

Patologiska funktioner

(Funktioner som på något vis inte beter sig väl)

Till 1872: Alla kontinuerliga funktioner är deriverbara överallt utom i ett visst antal diskreta punkter

1872: Weierstrass skapade Weierstrassfunktionen som är

- överallt kontinuerlig
- inte deriverbar någonstans

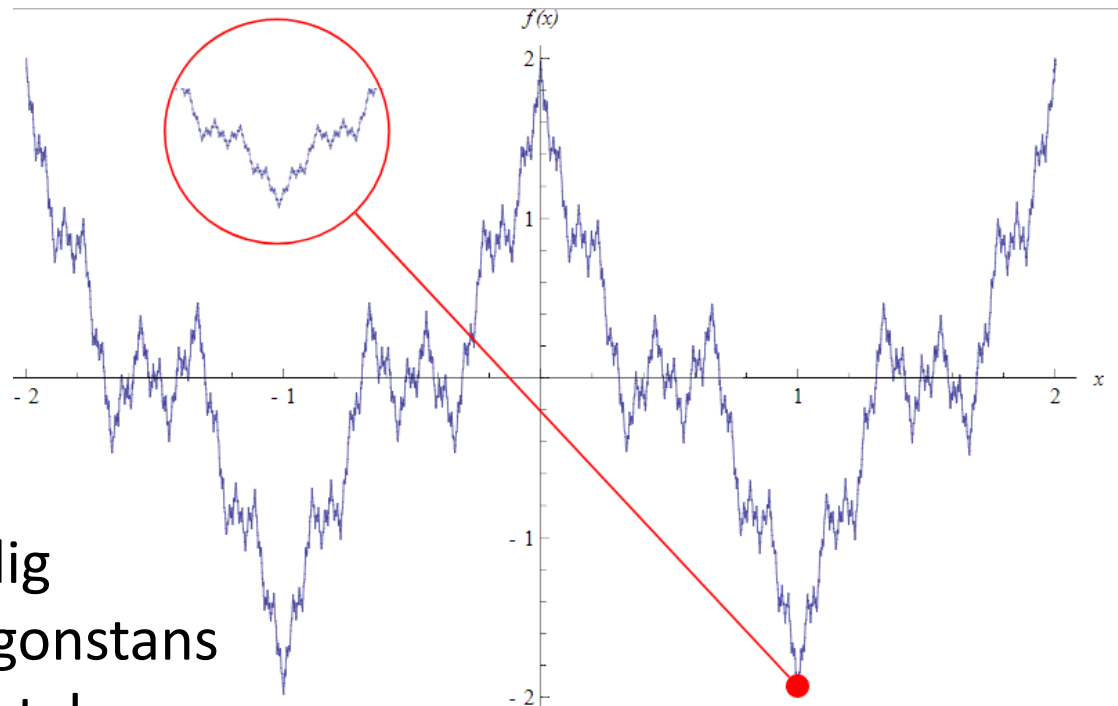
$$W(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x)$$

där $0 < a < 1$, $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$ och b är ett udda heltal större än 1

Weierstrass funktion

$$W(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x)$$

där $0 < a < 1$, $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$ och b är ett udda heltal större än 1



