Greenfunktioner som responsfunktioner

$$\phi(\vec{r}) = \int d\vec{r}'\, G(\vec{r}-\vec{r}')\left(-\rho(\vec{r}')\right) = \int d\vec{r}'\, \frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}\rho(\vec{r}')$$

RESPONS ("OUTPUT")

RESPONS FUNKTION (GREENFUNKTION)

STÖRNING ("INPUT")

"linjär responsteori"

FYSIK JARGONG

$$\chi_i(\vec{r},t) = \int d\vec{r}'\,dt'\, \chi_{ij}(\vec{r},t;\vec{r}',t')\, F_j(\vec{r}',t')$$

RESPONS

RESPONS FUNKTION

SUMMERA REPETERADE INDEX

STÖRNING

Greenfunktioner som responsfunktioner

FYSIK JARGONG

$$X_i(\vec{r},t) = \int d\vec{r}\,' dt'\, \chi_{ij}(\vec{r},t;\vec{r}\,',t')\, F_j(\vec{r}\,',t')$$

RESPONS

RESPONS FUNKTION

SUMMERA REPETERADE INDEX

STÖRNING

några exempel från klassisk fysik:

	X_i	χ_{ij}	F_j
TERMODYNAMIK	u		T
	μ_i		B_j
	V		p

Greenfunktioner som responsfunktioner

FYSIK JARGONG

$$X_i(\vec{r},t) = \int d\vec{r}\,' dt' \, \chi_{ij}(\vec{r},t;\vec{r}\,',t') \, F_j(\vec{r}\,',t')$$

RESPONS

RESPONS FUNKTION

SUMMERA REPETERADE INDEX

STÖRNING

några exempel från klassisk fysik:

	X_i	χ_{ij}	F_j
TERMODYNAMIK	u	c	T
	M_i	χ_{ij}	B_j
	V	κ	P

Greenfunktioner som responsfunktioner

FYSIK JARGONG

$$X_i(\vec{r},t) = \int d\vec{r}\,' dt'\, \chi_{ij}(\vec{r},t;\vec{r}\,',t')\, F_j(\vec{r}\,',t')$$

RESPONS

RESPONS FUNKTION

SUMMERA REPETERANDE INDEX

STÖRNING

några exempel från klassisk fysik:

	X_i	χ_{ij}	F_j
TERMODYNAMIK	u	c	T
	M_i	χ_{ij}	B_j
	V	κ	P
ELLÄRA	I_i		V_j
	I_T		ΔT

Greenfunktioner som responsfunktioner

FYSIK JARGONG

$$\underbrace{X_i(\vec{r},t)}_{\text{RESPONS}} = \int d\vec{r}\,' dt' \underbrace{\chi_{ij}}_{\text{RESPONS FUNKTION}} \underbrace{(\vec{r},t;\vec{r}\,',t') F_j}_{\text{SUMMERA REPETERANDE INDEX}} \underbrace{(\vec{r}\,',t')}_{\text{STÖRNING}}$$

några exempel från klassisk fysik:

	X_i	χ_{ij}	F_j
TERMODYNAMIK	u	c	T
	M_i	χ_{ij}	B_j
	V	κ	P
ELLÄRA	I_i	g_{ij}	V_j
	I_T	g_T	ΔT

Viktigt att kunna konstruera Greenfunktioner!

Standardmetod: Fouriertransform

Viktigt att kunna konstruera Greenfunktioner!

Standardmetod: Fouriertransform

Men… vi har ett problem!

exempel: driven harmonisk oscillator

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = F(t) \qquad (1)$$

DIFF-OPERATOR $\hat{L}_t = \frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2$

TRANSLATIONSINVARIANS

$$\Downarrow \qquad G(t,t') = G(t-t') \underset{t'=0}{=} G(t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} G(t) + \omega_0^2 G(t) = \delta(t) \qquad (2)$$

FOURIERTRANSFORMERA !

$$\left\{ \begin{array}{l} G(t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \, e^{i\omega t} G(\omega) \\ \\ \delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \, e^{i\omega t} \cdot 1 \end{array} \right. \qquad (3)$$

$$(2) \,\&\, (3) \Rightarrow (-\omega^2 + \omega_0^2) G(\omega) = 1 \Rightarrow G(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\Rightarrow G(t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \, e^{i\omega t} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

exempel: driven harmonisk oscillator

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = F(t) \qquad (1)$$

DIFF-OPERATOR $L_t = \frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2$

TRANSLATIONSINVARIANS

$$\Downarrow \qquad G(t,t') = G(t-t') \underset{t'=0}{=} G(t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} G(t) + \omega_0^2 G(t) = \delta(t) \qquad (2)$$

FOURIERTRANSFORMERA!

$$\begin{cases} G(t) = \frac{1}{2\pi}\int d\omega\, e^{i\omega t} G(\omega) \\ \delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int d\omega\, e^{i\omega t} \end{cases}$$

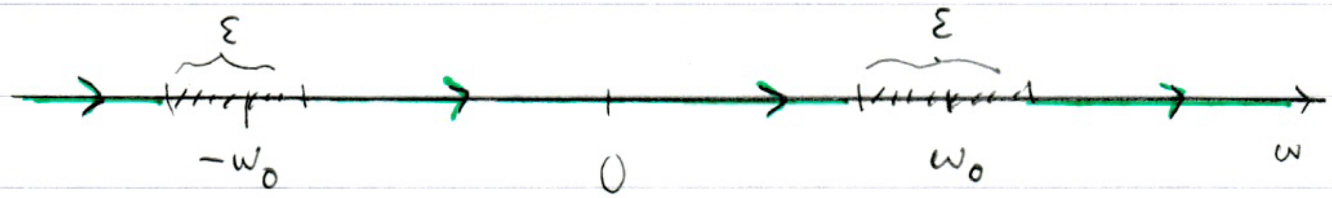
(2) & (3) : $\quad G(\omega) = 1 \Rightarrow G(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$

$$G(t) = \frac{1}{2\pi}\int d\omega\, e^{i\omega t} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

POLER VID $\omega = \pm\omega_0$! TYPFALL ! VI MÅSTE DEFINIERA INTEGRALEN!

Möjliga definitioner:

I.

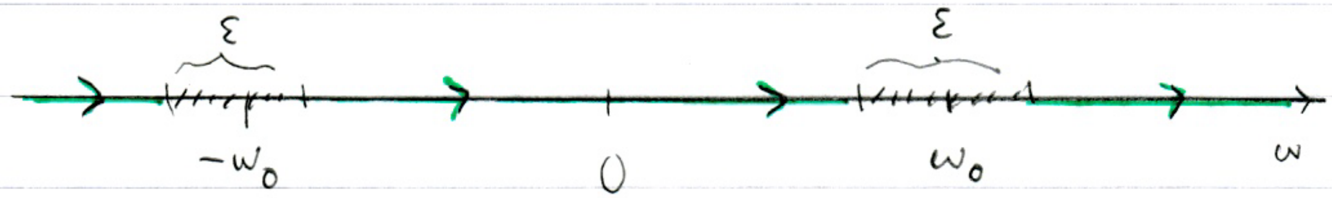


$$\int \ldots \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\omega_0-\varepsilon} \ldots + \int_{-\omega_0+\varepsilon}^{\omega_0-\varepsilon} \ldots + \int_{\omega_0+\varepsilon}^{\infty} \right)$$

"CAUCHYS PRINCIPAL VÄRDE"

Möjliga definitioner:

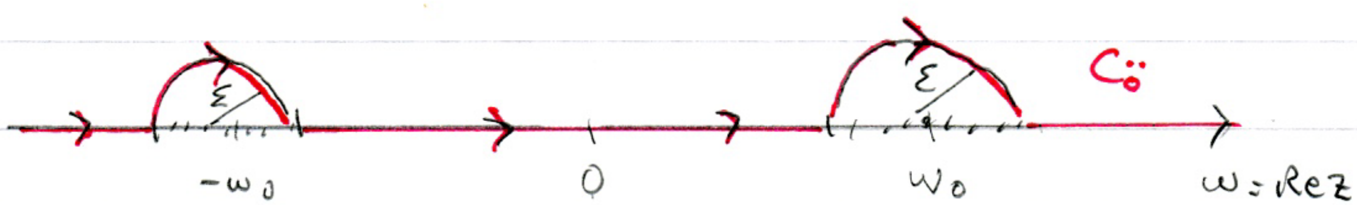
I.



$$\int \ldots \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\omega_0 - \varepsilon} \ldots + \int_{-\omega_0 + \varepsilon}^{\omega_0 - \varepsilon} \ldots + \int_{\omega_0 + \varepsilon}^{\infty} \right)$$

"CAUCHYS PRINCIPAL VÄRDE"

II.

