

Greenfunktioner som responsfunktioner

$$\phi(\vec{r}) = \int d\vec{r}' G(\vec{r}-\vec{r}') (-\rho(\vec{r}')) = \int d\vec{r}' \frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \rho(\vec{r}')$$

↳ RESPONS ("OUTPUT") ↳ RESPONSFUNKTION (GREEN FUNKTION) ↳ STÖRNING ("INPUT") "linjär responsteori"



FYSIK JARGON

$$X_i(\vec{r}, t) = \int d\vec{r}' dt' \chi_{ij}(\vec{r}, t; \vec{r}', t') F_j(\vec{r}', t')$$

↳ RESPONS ↳ RESPONSFUNKTION ↳ SUMMERA REVENJÄNDE INDEX ↳ STÖRNING

Greenfunktioner som responsfunktioner

FYSIK JARGON

$$X_i(\vec{r}, t) = \int d\vec{r}' dt' \underbrace{X_i(\vec{r}, t; \vec{r}', t')}_{\substack{\text{RESPONSE} \\ \text{FUNCTION}}} \underbrace{F_j(\vec{r}', t')}_{\substack{\text{SUMMERA} \\ \text{REVENJÄRDE} \\ \text{INDEX}}} \uparrow \text{STÖRNING}$$

↑
↑
↑

några exempel från klassisk fysik:

| | X_i | X_{ij} | F_j |
|-------------------|---------|----------|----------|
| TELEKOMMUNIKATION | u | | 1 |
| | μ_i | | $-\mu_i$ |
| | v | | |

Greenfunktioner som responsfunktioner

FYSIK JARGON

$$X_i(\vec{r}, t) = \int d\vec{r}' dt' \underbrace{X_{ij}(\vec{r}, t; \vec{r}', t')}_{\substack{\text{RESPONS} \\ \text{FUNCTION}}} \underbrace{\overline{F_j(\vec{r}', t')}}_{\substack{\text{SUMMERA} \\ \text{REKONSTRUERA} \\ \text{INDEX}}} \uparrow \text{STÖRNING}$$

↑
↑
↑

några exempel från klassisk fysik:

| | X_i | X_{ij} | χ_i |
|-------------------|---------|-------------|----------|
| | u | c | 1 |
| TELEKOMMUNIKATION | μ_i | χ_{ij} | $-\mu_i$ |
| | v | ρ | |

Greenfunktioner som responsfunktioner

FYSIK JARGON

$$X_i(\vec{r}, t) = \int d\vec{r}' dt' \underbrace{X_{ij}(\vec{r}, t; \vec{r}', t')}_{\substack{\text{RESPONS} \\ \text{FUNCTION}}} \underbrace{\overline{F_j(\vec{r}', t')}}_{\substack{\text{SUMMA} \\ \text{RENERGIC} \\ \text{INDEX}}} \uparrow \text{STÖRNING}$$

↑
↑
↑

några exempel från klassisk fysik:

| | X_i | X_{ij} | $\overline{F_i}$ |
|----------|------------------|-------------|-------------------------|
| TEKONOMI | u | c | $-I$ |
| | μ_i | χ_{ij} | $-J_{ij}$ |
| | ψ | ρ | |
| ELCÄRA | $\overline{I_i}$ | | $\Delta \overline{V_i}$ |
| | $\overline{I_i}$ | | |

Greenfunktioner som responsfunktioner

FYSIK JARGON

$$X_i(\vec{r}, t) = \int d\vec{r}' dt' \underbrace{X_{ij}(\vec{r}, t; \vec{r}', t')}_{\substack{\text{RESPONS} \\ \text{FUNCTION}}} \underbrace{F_j(\vec{r}', t')}_{\substack{\text{SUMMERA} \\ \text{RENERADE} \\ \text{INDEX}}} \uparrow \text{STÖRNING}$$

↑
↑
↑

några exempel från klassisk fysik:

| | X_i | X_{ij} | F_i |
|-------------------|--|--|---|
| TELEKOMMUNIKATION | $\left\{ \begin{array}{l} u \\ \mu_i \\ v \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} c \\ \chi_{ij} \\ \mathcal{R} \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} I \\ -\nabla \cdot \mathcal{B} \\ -J \end{array} \right.$ |
| ELECTRONICS | $\left\{ \begin{array}{l} I_i \\ I_i \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} g_{ij} \\ g_i \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} V \\ \Delta I \end{array} \right.$ |

Viktigt att kunna konstruera Greenfunktioner!
Standardmetod: Fouriertransform

Viktigt att kunna konstruera Greenfunktioner!
Standardmetod: Fouriertransform

Men... vi har ett problem!

exempel: driven harmonisk oscillator

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \bar{f}(t) \quad (1)$$

DIFF-OPERATOR $L_t = \frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2$

TRANSFORMATIONS INVARIANT

$$\downarrow \quad \leftarrow \quad \underset{t'=0}{\eta(t, t')} = \eta(t-t') = \eta(t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \eta(t) + \omega_0^2 \eta(t) = \delta(t) \quad (2)$$

FOURIER TRANSFORMERA!

$$\left\{ \begin{aligned} \eta(t) &= \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{i\omega t} \eta(\omega) \\ \delta(t) &= \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{i\omega t} \cdot 1 \end{aligned} \right. \quad (3)$$

$$(2) \& (3) \Rightarrow (-\omega^2 + \omega_0^2) \eta(\omega) = 1 \Rightarrow \eta(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\Rightarrow \eta(t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{i\omega t} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

exempel: driven harmonisk oscillator

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \bar{F}(t) \quad (1)$$

DIFF-OPERATOR $L_t = \frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2$

TRANSPOSITIONSINVARIANNS

$$\Downarrow \quad \leftarrow \quad \underset{t'=0}{\eta(t, t')} = \eta(t-t') = \eta(t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \eta(t) + \omega_0^2 \eta(t) = \delta(t) \quad (2)$$

FOURIER TRANSFORMERA!

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta(t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{i\omega t} \eta(\omega) \\ \delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{i\omega t} \end{array} \right.$$

(2) & (3)

$$\eta(\omega) = 1 \Rightarrow \eta(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\eta(t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{i\omega t} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

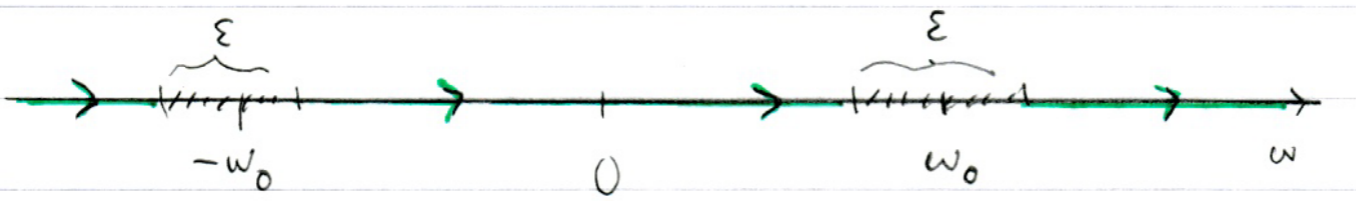
TYPISK!