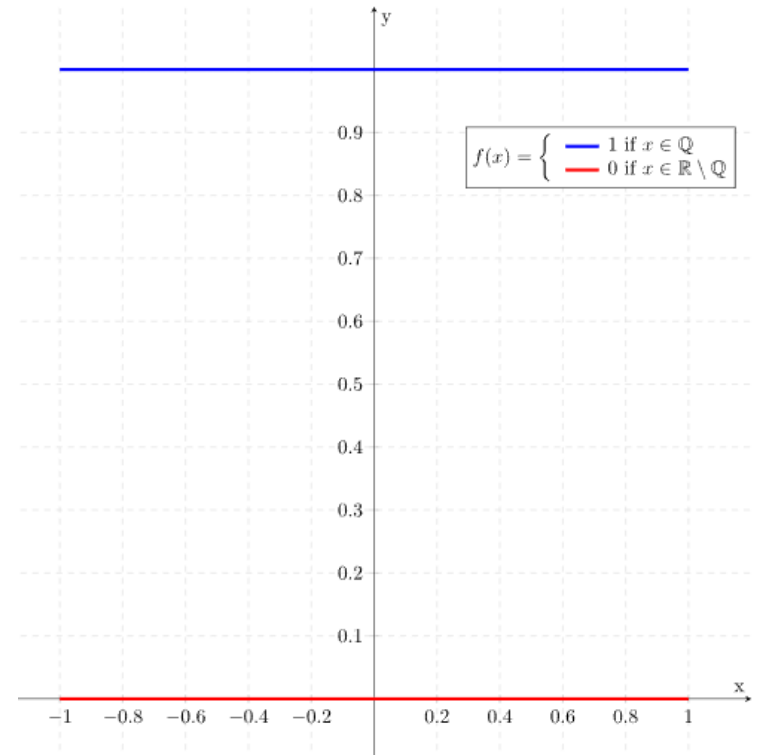
- Överallt kontinuerlig
- Inte deriverbar någonstans
- En av de första fraktalerna

Finns en funktion som inte är kontinuerlig någonstans?

Dirichletfunktionen

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } x \text{ rationell} \\ 0 & \text{om } x \text{ irrationell} \end{cases}$$

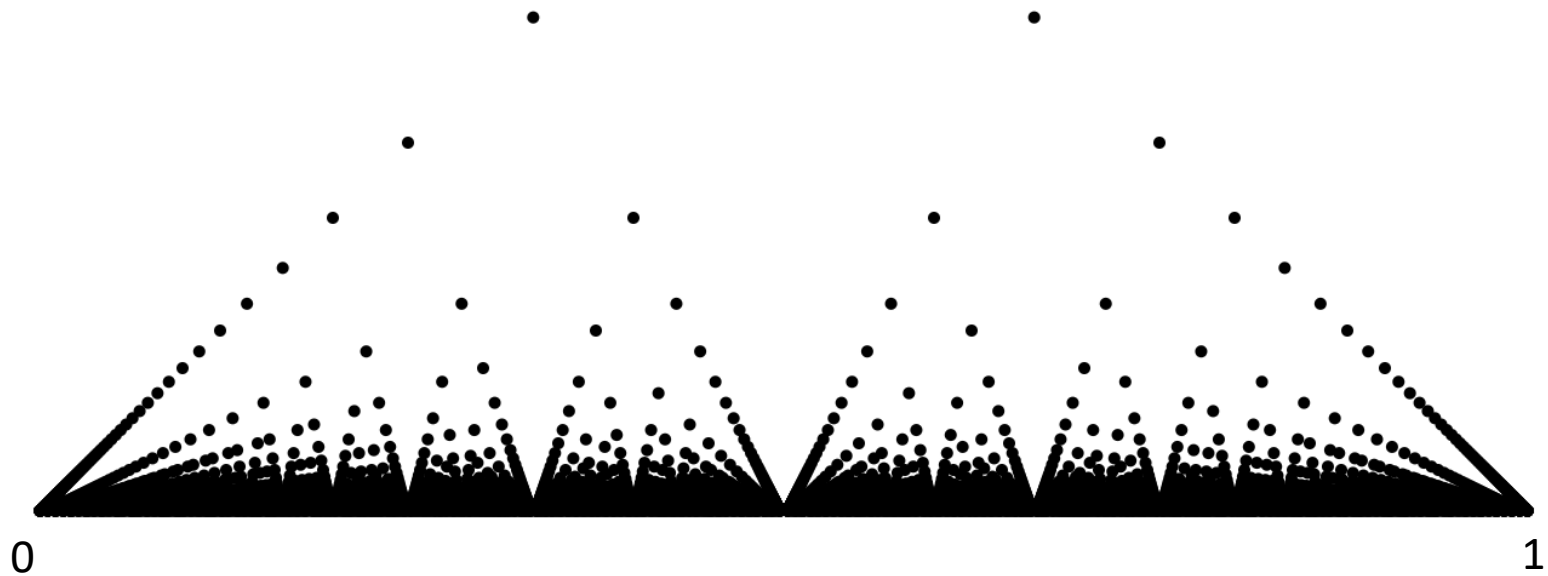
- Inte kontinuerlig någonstans
- Inte deriverbar någonstans
- Lebesgueintegrerbar, men inte Riemannintegrerbar