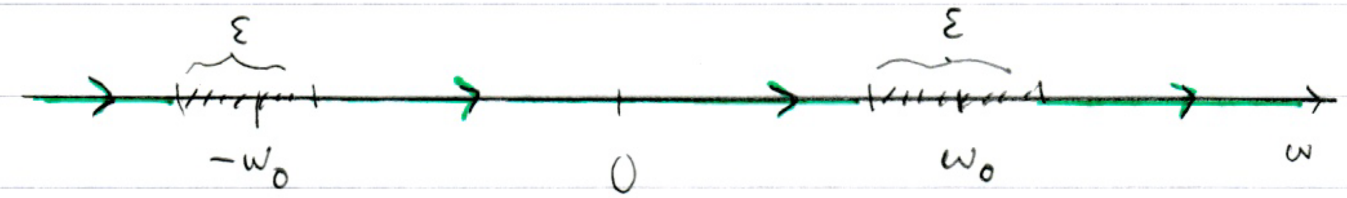


KOMPLEXIFIERA ω ("ANALYTISK FORTSÄTTNING" $\omega \to z$)

$$\int \ldots \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_\varepsilon} \ldots$$

Möjliga definitioner:

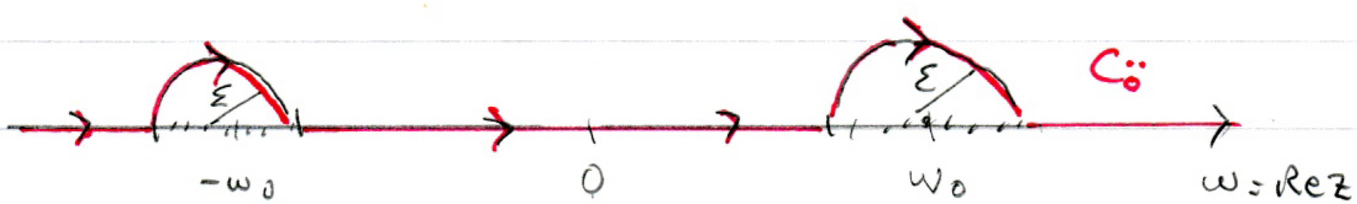
I.



$$\int \ldots \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\omega_0-\varepsilon} \ldots + \int_{-\omega_0+\varepsilon}^{\omega_0-\varepsilon} \ldots + \int_{\omega_0+\varepsilon}^{\infty} \right)$$

"CAUCHYS PRINCIPAL VÄRDE"

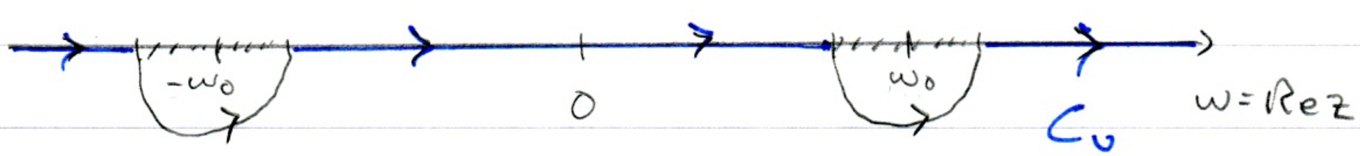
II.



KOMPLEXIFIERA ω ("ANALYTISK FORTSÄTTNING" ω → z)

$$\int \ldots \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_{ö}} \ldots$$

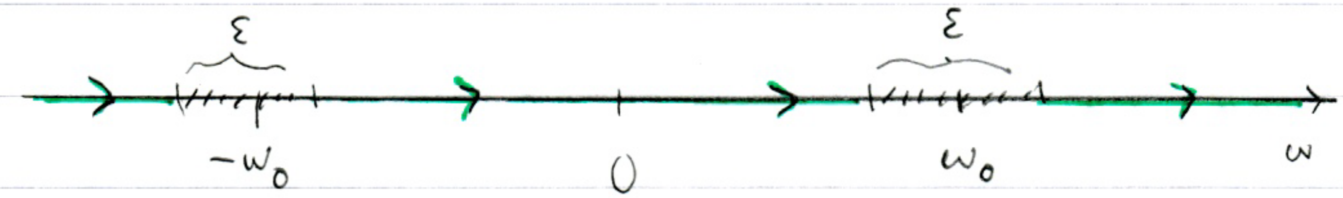
III.



$$\int \ldots = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_u} \ldots$$

Möjliga definitioner:

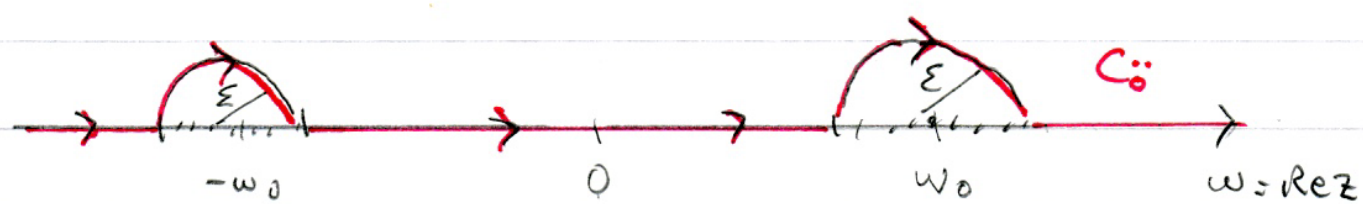
I.



$$\int \ldots \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\omega_0-\varepsilon} \ldots + \int_{-\omega_0+\varepsilon}^{\omega_0-\varepsilon} \ldots + \int_{\omega_0+\varepsilon}^{\infty} \right)$$

"CAUCHYS PRINCIPAL VÄRDE"

II.

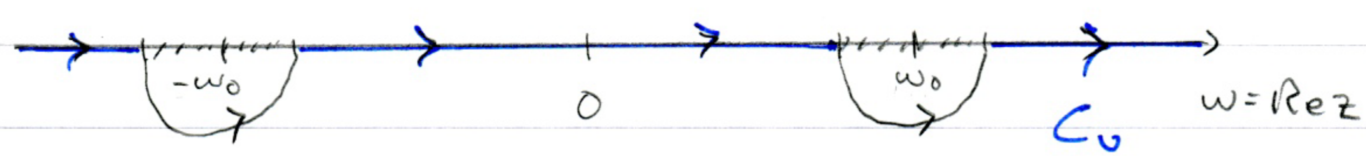


KOMPLEXIFIERA ω ("ANALYTISK FORTSÄTTNING" $\omega \to z$)

$$\int \ldots \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_{ö}} \ldots$$

Fortfarande problem!
I, II, III ger olika resultat!!!