VI SKÖLLE DEFINIERA INTEGRALEN!

POLEER VID $\omega = \pm \omega_0$!

Möjliga definitioner:

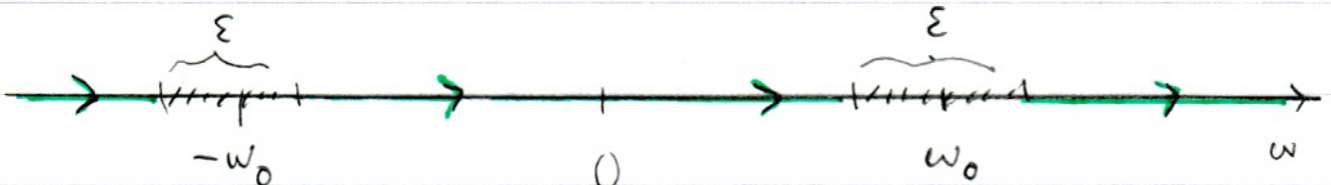
I.



$$\int \dots \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-w_0 - \epsilon} \dots + \int_{-w_0 + \epsilon}^{w_0 - \epsilon} \dots + \int_{w_0 + \epsilon}^{\infty} \dots \right) \quad \text{"CAUCHY'S PRINCIPAL VALUE"}$$

Möjliga definitioner:

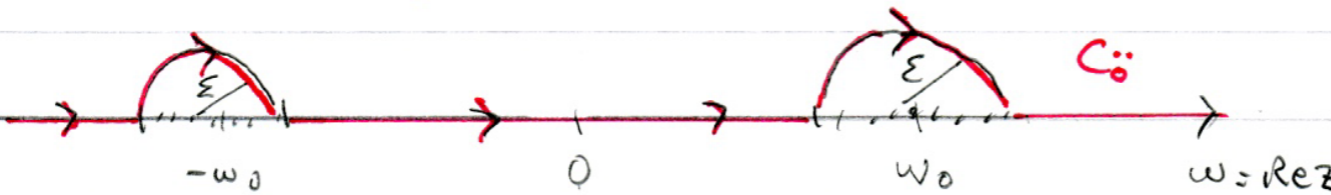
I.



$$\int \dots \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-w_0 - \varepsilon} \dots + \int_{-w_0 + \varepsilon}^{w_0 - \varepsilon} \dots + \int_{w_0 + \varepsilon}^{\infty} \dots \right)$$

"CAUCHY'S PRINCIPAL VÄRDE"

II.



KOMPLEXIFICERA w ("ANALYTISK FORTSÄTTNING" $w \rightarrow z$)

$$\int \dots \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_0} \dots$$

Möjliga definitioner:

I.

$$\int \dots \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-w_0 - \epsilon} \dots + \int_{-w_0 + \epsilon}^{w_0 - \epsilon} \dots + \int_{w_0 + \epsilon}^{\infty} \dots \right)$$
 "CAUCHY'S PRINCIPAL VÄRDE"

II.

$$\int \dots \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_0} \dots$$

KOMPLEXIFICERA w ("ANALYTISK FORTSÄTTNING" $w \rightarrow z$)

III.

$$\int \dots = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_0} \dots$$

Möjliga definitioner:

I.

$$\int \dots \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-w_0 - \epsilon} \dots + \int_{-w_0 + \epsilon}^{w_0 - \epsilon} \dots + \int_{w_0 + \epsilon}^{\infty} \dots \right)$$

"CAUCHY'S PRINCIPAL VÄRDE"

II.

KOMPLEXIFICERA w ("ANALYTISK FORTSÄTTNING" $w \rightarrow z$)

$$\int \dots \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_0} \dots$$

Fortfarande problem!
I, II, III ger olika resultat!!!

III.

$$\int \dots = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_0} \dots$$

Möjliga definitioner:

I.

$$\int \dots \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-w_0 - \epsilon} \dots + \int_{-w_0 + \epsilon}^{w_0 - \epsilon} \dots + \int_{w_0 + \epsilon}^{\infty} \dots \right)$$

"CAUCHY'S PRINCIPAL VÄRDE"

II.

KOMPLEXIFICERA w ("ANALYTISK FORTSÄTTNING" $w \rightarrow z$)

$$\int \dots \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_0} \dots$$

Fortfarande problem!
I, II, III ger olika resultat!!!

III.

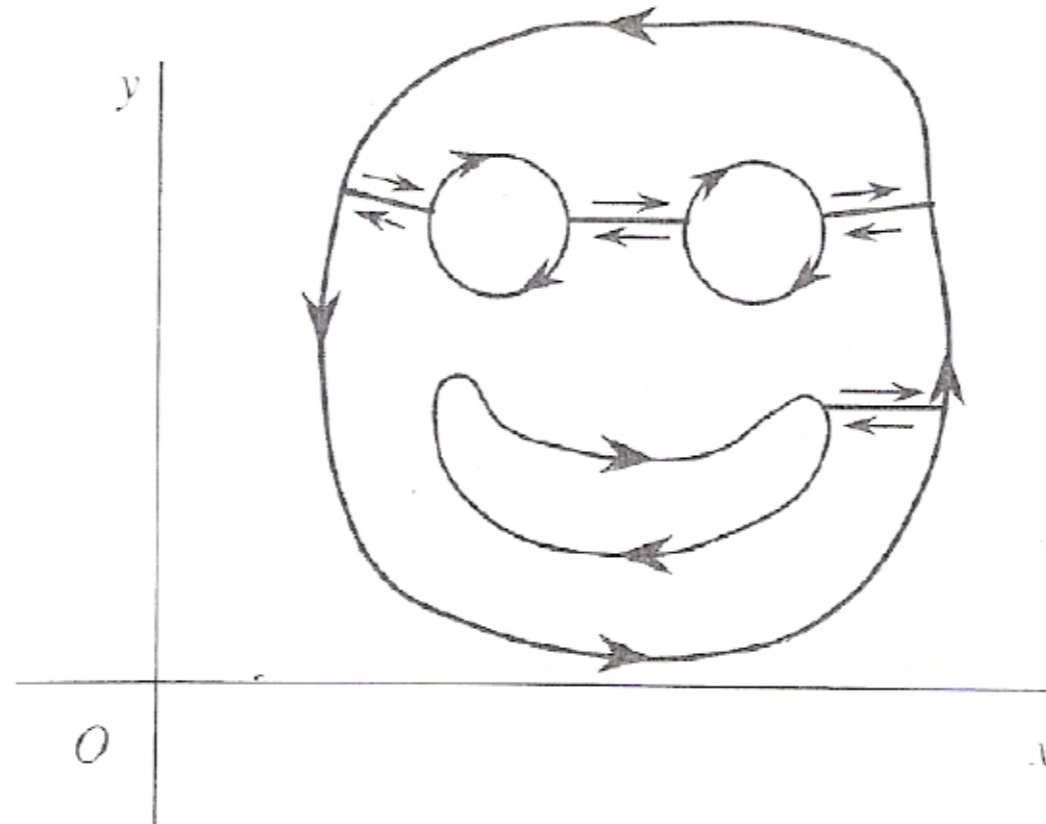
$$\int \dots = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_0} \dots$$

Bara en av definitionerna ger fysikaliskt meningsfulla resultat. För att förstå vilken definition som är den "rätta", så behöver vi först repetera litet komplex analys, särskilt residykalkyl...