Thomaes funktion

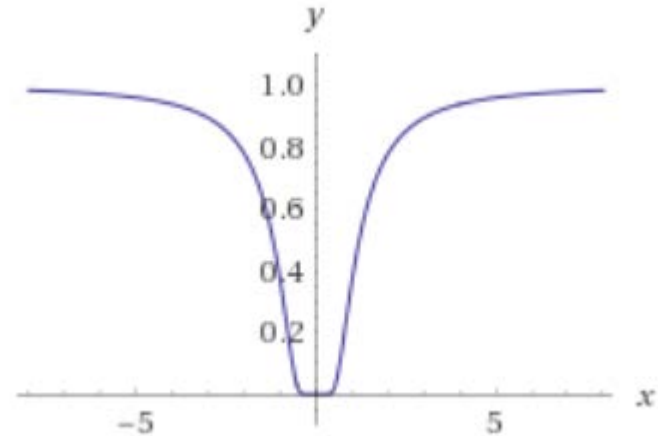
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{om } x = \frac{p}{q}, \\ 0 & \text{i annat fall.} \end{cases}, \text{ d\u00e4r } p \text{ och } q \text{ \u00e4r heltal och br\u00e5ket } p/q \text{ \u00e4r f\u00f6rkortat s\u00e5 mycket som m\u00f6jligt.}$$

- Inte kontinuerlig f\u00f6r x rationell
- Lebesgueintegrerbar och Riemannintegrerbar



Cauchy's patologiska funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



1. $f(x)$ är kontinuerlig 😊
2. $f(x)$ är oändligt deriverbar 😊
3. Maclaurinserien (Taylor i 0) för $f(x)$ är ändå konstig ☹️



Gammal tenta-uppgift och räkneövningen idag

FI31 Matematisk fysik Övningsräkning "Cauchy's patologiska funktion"

Cauchy's patologiska funktion: (gammel tentamensoppgift)

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

"Patologisk" funktion = funktion som på något vis inte beter sig väl
(konstigt / kontraintuitivt)

Varför är $f(x)$ patologisk?

- 1) $f(x)$ är kontinuerlig $\parallel$
- 2) $f(x)$ är oändligt deriverbar $\parallel$
- 3) Maclaurinserien for $f(x)$ är ändå konstig. $\parallel$
 $\hookrightarrow$ Taylor i 0 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

1. Kontinuitet

En funktion är kontinuerlig i $x=a$ om

$$\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = g(a)$$

• For $x \neq 0$: f är en sammansætning av kontinuerlige funktioner for alle $x \neq 0$
 $\Rightarrow$ kontinuerlig for $x \neq 0$ $\hookleftarrow e^x$ & $\frac{1}{x^2}$

• Måste bare titta på $x=0$:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x^2}} &= \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} \right\} \\ &\uparrow \\ &f \text{ kontinuerlig på } (0, \infty) \end{aligned}$$

• For varje $B > 0$ kan vi vælge $\delta = \frac{1}{\sqrt{B}}$ så att for alle x med $|x-0| < \delta$ $\left(x < \delta \right)$
 $\frac{1}{x^2} > B$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-1/x^2} = e^{-\infty} = 0$$

• jævn funktion: identisk for høgergrænsværdet

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 = f(0) \quad \checkmark$$

$\Rightarrow f$ kontinuerlig for alle $x \in \mathbb{R}$ $\square$

2.) Deriverbarhet

En funktion $g(x)$ är deriverbar i $x=a$ om

$$g'(a) = \lim_{h \rightarrow a} \frac{g(a+h) - g(a-h)}{2h} \quad \text{"central differenskvot"}$$

existerar.