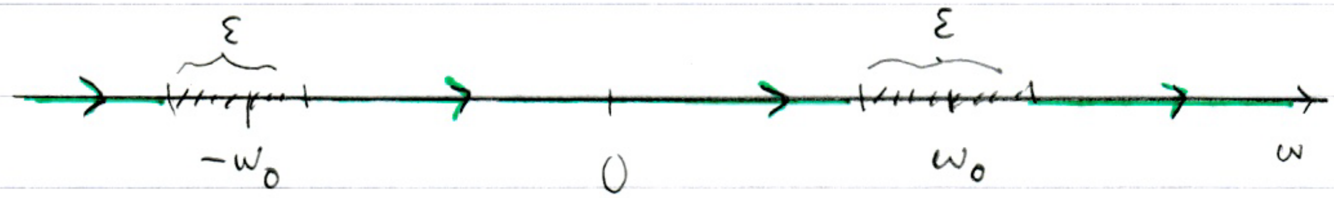
III.



$$\int \ldots = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_u} \ldots$$

Möjliga definitioner:

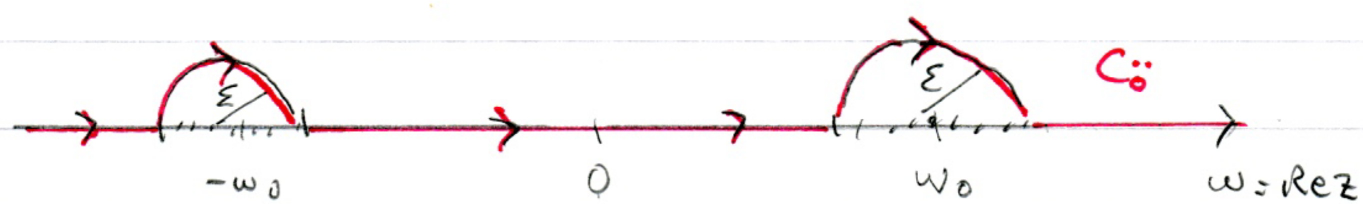
I.



$$\int \ldots \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\omega_0-\varepsilon} \ldots + \int_{-\omega_0+\varepsilon}^{\omega_0-\varepsilon} \ldots + \int_{\omega_0+\varepsilon}^{\infty} \right)$$

"CAUCHYS PRINCIPAL VÄRDE"

II.

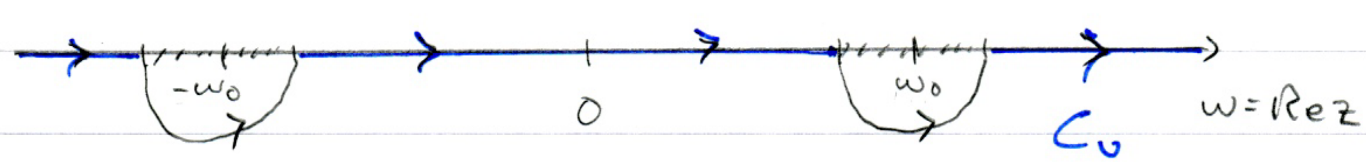


KOMPLEXIFIERA ω ("ANALYTISK FORTSÄTTNING" ω → z)

$$\int \ldots \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_\cap} \ldots$$

Fortfarande problem!
I, II, III ger olika resultat!!!

III.



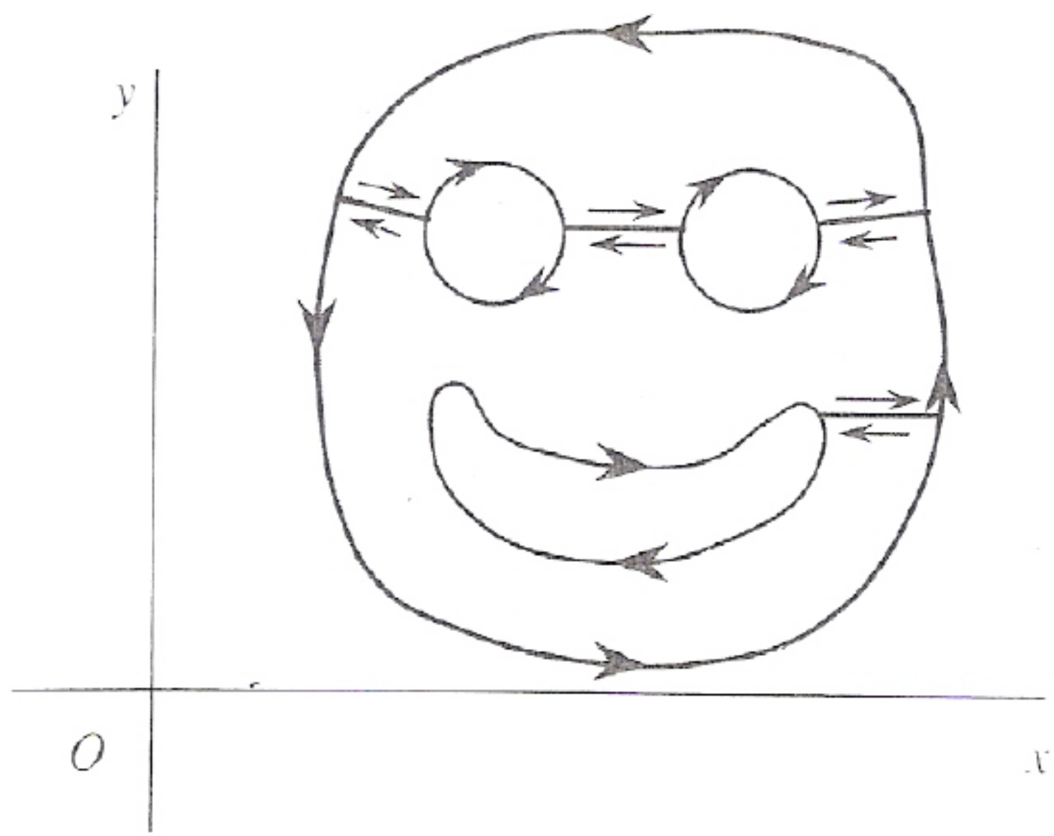
$$\int \ldots = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_\cup} \ldots$$

Bara en av definitionerna ger fysikaliskt meningsfulla resultat.
För att förstå vilken definition som är den "rätta", så behöver vi först repetera litet komplex analys, särskilt residykalkyl...

En paus från Greenfunktioner...

Residykalkyl:

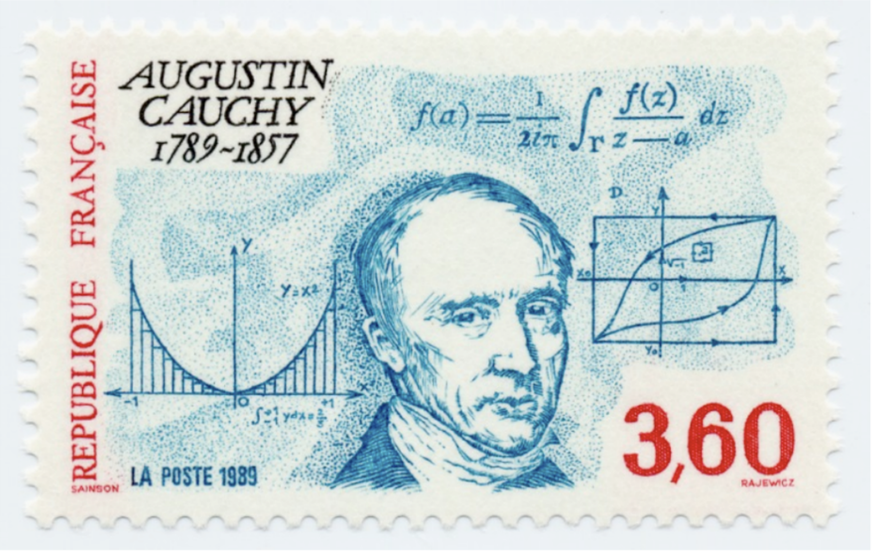
Eleganta räkningar av förskräckliga integraler



Cauchys integralformel

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

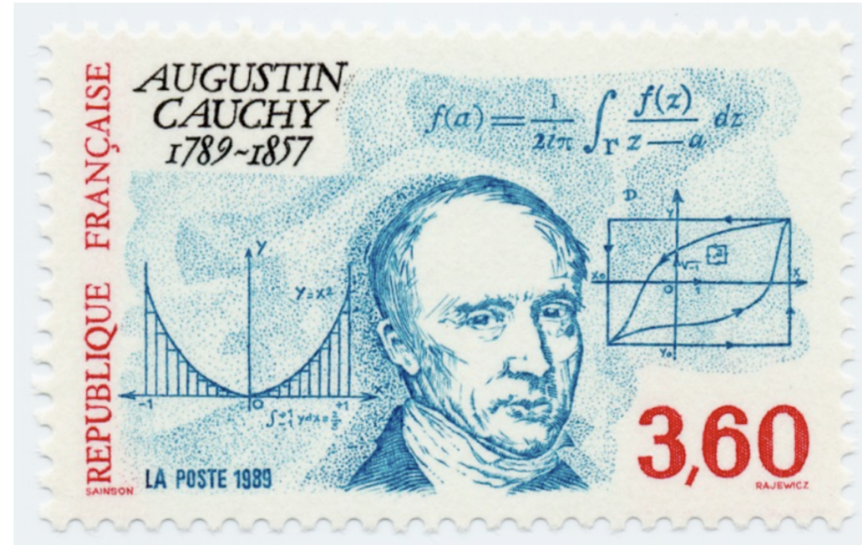
f analytisk på och innanför C (inneslutande z_0)



Cauchys integralformel

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$$

f analytisk på och innanför C (inneslutande z_0)



Analogi: Laplaces ekvation + randvärdesvillkor bestämmer unikt en elektrostatisk potential

Märkligt resultat! Kan man funktionens värde på kurvan entydigt bestämma funktionens värden innanför?