En paus från Greenfunktioner...

Residykalkyl:

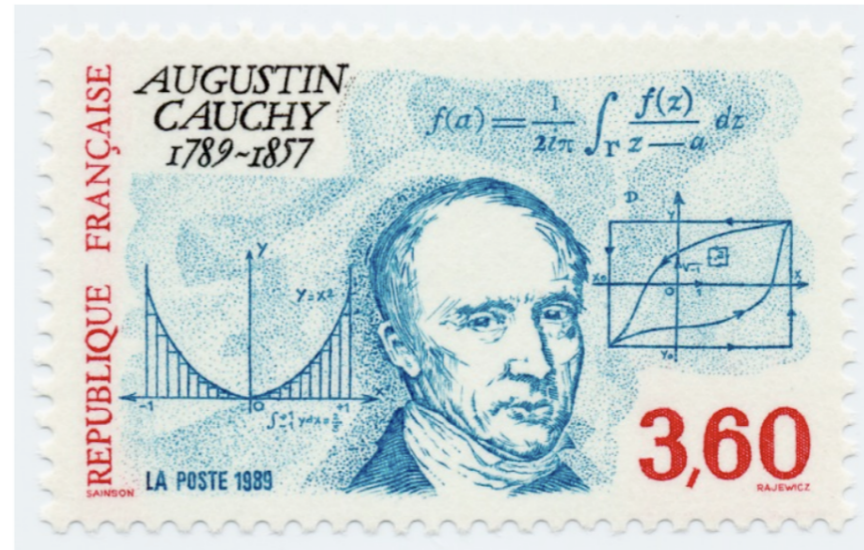
Eleganta räkningar av förskräckliga integraler



Cauchys integralformel

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

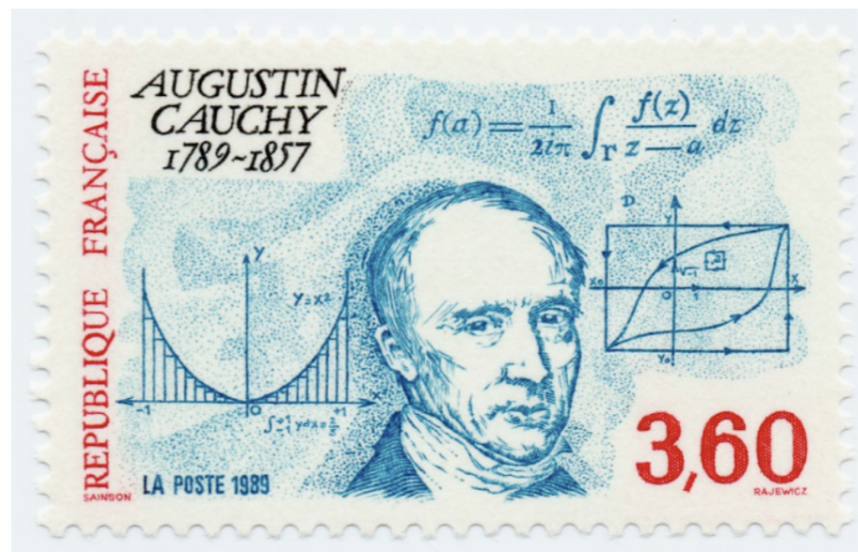
f analytisk på och innanför C (inneslutande z_0)



Cauchys integralformel

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

f analytisk på och innanför C (inneslutande z_0)



Analogi: Laplaces ekvation + randvärdesvillkor bestämmer unikt en elektrostatisk potential

Merkligt resultat! Hur kan funktionens värde på kurvan
entydigt bestämma funktionens värden inuti? ?

CAUCHY-RIEMANN : $f(z) = u(z) + iv(z)$ ANALYTISK

$$z = x + iy$$

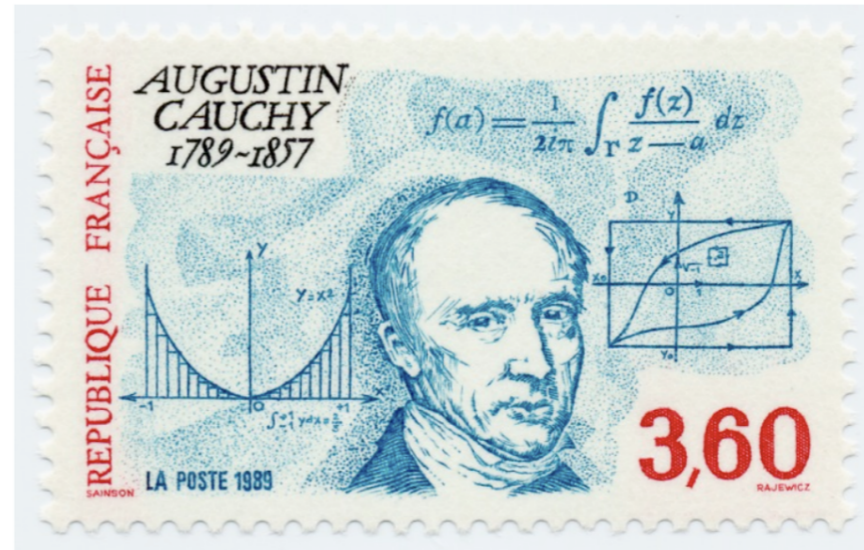
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{\nabla^2 u} = \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}_{\nabla^2 v} = 0$$

$\Rightarrow u, v$ HARMONISKA, ENTYDIGT BESTÄMDA AV RANDVILLKOR.

Cauchys integralformel

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

f analytisk på och innanför C (inneslutande z_0)



Analogi: Laplaces ekvation + randvärdesvillkor bestämmer unikt en elektrostatisk potential

Laurentserie

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad f \text{ analytisk på en ring } \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

$$a_{-1} = \text{Res}(f(z_0))$$

Singulariteter

“Borttagbara” singulariteter

$$f(z) = \frac{4z^2 - 1}{2z + 1} \quad (\text{exempel})$$

Essentiella singulariteter

oändligt många Laurenttermer med $n < 0$

$$f(z) = e^{1/z} \quad (\text{exempel})$$

Pol av ordning **m**

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \dots + \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m}$$

$$a_{-1} = \text{Res}(f(z_0)) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m f(z))$$

Singulariteter

“Borttagbara” singulariteter

$$f(z) = \frac{4z^2 - 1}{2z + 1} \quad (\text{exempel})$$

Essentiella singulariteter

oändligt många Laurenttermer med $n < 0$

$$f(z) = e^{1/z} \quad (\text{exempel})$$

En riktigt otäck funktion:
när $z \rightarrow 0$ så kommer $f(z)$ att
passera godtyckligt nära **alla** komplexa tal!