• Igen måste vi bara titta på $x=0$:

$$f''(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(-h)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-1/h^2} - e^{-1/(-h)^2}}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{2h} = \underline{\underline{0}}$$

→ $f(x)$ deriverbar för alla $x \in \mathbb{R}$. $f''(0) = 0$

• Några derivator till i $x=0$:

(utnyttja att $f(0)=0$ & $f(-x) = f(x)$)

$$f^{(2)}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(h) - f''(-h)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h) - 2f(0) + f(-2h)}{(2h)^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cdot f(2h)}{(2h)^2}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-1/4h^2}}{2h^2} \underset{\substack{\uparrow \\ t = \frac{1}{4h^2} \Rightarrow h^2 = \frac{1}{4t}}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t}{e^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2}{e^t} = \underline{\underline{0}}$$

$$f^{(3)}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3h) - 3f(h) + 3f(-h) - f(-3h)}{(2h)^3} = \underline{\underline{0}}$$

$$f^{(4)}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4h) - 4f(2h) + 6f(0) - 4f(-2h) + f(-4h)}{(2h)^4} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2f(4h) - 8f(2h)}{(2h)^4}$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{e^{-1/16h^2}}{8h^4} - \frac{e^{-1/4h^2}}{2h^4} \right) \underset{t = \frac{1}{h^2}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{t^2}{8e^{t/16}} - \frac{t^2}{2e^{t/4}} \right) = \underline{\underline{0}}$$

• i allmänhet:

$$f^{(n)}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(2h)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k f((2h-n)h)$$

kan bevisas med hjälp av induktion

→ man kan övertyga sig att $f^{(n)}(0) = 0$ för alla n

⇒ Maclaurinserien är: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0$

→ utvecklingen stämmer bara för $x=0$ (e^{-1/x^2} är strikt positiv)

Därför är Cauchys patologiska funktion patologiskt:

Även om den är kontinuerlig och oändligt deriverbar, (normaltvis → "snäll")
konvergerar Maclaurinserien bara i en enda punkt.

Varför?!

3.) Komplex tolkning

- Komplex version av Cauchys patologiska funktion:

$$f(z) = e^{-1/z^2} \quad z \in \mathbb{C}$$

Denna funktion är analytisk på $|z| \in (0, \infty)$.

Är singulariteten i $z=0$ borttagbar?

- Undersöker Laurentserien:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{-1/z^2}}{z^{n+1}} dz$$

C : positivt orienterad slutet kurva som passerar runt sing. i origo en gång.

Variabelbytet: $u = \frac{1}{z} \rightarrow dz = \frac{-1}{u^2} du$

C : positivt orienterad $\rightarrow$ negativt orienterad (origo och ∞ byter plats)
 $\hookrightarrow$ vi byter riktning igen: - tecken

$$\Rightarrow c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{-u^2} \cdot u^{n-1} du = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{-u^2}}{u^{1-n}}$$

- positiva $n \Rightarrow c_n = 0$ (integranden är då analytisk)
- $n \leq 0$: integranden har en pol av ordning $|n-1| = 1-n$

$$\rightarrow c_n = \text{Res}_0(e^{-u^2} \cdot u^{n-1})$$

- Beräkna residyn av en funktion $g(z)$ som har en pol av ordning m i $z=0$:

$$\text{Res}_0[g(z)] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z^m \cdot g(z))$$

$$\Rightarrow c_0 = \lim_{u \rightarrow 0} u \cdot \frac{e^{-u^2}}{u} = 1$$

$$c_{-1} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{d}{du} \left[u^2 \frac{e^{-u^2}}{u^2} \right] = \lim_{u \rightarrow 0} (-2ue^{-u^2}) = 0$$

$$\rightarrow \text{när } |n| \text{ är udda: } c_{-n} = 0$$

(induktion...)