CAUCHY-RIEMANN: $f(z) = u(z) + iv(z)$ ANALYTISK

$z = x + iy$

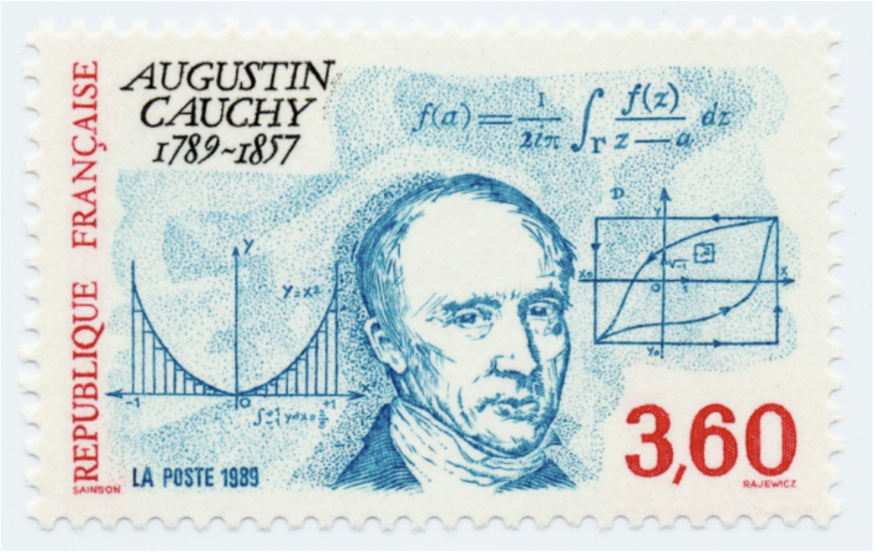
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{\nabla^2 u} = \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}_{\nabla^2 v} = 0$$

$\Rightarrow u, v$ HARMONISKA. ENTYDIGT BESTÄMDA AV RANDVILLKORET.

Cauchys integralformel

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

f analytisk på och innanför C (inneslutande z_0)



Analogi: Laplaces ekvation + randvärdesvillkor bestämmer unikt en elektrostatisk potential

Laurentserie

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

f analytisk på en ring $\rho_1 < |z - z_0| < \rho_2$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

$$a_{-1} = \mathrm{Res}(f(z_0))$$

Singulariteter

"Borttagbara" singulariteter $$f(z) = \frac{4z^2 - 1}{2z + 1}$$ (exempel)

Essentiella singulariteter $$f(z) = e^{1/z}$$ (exempel)

oändligt många Laurenttermer med n<0

Pol av ordning **m**

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \ldots + \frac{a_{-\mathbf{m}}}{(z - z_0)^{\mathbf{m}}}$$

$$a_{-1} = \mathrm{Res}(f(z_0)) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m f(z))$$

Singulariteter

"Borttagbara" singulariteter $$f(z) = \frac{4z^2-1}{2z+1}$$ (exempel)

Essentiella singulariteter $$f(z) = e^{1/z}$$ (exempel)

oändligt många Laurenttermer med n<0

En riktigt otäck funktion:
när z—> 0 så kommer f(z) att
passera godtyckligt nära **alla** komplexa tal!

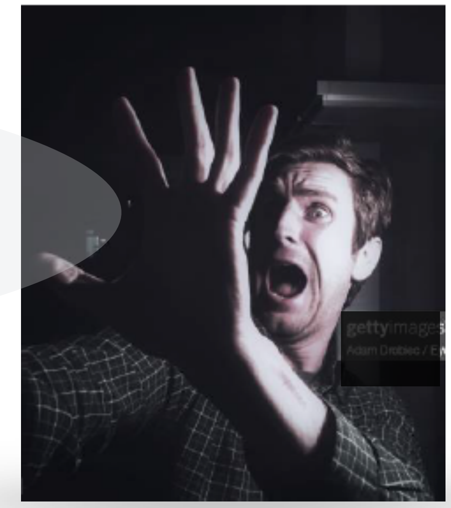
Pol av ordning **m** $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \ldots + \frac{a_{-\mathbf{m}}}{(z-z_0)^{\mathbf{m}}}$$

$$a_{-1} = \mathrm{Res}(f(z_0)) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}((z-z_0)^m f(z))$$

EX $f(z) = e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}$

$$= \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{1}{(-n)!} z^n = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{1}{(-n)!} (z - \underbrace{0}_{=z_0})^n$$

HEMSK! När $z \to 0$ så kommer $f(z)$ godtyckligt nära alla komplex tal!



$z \to 0$. VÄLJ $\lambda \in \mathbb{C}$ GODTYCKLIGT. VISA ATT $f(z) \approx \lambda$

DEFINIERA $z_n = \frac{1}{\ln\lambda + 2n\pi i} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow n \to \infty$: $z_n \to z \to 0$ DVS. $z \approx z_n$ FÖR STORA n.

$$f(z) \overset{n\to\infty}{\approx} f(z_n) = e^{1/z_n} = e^{\ln\lambda + 2n\pi i} = e^{\ln\lambda} = \lambda$$

<u>EX</u> $f(z) = e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}$

$$= \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{1}{(-n)!} z^n = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{1}{(-n)!} (z - \underbrace{0}_{=z_0})^n$$

När $z \to 0$ så kommer $f(z)$ godtyckligt nära <u>alla</u> komplex tal!

FYSIKTILLÄMPNING (KOSTERLITZ-THOULESS FASÖVERGÅNG)

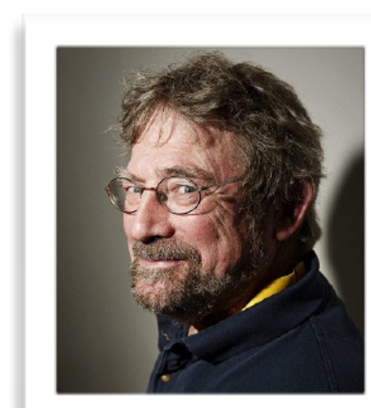
He^3, 2D supraledare, ...

$$F/V = (U + TS)/V = f = f_{reg} + f_{sing}$$

$$f_{sing} \sim konst \cdot e^{konst/\sqrt{T - T_c}}$$

Nobelpris 2016

David Thouless



Michael Kosterlitz

Singulariteter

"Borttagbara" singulariteter $$f(z) = \frac{4z^2 - 1}{2z + 1}$$ (exempel)

Essentiella singulariteter $$f(z) = e^{1/z}$$ (exempel)

oändligt många Laurenttermer med n<0

Pol av ordning **m** $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \ldots + \frac{a_{-\mathbf{m}}}{(z - z_0)^{\mathbf{m}}}$$

$$a_{-1} = \mathrm{Res}(f(z_0)) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m f(z))$$

