FTF131 - Matematisk fysik - Övningsräkning tentauppgifter

Tentamen

Normaltvis:

- 5 uppgifter, varje uppgift ger max 5 poäng
  1) Greenfunktioner / Residyhalkyl
  2) Integralekvation
  3) Variationshalkyl
  4) Gruppes / representationer
  5) ~~Hilbertrum / Hermitesk operator~~ Topologi ?!

Greenfunktioner / Residyhalkyl (2017 uppgift 1)

a) Residyhalkyl är ett effektivt redskap vid beräkningar av Greenfunktioner. Vad är en Greenfunktion?

- En Greenfunktion används för att lösa linjära inhomogena differentialekvationer med definierade begynnelsevärden & randvärden. $Lu(\vec{x}) = \delta(\vec{x})$
- Greenfunktioner ger oss impulssvaret när vi skickar in en Dirac-puls vid punkt $\vec{s}$ till ett system:

$$L\,G(\vec{x},\vec{s}) = \delta(\vec{x},\vec{s})$$

- Lösningen $u(\vec{x})$ till en godtycklig hållа $\delta(\vec{x})$ får man med

$$u(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} G(\vec{x},\vec{s})\,\delta(\vec{s})\,d\vec{s} \qquad s \in \mathbb{R}^n$$

Varför är Greenfunktioner så viktiga i fysiken?

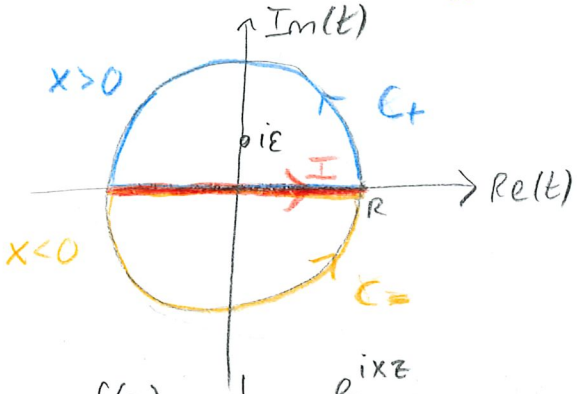
- Många problem i elektrodynamik, kvantfältteori, aerodynamik... som man kan lösa med hjälp av Greenfunktioner (trekroppsproblem, vågekvationer, diffusionsekv...)

Och hur kommer egentligen residyhalkyl in i beräkningen av Greenfunktioner?

Normaltvis hittar vi Greenfunktioner genom att använda Fouriertransformationen. Inverss fouriertransformationen ger oss en integral som är ofta svårt att lösa och innehåller poler
→ använda residyhalkyl

b) Använd residyhalvgl till att visa att stegfunktionen $\theta(x)$ har integralrepresentationen

$$\theta(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt}}{t-i\varepsilon}\,dt \qquad \varepsilon>0 \qquad \varepsilon\to 0$$



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{e^{ixz}}{z-i\varepsilon}$$

vill beräkna $\int_\gamma f(z)dz$ med

γ: $\gamma^+ = C_+ + I$, $\gamma^- = C_- - I$

Jordan's Lemma:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_+} g(z)e^{imz}\,dz = 0 \quad \text{för } m>0$$

om $\lim_{r\to\infty} g(re^{i\theta}) = 0 \quad \forall\,\theta\in[0,\pi]$

här: $g(t) = \frac{1}{t-i\varepsilon}$

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{re^{i\theta}-i\varepsilon} = 0 \quad \forall\,\theta$$

- för $x>0$: titta på kurvan γ_+ i ÖHP:

$\Rightarrow$ Jordan: $\int_{C_+} f(z)dz = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ixt}}{t-i\varepsilon}dt = \frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma^+} f(z)dz = \frac{2\pi i\cdot \mathrm{Res}_f(i\varepsilon)}{2\pi i}$$

$$= \lim_{z\to i\varepsilon}\left((z-i\varepsilon)\frac{e^{ixz}}{z-i\varepsilon}\right) = e^{ix\cdot i\varepsilon} = e^{-x\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \underline{\underline{1}}$$

- för $x<0$: titta på kurvan γ_- i UHP:

$\Rightarrow$ Jordan: $\int_{C_-} f(z)dz = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ixt}}{t-i\varepsilon}dt = \frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma^-} f(z)dz = \underline{\underline{0}}$$ ty inga poler i γ^-