Pol av ordning **m**

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \dots + \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m}$$

$$a_{-1} = \text{Res}(f(z_0)) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m f(z))$$

$$\begin{aligned} \text{EX } f(z) = e^{1/z} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^0 \frac{1}{(-n)!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(-n)!} (z-0)^n \end{aligned}$$

$z_0 = z_0$

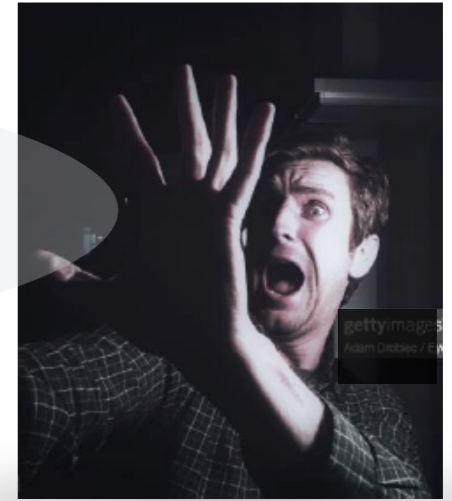
HÄRSK! När $z \rightarrow 0$ så kommer $f(z)$ godtyckligt nära alla komplex tal!

$z \rightarrow 0$. VÄJ $\lambda \in \mathbb{C}$ godtyckligt. Visa att $f(z) \approx \lambda$

DEFINIERA $z_n = \frac{1}{\ln \lambda + 2n\pi i} \rightarrow 0$

$\Rightarrow n \rightarrow \infty : z_n \rightarrow z \rightarrow 0$ dvs. $z \approx z_n$ för stora n .

$f(z) \approx f(z_n) = e^{1/z_n} = e^{\ln \lambda + 2n\pi i} = e^{\ln \lambda} = \lambda$



$$\begin{aligned} \underline{\text{EX}} \quad f(z) = e^{1/z} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^0 \frac{1}{(-n)!} z^n = \sum_{n=-\infty}^0 \frac{1}{(-n)!} (z-z_0)^n \end{aligned}$$

$z_0 = z_0$

När $z \rightarrow 0$ så kommer $f(z)$ godtyckligt
vara alla komplex tal!

FYSIKTILLÄMPNING (KOSTERLITZ - THOULESS FAS ÖVERGÅNG)

He^3 , 2D superledare, ...

$$\hbar v = (u + TS) / v = f = f_{\text{reg}} + f_{\text{sing}}$$

$$f_{\text{sing}} \sim \frac{u_{\text{sing}}}{\sqrt{v - v_c}}$$

Nobelpris 2016



David Thouless



Michael Kosterlitz

Singulariteter

“Borttagbara” singulariteter

$$f(z) = \frac{4z^2 - 1}{2z + 1} \quad (\text{exempel})$$

Essentiella singulariteter

oändligt många Laurenttermer med $n < 0$

$$f(z) = e^{1/z} \quad (\text{exempel})$$

Pol av ordning **m**

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \dots + \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m}$$

$$a_{-1} = \text{Res}(f(z_0)) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m f(z))$$

Singulariteter

“Borttagbara” singulariteter

$$f(z) = \frac{4z^2 - 1}{2z + 1} \quad (\text{exempel})$$

Essentiella singulariteter

oändligt många Laurenttermer med $n < 0$

$$f(z) = e^{1/z} \quad (\text{exempel})$$

Pol av ordning \mathbf{m}

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \dots + \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m}$$

$$a_{-1} = \text{Res}(f(z_0)) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m f(z))$$

Residyteoremet

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \text{Res}(f(z_k))$$

C enkel, positivt orienterad kurva som innesluter de singulära punkterna z_1, z_2, \dots, z_k till f

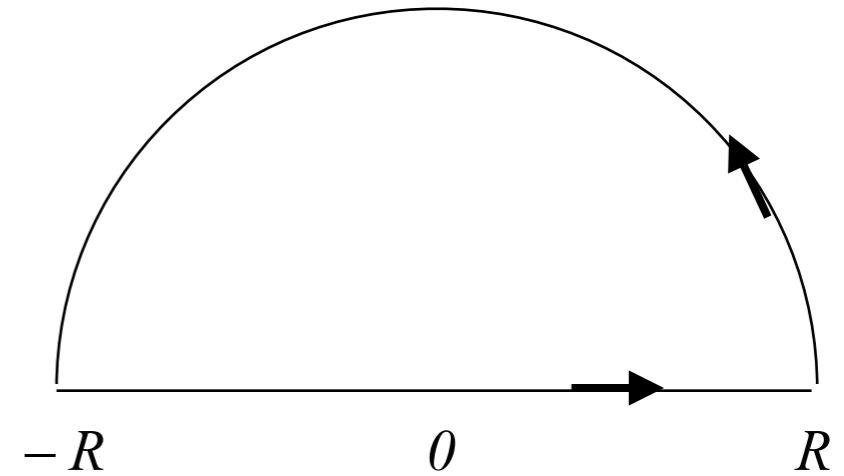
Vanligaste tillämpningen av residykalkyl i fysiken:
 "komplexifierade" reella integraler

Användbart resultat:

Jordans lemma

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{i\alpha z} f(z) dz = 0$$

C_R halvcirkel med radien R i övre komplexa halvplanet
 f går likformigt mot 0 snabbare än $1/|z|$ då $|z| \rightarrow \infty$
 α icke-negativt reellt tal



Enkla typfall av residykalkyl:

I. Integraler av rationella funktioner

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx \quad q(x) \neq 0 \text{ för reella } x$$

II. Integraler av produkter av rationella och trigonometriska funktioner

$$q(x) \neq 0 \text{ för reella } x, \quad a \text{ reell}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \cos(ax) dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \sin(ax) dx$$

III. Integraler av trigonometriska funktioner på enhetscirkeln

$$\int_0^{2\pi} F(\sin \theta, \cos \theta) d\theta$$

Enkla typfall av residykalkyl:

I. Integraler av rationella funktioner $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx$ $q(x) \neq 0$ för reella x

II. Integraler av produkter av rationella och trigonometriska funktioner
 $q(x) \neq 0$ för reella x , a reell

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \cos(ax) dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \sin(ax) dx$$

III. Integraler av trigonometriska funktioner på enhetscirkeln $\int_0^{2\pi} F(\sin \theta, \cos \theta) d\theta$

Låt oss titt på ett exempel

(trigonometriska funktioner på enhetscirkeln, III)

För integraler på enhetscirkeln C i komplexa talplanet, ofta bra att använda:

$$z = e^{i\theta}, \quad \frac{1}{z} = e^{-i\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad \sin\theta = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right), \quad d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \overline{f}(\sin\theta, \cos\theta) d\theta = \oint_C \overline{f} \left(\frac{z - \frac{1}{z}}{2i}, \frac{z + \frac{1}{z}}{2} \right) \frac{dz}{iz}$$

Låt oss titt på ett exempel
(trigonometriska funktioner på enhetscirkeln, III)