Singulariteter

"Borttagbara" singulariteter

$$f(z) = \frac{4z^2-1}{2z+1} \quad \text{(exempel)}$$

Essentiella singulariteter

$$f(z) = e^{1/z} \quad \text{(exempel)}$$

oändligt många Laurenttermer med n<0

Pol av ordning **m**

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + ... + \frac{a_{-\mathbf{m}}}{(z-z_0)^{\mathbf{m}}}$$

$$a_{-1} = \mathrm{Res}(f(z_0)) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z-z_0)^m f(z))$$

Residyteoremet

$$\oint_C f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}\ (f(z_k))$$

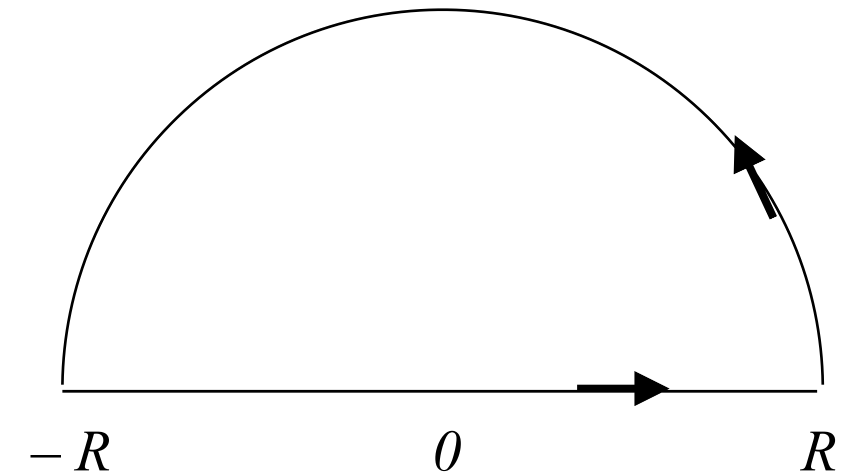
C enkel, positivt orienterad kurva som innesluter de singulära punkterna $z_1, z_2, ...z_k$ till f

Vanligaste tillämpningen av residykalkyl i fysiken:
"komplexifierade" reella integraler

Användbart resultat:

Jordans lemma

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} e^{i\alpha z} f(z)\, dz = 0$$



C_R halvcirkel med radien R i övre komplexa halvplanet

f går likformigt mot 0 snabbare än $1/|z|$ då $|z| \to \infty$

α icke-negativt reellt tal

Enkla typfall av residykalkyl:

I. Integraler av rationella funktioner

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\, dx \quad q(x) \neq 0 \text{ för reella } x$$

II. Integraler av produkter av rationella och trigonometriska funktioner

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \cos(ax)\, dx$$

$q(x) \neq 0$ för reella x, a reell

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \sin(ax)\, dx$$

III. Integraler av trigonometriska funktioner på enhetscirkeln

$$\int_0^{2\pi} F(\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta$$

Enkla typfall av residykalkyl:

I. Integraler av rationella funktioner $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx \quad q(x) \neq 0 \text{ för reella } x$

II. Integraler av produkter av rationella och trigonometriska funktioner $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \cos(ax)\,dx$ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \sin(ax)\,dx$

$q(x) \neq 0 \text{ för reella } x, \quad a \text{ reell}$

III. Integraler av trigonometriska funktioner på enhetscirkeln $\int_0^{2\pi} F(\sin\theta, \cos\theta)\,d\theta$

Låt oss titt på ett exempel

(trigonometriska funktioner på enhetscirkeln,III)

För integraler på enhetscirkeln C i komplexa talplanet, ofta bra att använda:

$$z = e^{i\theta}, \quad \frac{1}{z} = e^{-i\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \quad d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} F(\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta = \oint_C F\left(\frac{z - \frac{1}{z}}{2i}, \frac{z + \frac{1}{z}}{2}\right) \frac{dz}{iz}$$

Låt oss titt på ett exempel

(trigonometriska funktioner på enhetscirkeln,III)

$z = e^{i\theta}$, $\frac{1}{z} = e^{-i\theta}$

$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$, $\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$, $d\theta = \frac{dz}{iz}$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} F(\sin\theta, \cos\theta)\,d\theta = \oint_C F\left(\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}, \frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)\frac{dz}{iz}$$

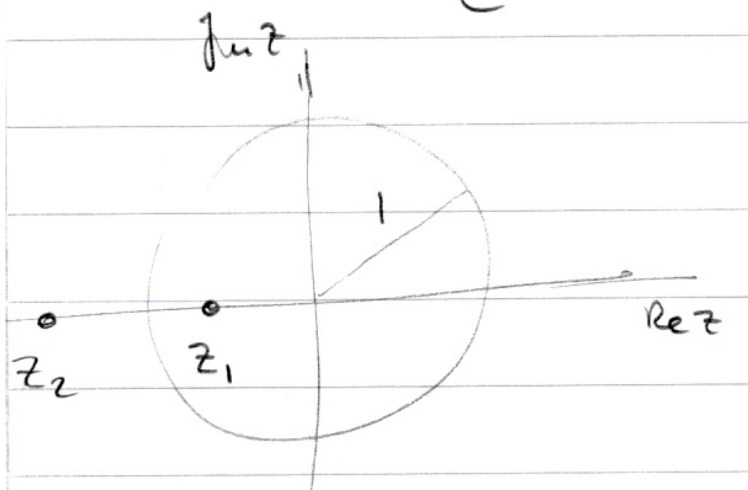
EX

$$I = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2}, \quad a>1 \text{ reell}$$

jämn integrand

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2} = \frac{1}{2}\oint_C \frac{1}{\left(a+\frac{z^2+1}{2z}\right)^2}\frac{dz}{iz}$$

$$= \frac{2}{i}\oint_C \frac{z\,dz}{(z^2+2az+1)^2} = \frac{2}{i}\oint_C \frac{z\,dz}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2}$$



POLER I $z_1 = -a+\sqrt{a^2-1}$

$z_2 = -a-\sqrt{a^2-1}$

AV ORDNING 2

Låt oss titt på ett exempel

(trigonometriska funktioner på enhetscirkeln,III)

$$z = e^{i\theta}, \quad \frac{1}{z} = e^{-i\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \quad d\theta = \frac{dz}{iz}$$

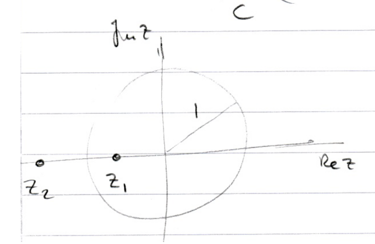
$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} F(\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta = \oint_C F\left(\frac{z - \frac{1}{z}}{2i}, \frac{z + \frac{1}{z}}{2}\right) \frac{dz}{iz}$$

EX $\quad I = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2}, \quad a > 1$ reell

jämn integrand

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2} = \frac{1}{2}\oint_C \frac{1}{\left(a + \frac{z^2+1}{2z}\right)^2} \frac{dz}{iz}$$

$$= \frac{2}{i}\oint_C \frac{z\,dz}{(z^2+2az+1)^2} = \frac{2}{i}\oint_C \frac{z\,dz}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2}$$



poler i $z_1 = -a + \sqrt{a^2-1}$

$z_2 = -a - \sqrt{a^2-1}$

av ordning 2

RESIDYTEOREMET : $\quad I = \frac{2}{i}\cdot 2\pi i \,\mathrm{Res}\left[f(z_1)\right]$

$$= \frac{2}{i} 2\pi i \lim_{z \to z_1} \frac{d}{dz}\left((z-z_1)^2 f(z)\right)$$

$$= \frac{2}{i} 2\pi i \lim_{z \to z_1} \frac{d}{dz}\left(\cancel{(z-z_1)^2} \frac{z}{\cancel{(z-z_1)^2}(z-z_2)^2}\right)$$

$$= \frac{2}{i} 2\pi i \left(\frac{(z_1-z_2)^2 - z_1 \cdot 2(z_1-z_2)}{(z_1-z_2)^4}\right)$$

SÄTT IN z_1, z_2

$$= \frac{\pi a}{(a^2-1)^{3/2}}.$$

Låt oss titt på ett exempel

(trigonometriska funktioner på enhetscirkeln,III)

$$z = e^{i\theta}, \quad \frac{1}{z} = e^{-i\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \quad d\theta = \frac{dz}{iz}$$