$$c_{-2} = -1, \quad c_{-4} = \frac{1}{2}, \quad c_{-6} = \frac{-1}{6}, \quad c_{-8} = \frac{1}{24}$$

$$c_{-2h} = (-1)^h \frac{1}{h!} \quad h=0, 1, 2, \dots$$

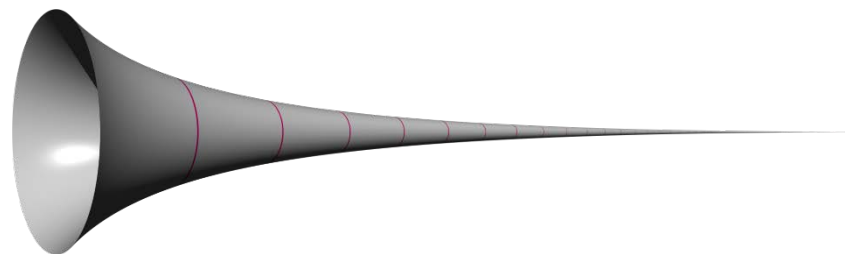
$$\rightarrow \text{Laurentserien för } f(z): e^{-1/z^2} = 1 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2z^4} - \frac{1}{6z^6} + \frac{1}{24z^8} - \dots = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} \left(\frac{-1}{z^2}\right)^h$$

$\Rightarrow$ 1) oändlig många termer med negativa $n \rightarrow$ singulariteten i $z=0$ är essentiell

2) Man kan få Laurentserien genom att ta Maclaurinserien för e^x med $x = \frac{-1}{z^2}$.

Fler patologiska funktioner...

Torricellis trumpet/Gabriels horn



Torricellis trumpet bildas genom att ta grafen för

$$y = \frac{1}{x}$$

med definitionsmängden $x \geq 1$ (för att undvika asymptoten vid $x = 0$) och rotera den i tre dimensioner kring x-axeln.

Volymen:

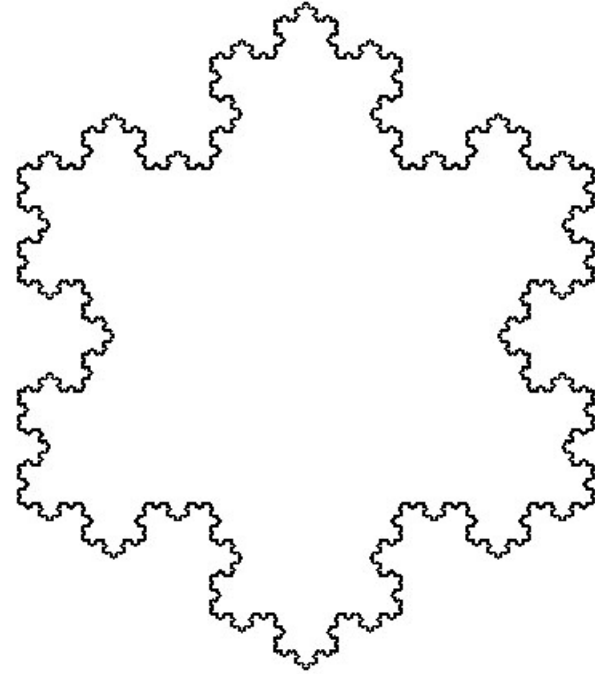
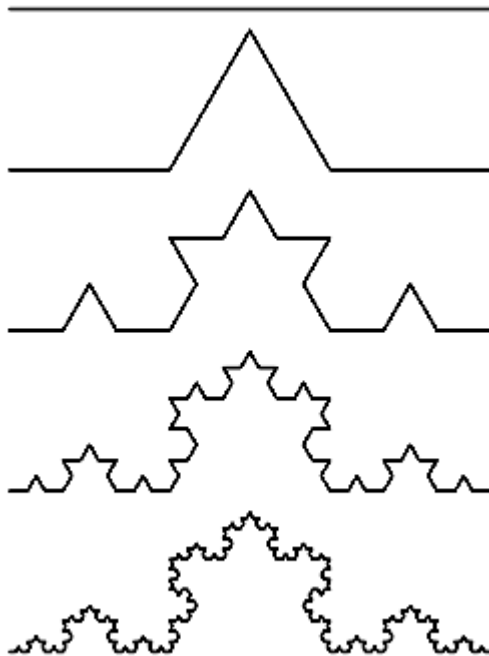
$$V = \pi \int_1^a \frac{1}{x^2} dx = \pi \left(1 - \frac{1}{a} \right) \rightarrow \pi$$

