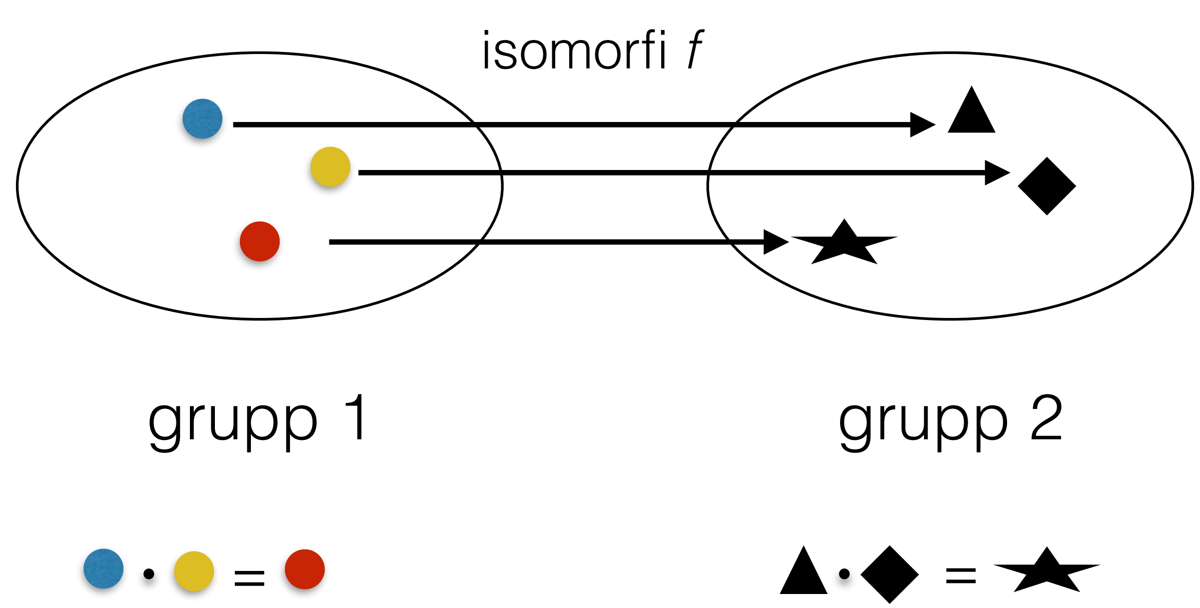
Varje element i S_n kan skrivas som en produkt av disjunkta CYKLER. Cykler kommuterar.

Varför är S_n intressant? Jo,

- 1-1
- gruppmultiplikationen bevarad

CAYLEYS SATS

Varje grupp av ordning n är ISOMORF med en delgrupp till S_n.



BEVIS AV CAYLEYS TEOREM

	g_1	g_2	$\cdots$	g_n
g_1				
g_2				
$\vdots$				
g_j	g_jg_1	g_jg_2	$\cdots$	g_jg_n
$\vdots$				
g_n				

BEVIS AV CAYLEYS TEOREM

	g_1	g_2	$\cdots$	g_n
g_1				
g_2				
$\cdot$				
g_j	$g_j g_1$	$g_j g_2$	$\cdots$	$g_j g_n$
$\vdots$				
g_n				

Permutation av $g_1 g_2 \cdots g_n$

$$\Downarrow$$

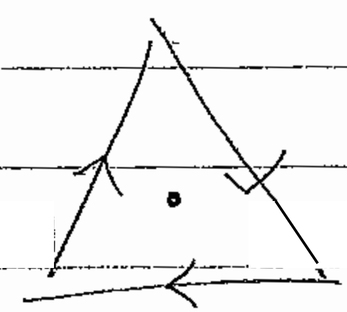
$$g_j \eqsim p_j \in S_n$$

Andra viktiga ändliga grupper:

CYKLISKA GRUPPEN C_n (= symmetrigruppen av rotationer av en liksidig polygon med n orienterade sidor) och DIEDERGRUPPEN D_n (= ... icke-orienterade sidor)

EX

C_3



$C_3 = \{a, b, e\}$

$2\pi/3$-rotation runt •

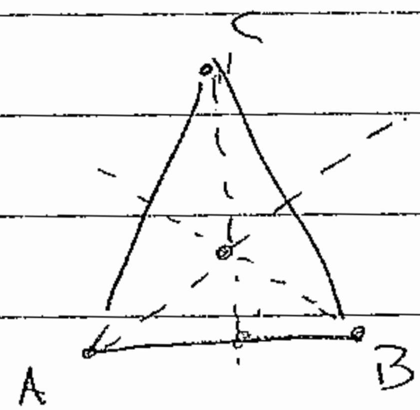
$4\pi/3$-rotation runt •

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

"multiplikationstabell"

EX

D_3



$$D_3 = \{a, b, e, c_1, c_2, c_3\}$$

π-rotation runt OA

OB

OC

$$\simeq S_3$$

isomorf

NÅGRA VIKTIGA BEGREPP

KONJUGERING

$a, b \in G$ är KONJUGERADE om $\exists g \in G$

"konjugerande element"

$a = gbg^{-1}$

a, b ekvivalenta under konjugering : $a \sim b$

Ex på en EKVIVALENSRELATION

definieras av

(i) $a \sim a$ reflexiv

(ii) $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ symmetrisk

(iii) $a \sim b,\ b \sim c \Rightarrow a \sim c$ transitiv

Är konjugering en ekvivalensrelation ?