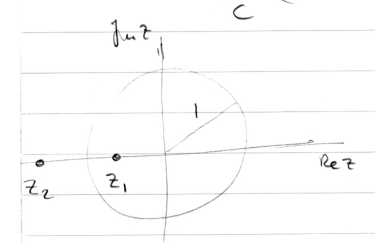
$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} F(\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta = \oint_C F\left(\frac{z - \frac{1}{z}}{2i}, \frac{z + \frac{1}{z}}{2}\right) \frac{dz}{iz}$$

EX $\quad I = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2}, \quad a > 1$ reell

jämn integrand

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2} = \frac{1}{2} \oint_C \frac{1}{\left(a + \frac{z^2+1}{2z}\right)^2} \frac{dz}{iz}$$

$$= \frac{2}{i} \oint_C \frac{z\, dz}{(z^2+2az+1)^2} = \frac{2}{i} \oint_C \frac{z\, dz}{(z-z_1)^2 (z-z_2)^2}$$



poler i $z_1 = -a + \sqrt{a^2-1}$

$z_2 = -a - \sqrt{a^2-1}$

av ordning 2

RESIDYTEOREMET : $I = \frac{2}{i} \cdot 2\pi i \operatorname{Res}\left[f(z_1)\right]$

$$= \frac{2}{i} 2\pi i \lim_{z \to z_1} \frac{d}{dz}\left((z-z_1)^2 f(z)\right)$$

$$= \frac{2}{i} 2\pi i \lim_{z \to z_1} \frac{d}{dz}\left(\cancel{(z-z_1)^2} \frac{z}{\cancel{(z-z_1)^2}(z-z_2)^2}\right)$$

$$= \frac{2}{i} 2\pi i \left(\frac{(z_1-z_2)^2 - z_1 \cdot 2(z_1-z_2)}{(z_1-z_2)^4}\right)$$

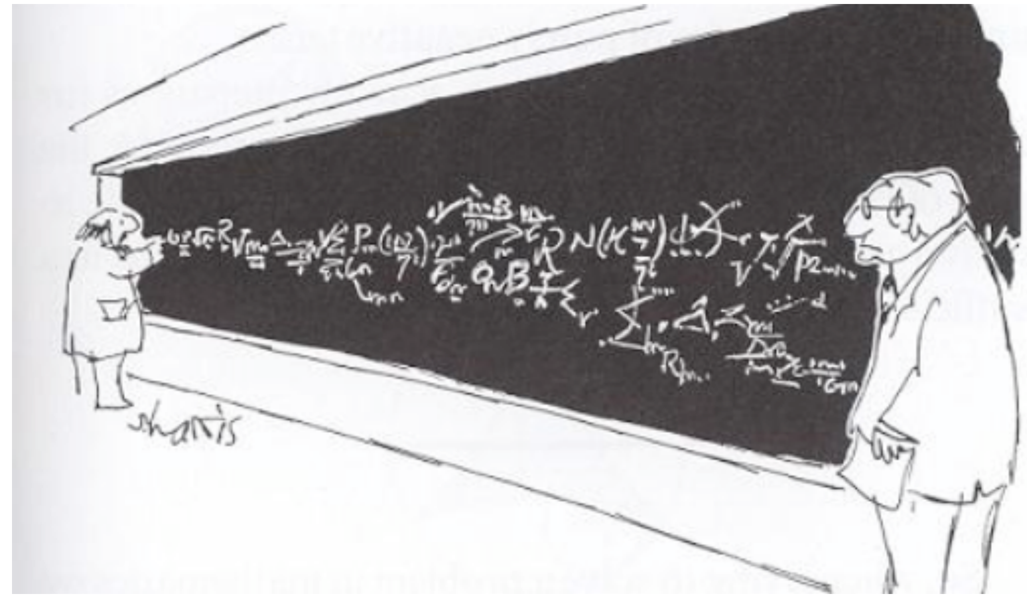
sätt in z_1, z_2

$$= \frac{\pi a}{(a^2-1)^{3/2}}.$$

Dåliga nyheter:
Många (de flesta?) integraler i fysiken faller inte i någon av klasserna I, II, III.

Ofta i fysiken....

Förskräckliga integraler!



...kan fortfarande lösas elegant
med fiffig användning av residykalkyl!

Välj en smart kurva!

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax-bx^2}\,dx \qquad a, b \in \mathbb{R},\ b > 0$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+1}$$

föreläsning 5/11 (III)

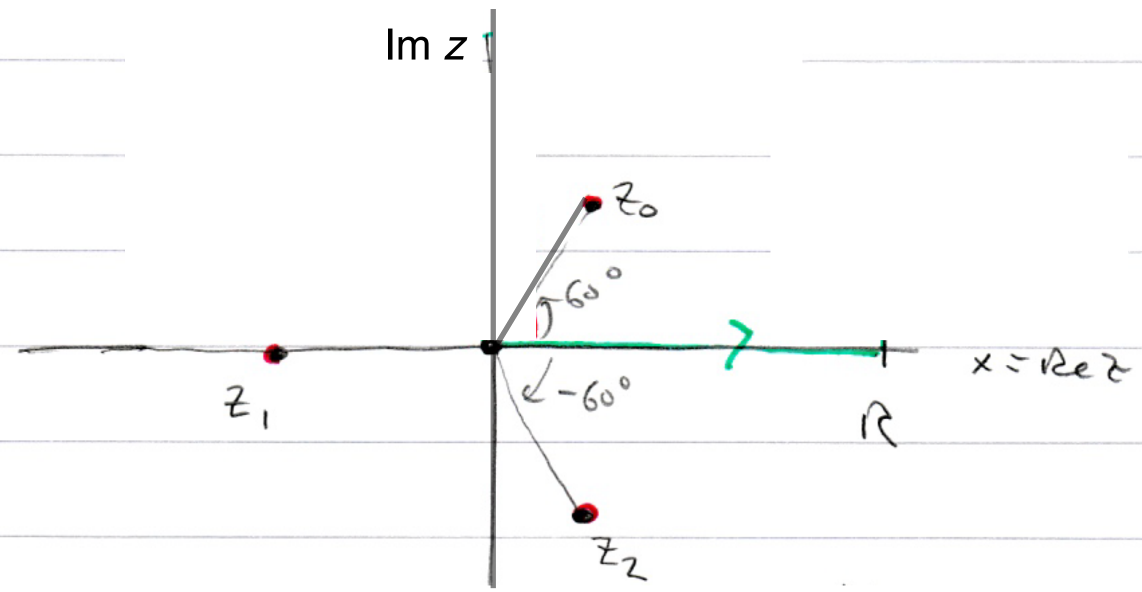
$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1}$$

EX $\quad I = \int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1} = \lim_{R\to\infty} \underbrace{\int_0^R \frac{dx}{x^3+1}}_{I_R}$

KOMPLEXIFIERA INTEGRANDEN : $x \to z$

$\frac{1}{z^3+1}$ HAR ENKLA POLER VID $z^3 = -1$ DVS $z = z_n = e^{i(2n+1)\pi/3}$