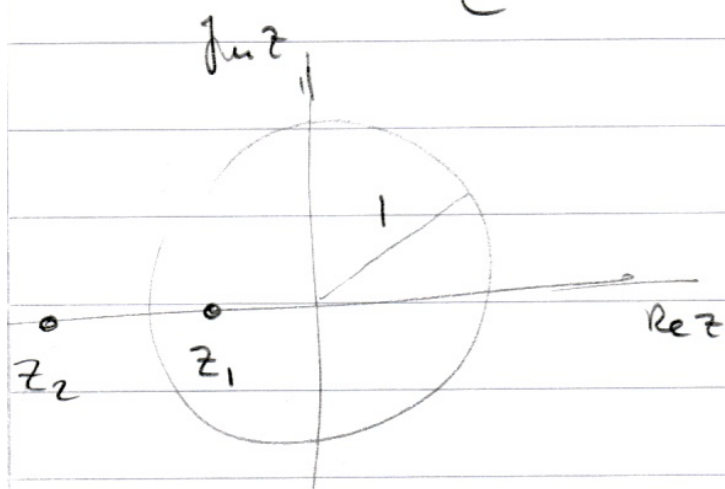
$$\begin{aligned} z &= e^{i\theta}, \quad \frac{1}{z} = e^{-i\theta} \\ \cos\theta &= \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \quad d\theta = \frac{dz}{iz} \\ \Rightarrow \int_0^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta) d\theta &= \oint_C f\left(\frac{z - \frac{1}{z}}{2i}, \frac{z + \frac{1}{z}}{2}\right) \frac{dz}{iz} \end{aligned}$$

EX
$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + \cos\theta)^2}, \quad a > 1 \text{ reell}$$

låt oss integrera

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{(a + \cos\theta)^2} = \frac{1}{2} \oint_C \frac{1}{\left(a + \frac{z^2+1}{2z}\right)^2} \frac{dz}{iz}$$

$$= \frac{2}{i} \oint_C \frac{z dz}{(z^2 + 2az + 1)^2} = \frac{2}{i} \oint_C \frac{z dz}{(z - z_1)^2 (z - z_2)^2}$$



poler 1
$$z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1}$$

$$z_2 = -a - \sqrt{a^2 - 1}$$

AV ORDNING 2

Låt oss titt på ett exempel
(trigonometriska funktioner på enhetscirkeln, III)

$$z = e^{i\theta}, \quad \frac{1}{z} = e^{-i\theta}$$

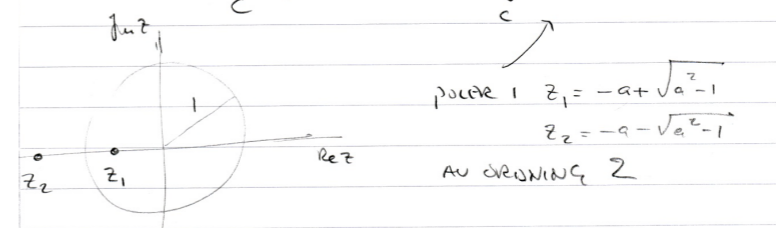
$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \quad d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta) d\theta = \oint_C f\left(\frac{z - \frac{1}{z}}{2i}, \frac{z + \frac{1}{z}}{2}\right) \frac{dz}{iz}$$

EX $I = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(a + \cos\theta)^2}, \quad a > 1 \text{ reell}$

Välj en integrationsväg $= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{(a + \cos\theta)^2} = \frac{1}{2} \oint_C \frac{1}{\left(a + \frac{z + \frac{1}{z}}{2}\right)^2} \frac{dz}{iz}$

$$= \frac{2}{i} \oint_C \frac{z dz}{(z^2 + 2az + 1)^2} = \frac{2}{i} \oint_C \frac{z dz}{(z - z_1)^2 (z - z_2)^2}$$



RESIDYTEORIN : $I = \frac{2}{i} \cdot 2\pi i \operatorname{Res}[f(z_1)]$

$$= \frac{2}{i} \cdot 2\pi i \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{d}{dz} \left((z - z_1)^2 f(z) \right)$$

$$= \frac{2}{i} \cdot 2\pi i \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{(z - z_1)^2 (z - z_2)^2} \right)$$

$$= \frac{2}{i} \cdot 2\pi i \left(\frac{(z_1 - z_2)^2 - z_1 \cdot 2(z_1 - z_2)}{(z_1 - z_2)^4} \right)$$

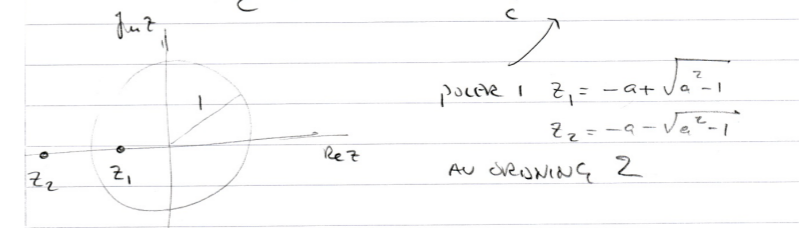
SÄTT IN $z_1, z_2 = \frac{2a}{(a^2 - 1)^{3/2}}$

Låt oss titt på ett exempel
(trigonometriska funktioner på enhetscirkeln, III)

$$\begin{aligned} z &= e^{i\theta}, \quad \frac{1}{z} = e^{-i\theta} \\ \cos\theta &= \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \quad d\theta = \frac{dz}{iz} \\ \Rightarrow \int_0^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta) d\theta &= \oint_C f\left(\frac{z - \frac{1}{z}}{2i}, \frac{z + \frac{1}{z}}{2}\right) \frac{dz}{iz} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{EX} \quad I &= \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(a + \cos\theta)^2}, \quad a > 1 \text{ reell} \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{(a + \cos\theta)^2} = \frac{1}{2} \oint_C \frac{1}{\left(a + \frac{z+z^{-1}}{2}\right)^2} \frac{dz}{iz} \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{i} \oint_C \frac{z dz}{(z^2 + 2az + 1)^2} = \frac{2}{i} \oint_C \frac{z dz}{(z - z_1)^2 (z - z_2)^2}$$



$$\begin{aligned} \text{RESIDYBERÄKNING: } I &= \frac{2}{i} \cdot 2\pi i \operatorname{Res}[f(z_1)] \\ &= \frac{2}{i} \cdot 2\pi i \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{d}{dz} \left((z - z_1)^2 f(z) \right) \\ &= \frac{2}{i} \cdot 2\pi i \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{(z - z_1)^2 (z - z_2)^2} \right) \\ &= \frac{2}{i} \cdot 2\pi i \left(\frac{(z_1 - z_2)^2 - z_1 \cdot 2(z_1 - z_2)}{(z_1 - z_2)^4} \right) \\ &\stackrel{\text{SÄTT IN } z_1, z_2}{=} = \frac{\pi a}{(a^2 - 1)^{3/2}} \end{aligned}$$