TEST: (i) Ok ty $a = eae^{-1}$

(ii) Ok ty $a = gbg^{-1} \Rightarrow b = g^{-1}ag$

(iii) $a = gbg^{-1}$, $b = hch^{-1}$

$\Rightarrow a = g(hch^{-1})g^{-1} = (gh)c(gh)^{-1}$

$\Rightarrow a \sim c$ (med konjugerande element (gh))

EKVIVALENSKLASS

Välj $a \in G$ $\quad (a) = \{b \in G \mid b \sim a\}$

$(b) = \{c \in G \mid c \sim b\}$

$b \notin (a) \Rightarrow (a) \cap (b) = \emptyset$

ty antag att $\exists d$, $d \sim a$ och $d \sim b \Rightarrow a \sim b$ *

KONJUGATKLASSER

$(a) = \{b \mid b = gag^{-1}, \exists g \in G\}$

Det finns en annan typ av ekvivalensklass:

SIDOKLASS

$H = \{h_1, h_2, \dots, h_r\}$ delgrupp till G.

Välj $g \in G$, bilda VÄNSTER SIDOKLASS AV H MED AVSEENDE PÅ g

$$gH \equiv \{gh_1, gh_2, \dots, gh_r\}$$

(analogt för höger!)

Mängden av sidoklasser $\{g_1H, g_2H, \dots, g_sH\} \equiv G/H$ kallas KVOTMÄNGD. Om H är normal, dvs $gH = Hg$ $\forall g$ så är G/H en grupp (KVOTGRUPP)

DEF: $a \sim b$: $b \in aH$

TEST (i) $a \in aH$ ok ty $e \in H$

(ii) $b \in aH \overset{?}{\Rightarrow} a \in bH$.

$b \in aH \Rightarrow \exists h : b = ah \Rightarrow a = bh^{-1}, h^{-1} \in H$

$\Rightarrow a \in bH$ ok

(iii) $b \in aH$ och $c \in bH \overset{?}{\Rightarrow} c \in aH$

$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$

$b = ah, \exists h \in H \qquad c = bh', \exists h' \in H$

$\Downarrow$

$c = ahh' \Rightarrow c \in aH$ ty $hh' \in H$

(ordningen hos H) $= [h] = r$

Varje sidoklass innehåller r element

$$gH = \{gh_1, gh_2, \ldots, gh_r\}$$

Antag att $gh_1 = gh_2 \Rightarrow h_1 = h_2$ ↯

Sidoklasserna disjunkta : $s[h] = [g]$

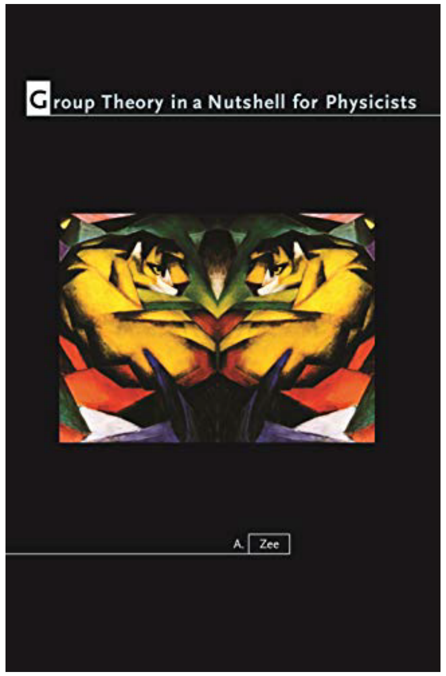
ty ekvivalensklass

\# sidoklasser

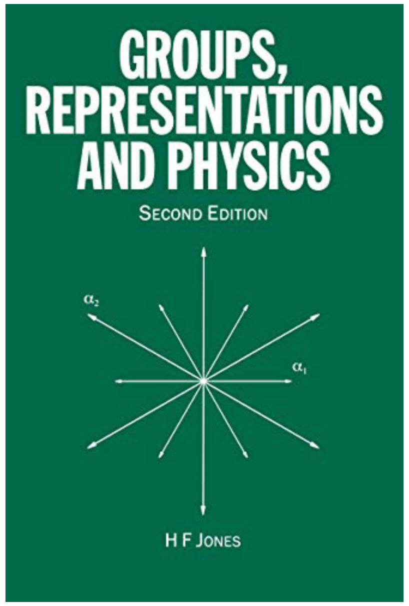
LAGRANGES TEOREM

En grupp av primtalsordning kan inte ha äkta delgrupper

För särskilt intresserade…



A. Zee, Group Theory in a Nutshell for Physicists, sec. 1.1, 1.2



H. F. Jones, Groups, Representations and Physics, chapt. 1, 2