$n = 0, 1, 2$



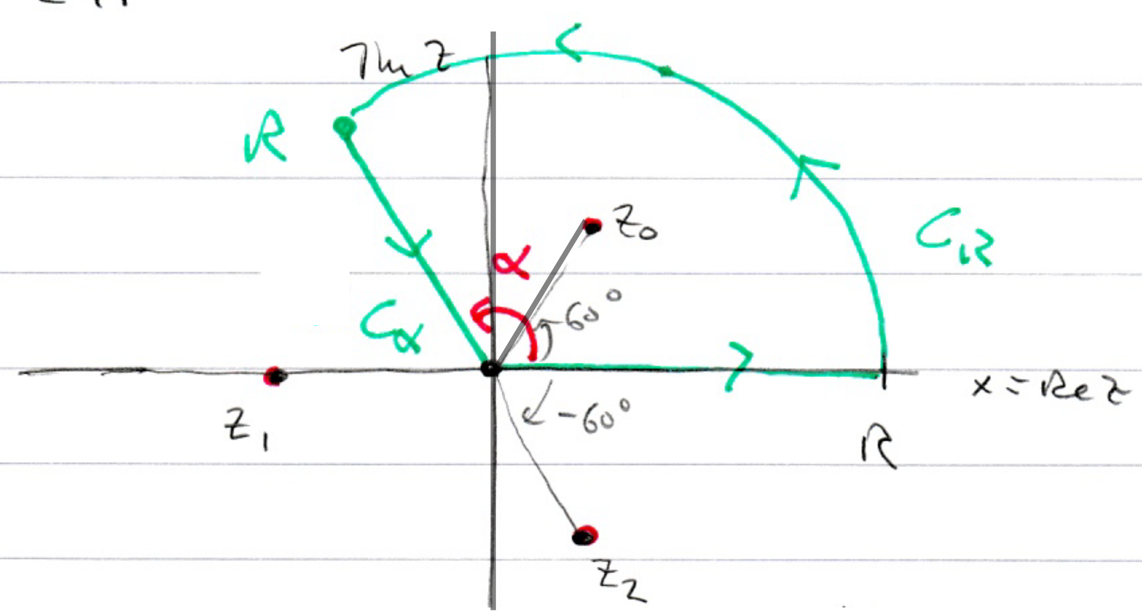
$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1}$$

EX $I = \int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1} = \lim_{R\to\infty} \underbrace{\int_0^R \frac{dx}{x^3+1}}_{I_R}$

KOMPLEXIFIERA INTEGRANDEN : $x \to z$

$\frac{1}{z^3+1}$ HAR ENKLA POLER VID $z^3 = -1$ DVS $z = z_n = e^{i(2n+1)\pi/3}$

$n = 0, 1, 2$



$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1}$$

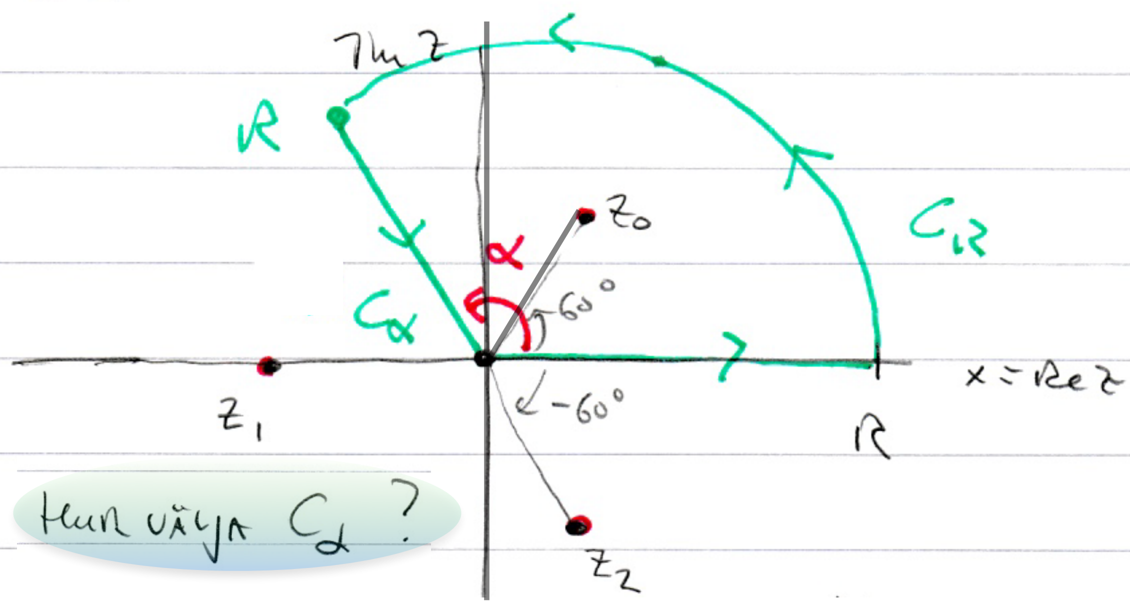
EX

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1} = \lim_{R\to\infty} \underbrace{\int_0^R \frac{dx}{x^3+1}}_{I_R}$$

KOMPLEXIFIERA INTEGRANDEN : $x \to z$

$\frac{1}{z^3+1}$ HAR ENKLA POLER VID $z^3 = -1$ DVS $z = z_n = e^{i(2n+1)\pi/3}$

$n = 0, 1, 2$



Hur välja C_α ?

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1}$$

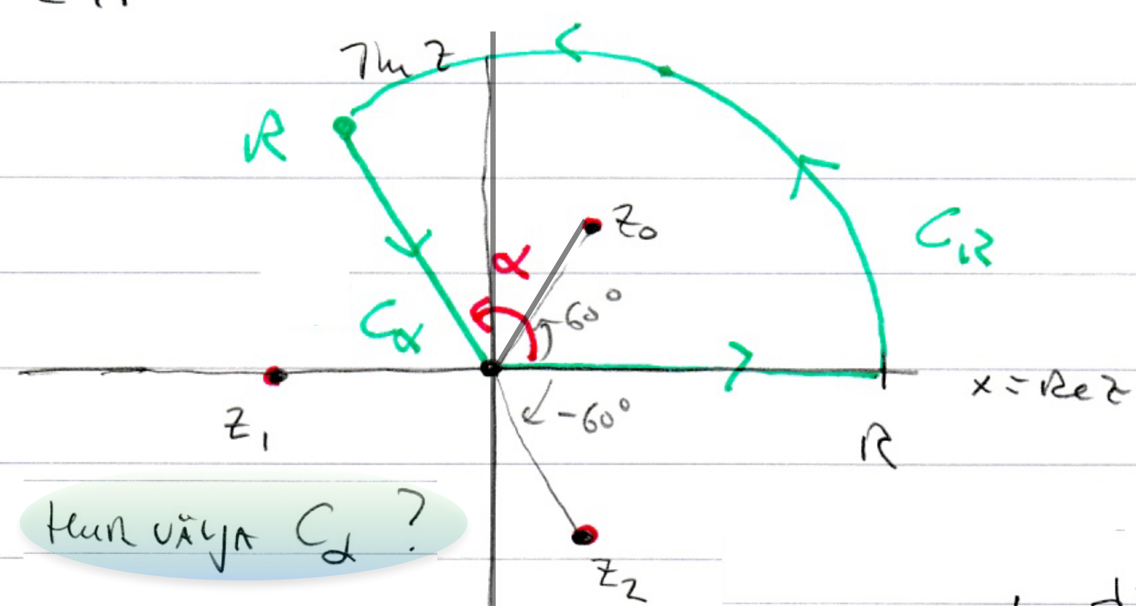
EX

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1} = \lim_{R\to\infty} \underbrace{\int_0^R \frac{dx}{x^3+1}}_{I_R}$$

KOMPLEXIFIERA INTEGRANDEN: $x \to z$

$\frac{1}{z^3+1}$ HAR ENKLA POLER VID $z^3 = -1$ DVS $z = z_n = e^{i(2n+1)\pi/3}$

$n = 0, 1, 2$



$$I_R + \underbrace{\int_{C_R} \frac{dz}{z^3+1}}_{\to 0 \text{ DÅ } R\to\infty} + \int_{C_\alpha} \frac{dz}{z^3+1} = 2\pi i \,\mathrm{Res}\left[f(z_0)\right]$$

$$\int_{C_\alpha} \frac{dz}{z^3+1} = \left\{ z = re^{i\alpha},\ \frac{dz}{dr} = e^{i\alpha} \right\} = \int_R^0 \frac{e^{i\alpha}\,dr}{(re^{i\alpha})^3+1}$$