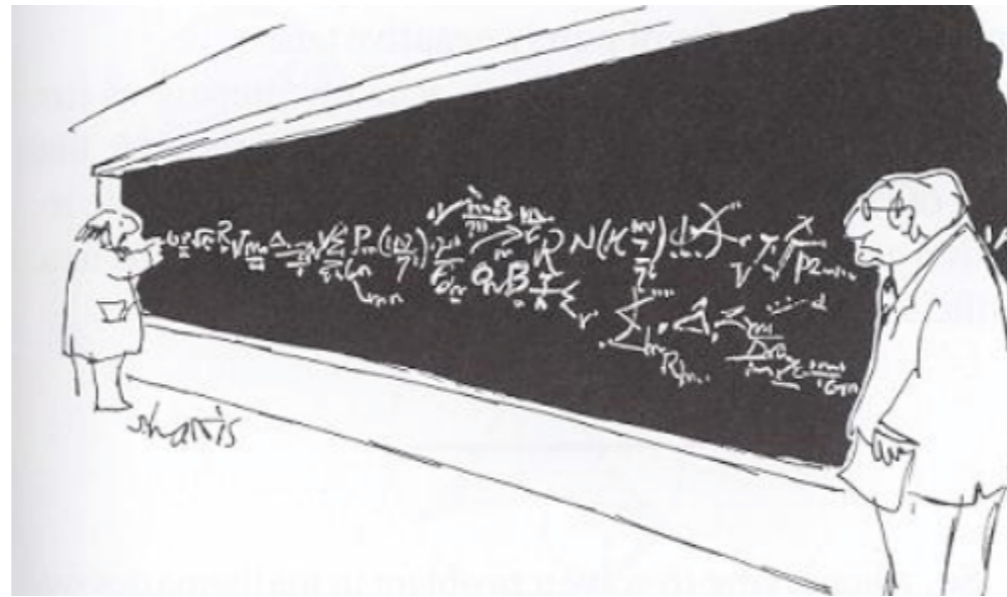
Dåliga nyheter:

Många (de flesta?) integraler i fysiken faller inte i någon av klasserna I, II, III.

Ofta i fysiken....

Förskräckliga integraler!

...kan fortfarande lösas elegant
med fiffig användning av residykalkyl!



Välj en smart kurva!

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax-bx^2} dx \quad a, b \in \mathbb{R}, b > 0$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3 + 1}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3 + 1}$$

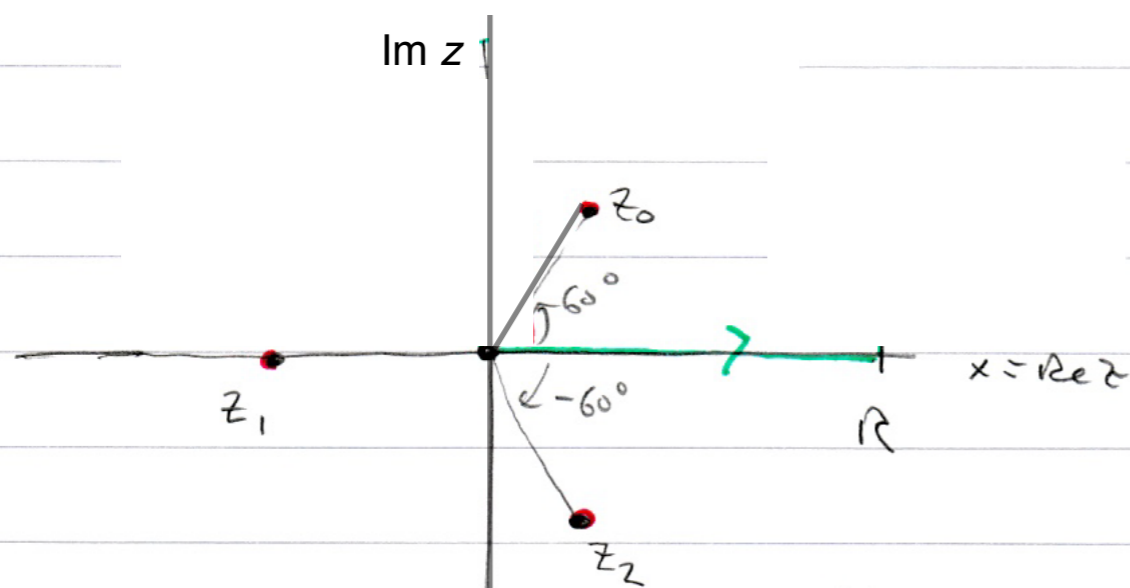
Ex $I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3 + 1} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{dx}{x^3 + 1}$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbb{R}}$

KOMPLEXIFISERA INTEGRANDEN : $x \rightarrow z$ $i(2\pi n)^{1/3}$

$\frac{1}{z^3 + 1}$ HAR ENKLA POLER VID $z^3 = -1$ DVS $z = z_n = e^{i(2\pi n)^{1/3}}$

$$n = 0, 1, 2$$



$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+1}$$

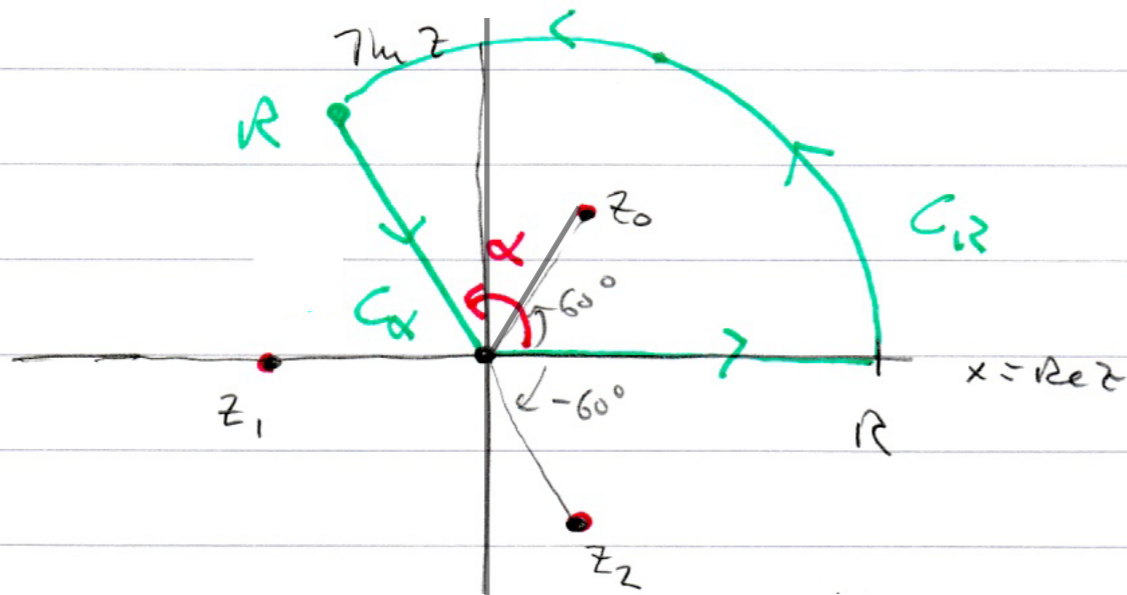
Ex $I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+1} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{dx}{x^3+1}$

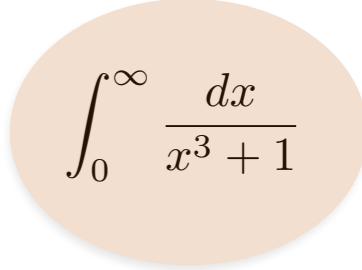
$\underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbb{R}}$