Arean:

$$A = 2\pi \int_1^a \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}}{x} dx > 2\pi \int_1^a \frac{1}{x} dx = 2\pi \ln a \rightarrow \infty$$

Fraktala kurvor

Kochkurvan/Kochs snöflinga



- Överallt kontinuerlig
- Inte deriverbar någonstans

$$\text{Arean: } \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0}{5} \cdot \left(8 - 3 \left(\frac{4}{9} \right)^n \right) = \frac{8}{5} \cdot a_0$$

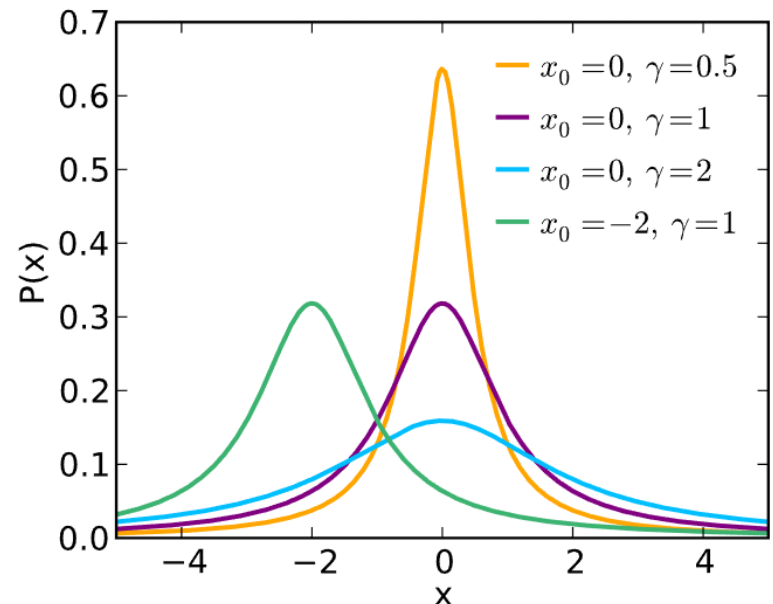
$$\text{Omkretsen: } \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot s \cdot \left(\frac{4}{3} \right)^n = \infty$$

Men...

Finns patologiska funktioner man kan använda för
något?!?

Cauchyfördelningen (Lorentzian)

- Sannolikhetsfördelning inom matematisk statistik
- Används för att beskriva resonansfenomen inom fysik
- Saknar väntevärde och därmed också varians (integralen som beskriver väntevärdet blir odefinierad för Cauchyfördelningen, eftersom täthetsfunktionen inte avtar tillräckligt snabbt långt från origo)



$$f(x; x_0, \gamma) = \frac{1}{\pi\gamma \left[1 + \left(\frac{x-x_0}{\gamma} \right)^2 \right]}$$

Cauchyfördelningen (Lorentzian)