PARAMETRISERA C_α

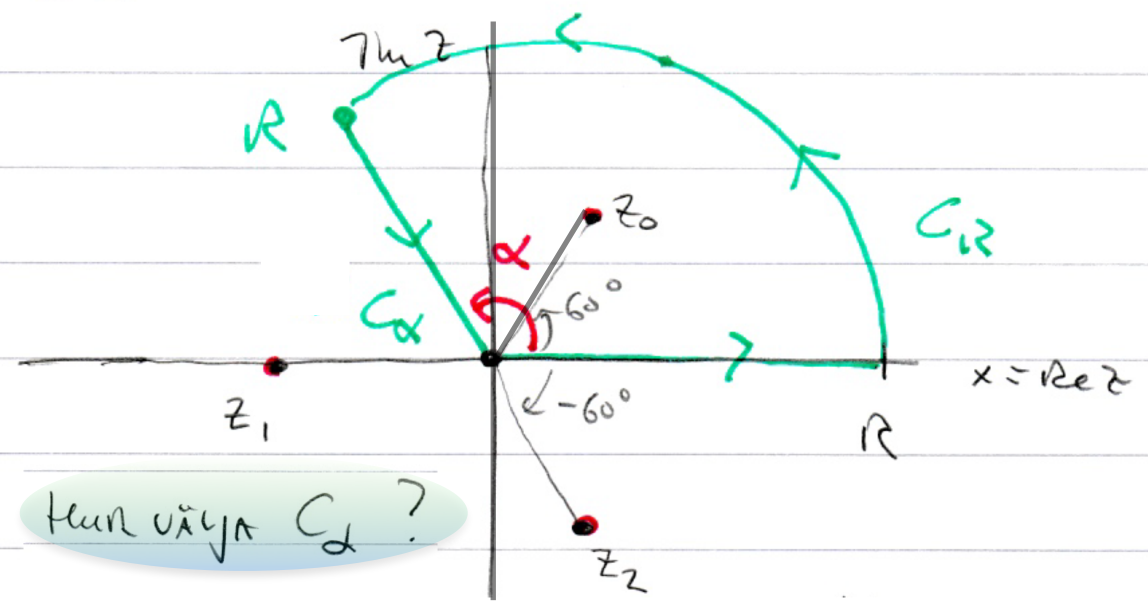
$$= -e^{i\alpha} \int_0^R \frac{dr}{r^3 e^{3i\alpha}+1}$$

EX $\quad I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+1} = \lim_{R\to\infty} \underbrace{\int_0^{R} \frac{dx}{x^3+1}}_{I_R}$

KOMPLEXIFIERA INTEGRANDEN : $x \to z$

$\frac{1}{z^3+1}$ HAR ENKLA POLER VID $z^3 = -1$ DVS $z = z_n = e^{i(2n+1)\pi/3}$

$n = 0, 1, 2$



$$I_R + \cancel{\int_{C_R} \frac{dz}{z^3+1}} + \int_{C_\alpha} \frac{dz}{z^3+1} = 2\pi i \operatorname{Res}[f(z_0)]$$

0

$$\int_{C_\alpha} \frac{dz}{z^3+1} = \underbrace{\left\{ z = re^{i\alpha},\ \frac{dz}{dr} = e^{i\alpha} \right\}}_{\text{PARAMETRISERA } C_\alpha} = \int_R^0 \frac{e^{i\alpha}\,dr}{(re^{i\alpha})^3+1}$$

$$= -e^{i\alpha} \int_0^R \frac{dr}{r^3 e^{3i\alpha}+1}$$

VÄLJ $\alpha = 2\pi/3$. VI FÅR DÅ TILLBAKS I_R (GÅNGER EN FÖRFAKTOR)

$$\Rightarrow \int_{C_\alpha} \frac{dz}{z^3+1} = -e^{i2\pi/3} \underbrace{\int_0^R \frac{dr}{r^3+1}}_{I_R} = -e^{i2\pi/3} I_R$$

$$\Rightarrow \lim_{R\to\infty} \left(1 - e^{i2\pi/3}\right) I_R = 2\pi i \operatorname{Res}[f(z_0)]$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1}$$

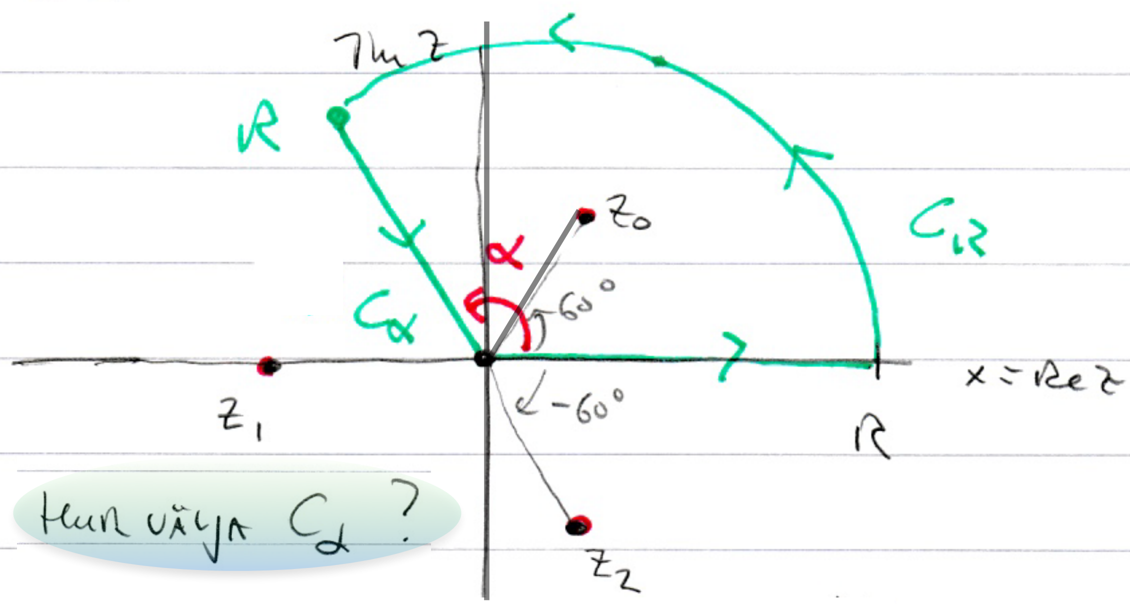
EX

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1} = \lim_{R\to\infty} \underbrace{\int_0^R \frac{dx}{x^3+1}}_{I_R}$$

KOMPLEXIFIERA INTEGRANDEN : $x \to z$

$\frac{1}{z^3+1}$ HAR ENKLA POLER VID $z^3 = -1$ DVS $z = z_n = e^{i(2n+1)\pi/3}$

$n = 0, 1, 2$



$$I_R + \int_{C_R} \frac{dz}{z^3+1} + \int_{C_\alpha} \frac{dz}{z^3+1} = 2\pi i \,\mathrm{Res}\,[f(z_0)]$$

$$\int_{C_\alpha} \frac{dz}{z^3+1} = \left\{ z = re^{i\alpha},\ \frac{dz}{dr} = e^{i\alpha} \right\} = \int_R^0 \frac{e^{i\alpha}\,dr}{(re^{i\alpha})^3+1}$$

PARAMETRISERA C_α

$$= -e^{i\alpha} \int_0^R \frac{dr}{r^3 e^{3i\alpha}+1}$$

. Hur välja α ?

Välj $\alpha = 2\pi/3$. Vi får då tillbaks I_R (gånger en förfaktor)

$$\Rightarrow \int_{C_\alpha} \frac{dz}{z^3+1} = -e^{i2\pi/3} \underbrace{\int_0^R \frac{dr}{r^3+1}}_{I_R} = -e^{i2\pi/3} I_R$$

$$\Rightarrow \lim_{R\to\infty} \left(1 - e^{i2\pi/3}\right) I_R = 2\pi i \,\mathrm{Res}\,[f(z_0)]$$

$$\mathrm{Res}\,[f(z_0)] = \lim_{z\to z_0} \cancel{(z-z_0)} \frac{1}{\cancel{(z-z_0)}(z-z_1)(z-z_2)}$$

$$= \frac{1}{(z_0-z_1)(z_0-z_2)} = \frac{1}{(e^{i\pi/3}-e^{i\pi})(e^{i\pi/3}-e^{i5\pi/3})}$$

$$\Rightarrow I = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$