KOMPLEXIFISERA INTEGRANDEN : $x \rightarrow z$

$\frac{1}{z^3+1}$ HAR ENKA POLER VID $z^3 = -1$ DVS $z = z_n = e^{i(2n+1)\pi/3}$

$$n = 0, 1, 2$$

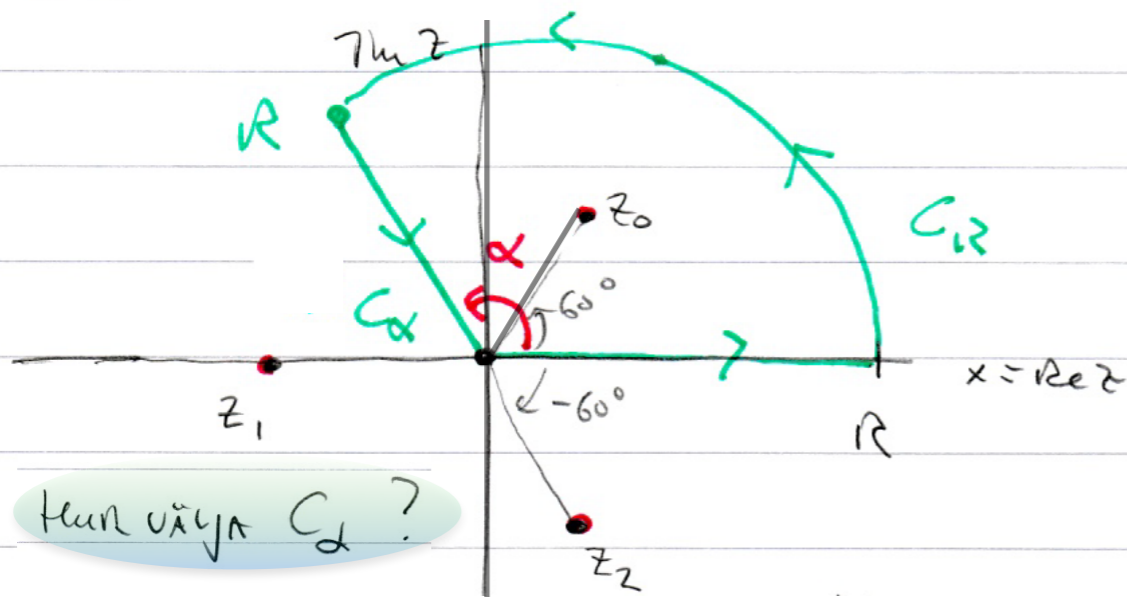




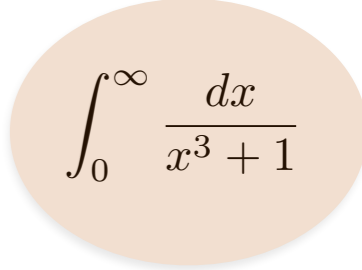
EX $I = \int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{dx}{x^3+1}$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbb{R}}$

KOMPLEXIFISERA INTEGRANDEN : $x \rightarrow z$ $i(2u+1)^{1/3}$
 $\frac{1}{z^3+1}$ HAR ENKLA POLER VID $z^3 = -1$ DVS $z = z_n = e^{i(2n+1)\pi/3}$
 $n = 0, 1, 2$



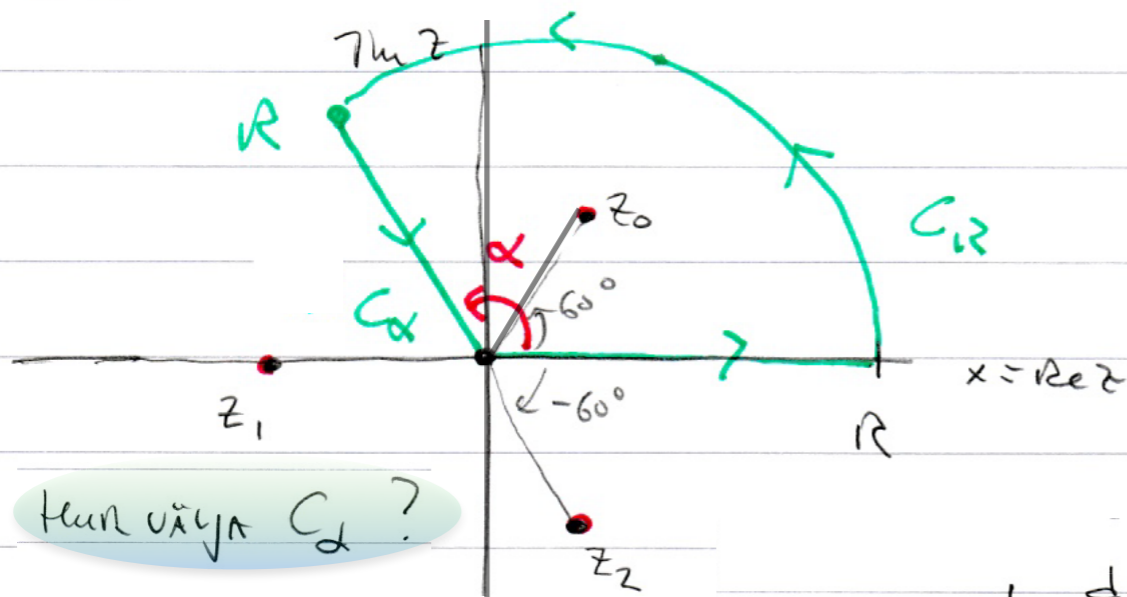
Hur välja C_α ?



Ex $I = \int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{dx}{x^3+1}$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbb{I}_R}$

KOMPLEXIFISERA INTEGRANDEN : $x \rightarrow z$ $i(2\pi n)^{1/3}$
 $\frac{1}{z^3+1}$ HAR ENKLA POLER VID $z^3 = -1$ DVS $z = z_n = e^{i(2\pi n)^{1/3}}$
 $n = 0, 1, 2$



hur välja C_α ?

$$\mathbb{I}_R + \int_{C_R} \frac{dz}{z^3+1} + \int_{C_\alpha} \frac{dz}{z^3+1} = 2\pi i \text{Res} [f(z_0)]$$

PARAMETRISERA C_α

$$\int_{C_\alpha} \frac{dz}{z^3+1} = \left\{ z = r e^{i\alpha}, \frac{dz}{dr} = e^{i\alpha} \right\} = \int_R^0 \frac{e^{i\alpha} dr}{(r e^{i\alpha})^3 + 1}$$

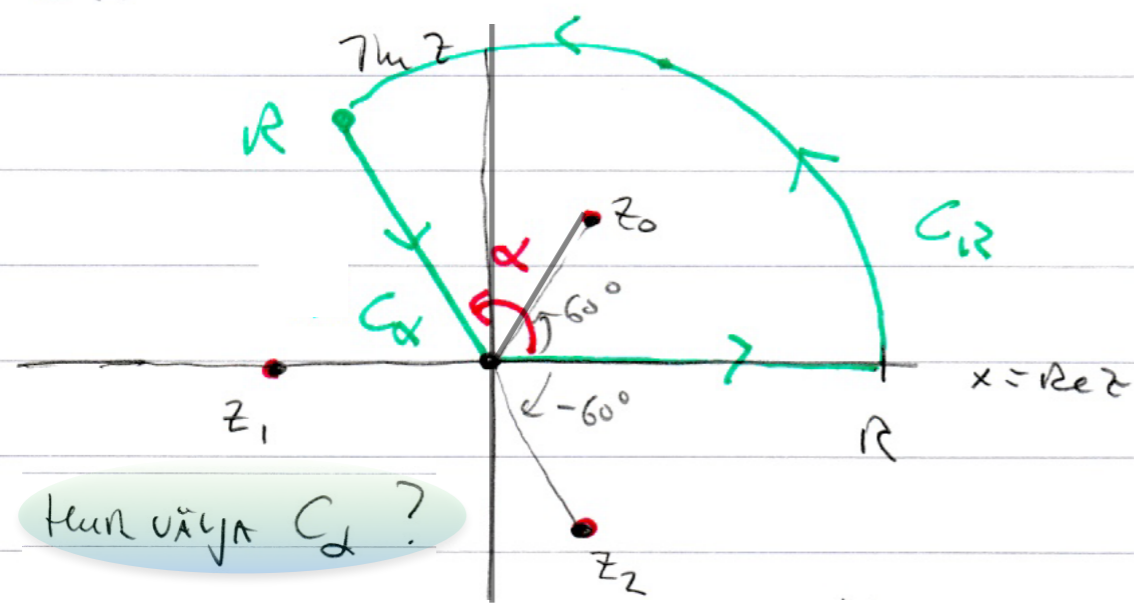
$$= -e^{i\alpha} \int_0^R \frac{dr}{r^3 e^{3i\alpha} + 1}$$

EX $I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+1} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{dx}{x^3+1}$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbb{I}_R}$

KOMPLEXIFIERA INTEGRANDEN : $x \rightarrow z$ $i(2\pi n)^{1/3}$
 $\frac{1}{z^3+1}$ HAR ENKLA POLER VID $z^3 = -1$ DVS $z = z_n = e^{i(2\pi n)^{1/3}}$

$n = 0, 1, 2$



hur välja C_α ?

$$\mathbb{I}_R + \int_{C_R} \frac{dz}{z^3+1} + \int_{C_\alpha} \frac{dz}{z^3+1} = 2\pi i \text{Res} [f(z_0)]$$

$$\int_{C_\alpha} \frac{dz}{z^3+1} = \left\{ z = re^{i\alpha}, \frac{dz}{dr} = e^{i\alpha} \right\} = \int_0^R \frac{e^{i\alpha} dr}{(re^{i\alpha})^3 + 1}$$

$$= -e^{i\alpha} \int_0^R \frac{dr}{r^3 e^{3i\alpha} + 1}$$

välj $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. Vi får då trubbas \mathbb{I}_R (gången en förändring)

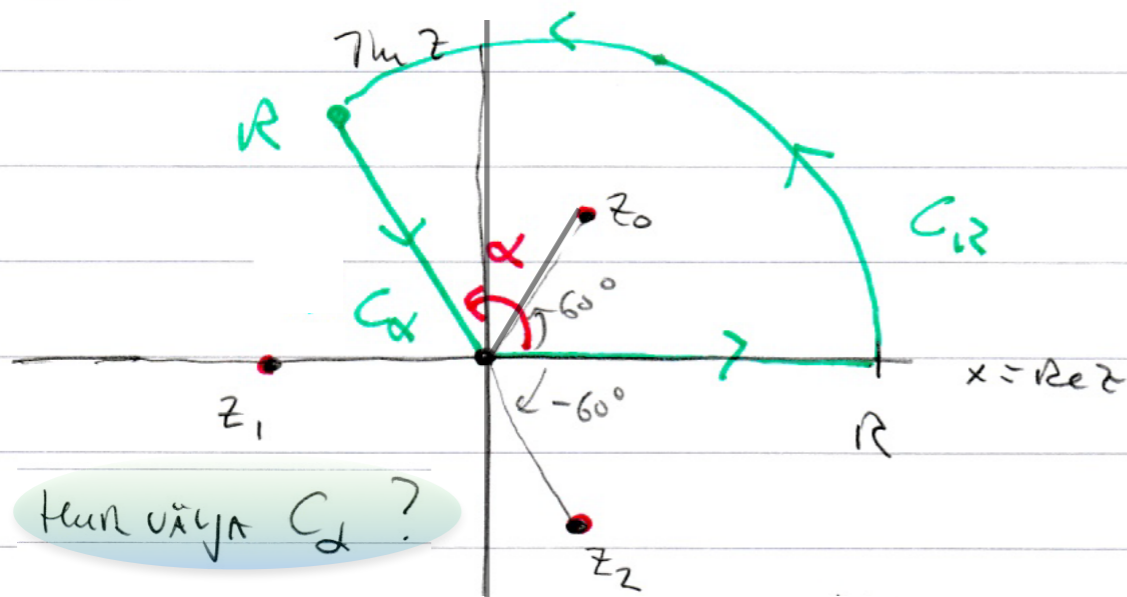
$$\Rightarrow \int_{C_\alpha} \frac{dz}{z^3+1} = -e^{i2\pi/3} \int_0^R \frac{dr}{r^3+1} = -e^{i2\pi/3} \mathbb{I}_R$$

$$\Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} (1 - e^{i2\pi/3}) \mathbb{I}_R = 2\pi i \text{Res} [f(z_0)]$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+1}$$

Ex $I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+1} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{dx}{x^3+1} = I_R$

KOMPLEXIFIERA INTEGRANDEN : $x \rightarrow z$
 $\frac{1}{z^3+1}$ HAR ENKLA POLER VID $z^3 = -1$ DVS $z = z_n = e^{i(2n+1)\pi/3}$
 $n = 0, 1, 2$



hur välja C_α ?

$$I_R + \int_{C_R} \frac{dz}{z^3+1} + \int_{C_\alpha} \frac{dz}{z^3+1} = 2\pi i \text{Res}[f(z_0)]$$

$$\int_{C_\alpha} \frac{dz}{z^3+1} = \left\{ z = re^{i\alpha}, \frac{dz}{dr} = e^{i\alpha} \right\} = \int_0^R \frac{e^{i\alpha} dr}{(re^{i\alpha})^3+1}$$

PARAMETRISERA C_α

$$= -e^{i\alpha} \int_0^R \frac{dr}{r^3 e^{3i\alpha} + 1}$$

hur välja α ?

välj $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, vi får då slutans I_R (GÄNSCH EN FÖRFÄNDELSE)

$$\Rightarrow \int_{C_\alpha} \frac{dz}{z^3+1} = -e^{i2\pi/3} \int_0^R \frac{dr}{r^3+1} = -e^{i2\pi/3} I_R$$

$$\Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} (1 - e^{i2\pi/3}) I_R = 2\pi i \text{Res}[f(z_0)]$$

$$\text{Res}[f(z_0)] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{1}{(z - z_0)(z - z_1)(z - z_2)}$$

$$= \frac{1}{(z_0 - z_1)(z_0 - z_2)} = \frac{1}{(e^{i\pi/3} - e^{i\pi})(e^{i\pi/3} - e^{i5\pi/3})}$$

$$\Rightarrow I = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$