2010 - problem 5 - Kleins fyragrupp

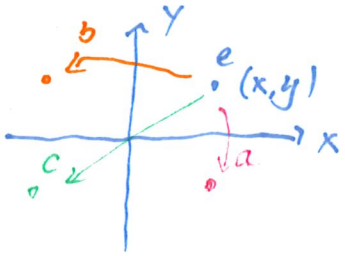
a) Kleins fyra grupp $G = \{e, a, b, c\}$ med: i planet $\mathbb{R}^2$

$e: (x,y) \to (x,y)$ identitetsavbildningen

$a: (x,y) \to (x,-y)$ spegling i x-axeln

$b: (x,y) \to (-x,y)$ spegling i y-axeln

$c: (x,y) \to (-x,-y)$ paritetstransformation



Konstruera multiplikationstabell & bestäm dess delgrupper!

∘	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

delgruppas: $\{e\}$, G, $G_1 = \{e,a\}$, $G_2 = \{e,b\}$, $G_3 = \{e,c\}$

G är abelsk

b) Illustrera Cayleys sats genom att visa att Kleins fyragrupp är isomorph med den delgrupp till S_4 som består av permutationerna

$(1)(2)(3)(4)$, $(12)(34)$, $(13)(24)$, $(14)(23)$

E: $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$ A: $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$ B: $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$ C: $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$

∘	E	A	B	C
E	E	A	B	C
A	A	E	C	B
B	B	C	E	A
C	C	B	A	E

$\to A \cdot A = E$
$\to B \cdot B = E$
$\to C \cdot C = E$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix} = C$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix} = B$$

$$B \cdot C = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix} = A$$

$A \cdot B = C = B \cdot A$

$\to$ $E \longleftrightarrow e$
$A \longleftrightarrow a$
$B \longleftrightarrow b$
$C \longleftrightarrow c$

Integralekvation (2011 uppgift 2)

Beskriv en metod att lösa integralekvationen

$$\varphi(x) = x + \lambda \int_0^1 (xt + t^2)\,\varphi(t)\,dt$$

För vilka värden på λ existerar en unik lösning?

⇝ Fredholm integralekvation av andra typen

Här kan vi använda metoder av separabel härna:

Allgemen

- $\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} M_j(x) \int_a^b N_j(t)\,\varphi(t)\,dt$
- Definiera $c_j = \int_a^b N_j(t)\,\varphi(t)\,dt$

$$\Rightarrow \varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j M_j(x)$$

- Multiplicera med $N_i(x)$ och $\int_a^b \dots dx$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_a^b N_i(x)\varphi(x)\,dx}_{=c_i} = \underbrace{\int_a^b N_i(x) f(x)\,dx}_{:=b_i} + \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j \underbrace{\int_a^b N_i(x) M_j(x)\,dx}_{:=a_{ij}}$$

$$\Leftrightarrow c_i = b_i + \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j$$

- Matrix form med $A = (a_{ij})$:

$$\vec{b} = \vec{c} - \lambda A \vec{c} = (I - \lambda A)\vec{c}$$

$$\Rightarrow \vec{c} = (I - \lambda A)^{-1}\vec{b}$$

⇝ unik lösning när $\det(I - \lambda A) \neq 0$

$$\det(I - \lambda A) = \left(1 - \frac{\lambda}{3}\right)^2 - \frac{\lambda}{2}\cdot\frac{\lambda}{4}$$

$$= 1 - \frac{2\lambda}{3} + \frac{\lambda^2}{9} - \frac{\lambda^2}{8}$$

$$= \frac{-1}{72}\cdot(\lambda^2 + 48\lambda - 72)$$

unik lösning när λ inte är lösning till $\lambda^2 + 48\lambda - 72 = 0$

Vår fall

- $\varphi(x) = \underbrace{x}_{f(x)} + \lambda \underbrace{x}_{M_1(x)} \int_0^1 \underbrace{t}_{N_1(t)}\varphi(t)\,dt + \lambda \cdot \underbrace{1}_{M_2(x)} \int_0^1 \underbrace{t^2}_{N_2(t)}\varphi(t)\,dt$

$a = 0$, $b = 1$, $n = 2$

- $c_1 = \int_0^1 t\,\varphi(t)\,dt \qquad c_2 = \int_0^1 t^2\,\varphi(t)\,dt$

$$\Rightarrow \varphi(x) = x + \lambda c_1 x + \lambda c_2 \qquad (*)$$

- $b_1 = \int_0^1 x\cdot x\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

$b_2 = \int_0^1 x^2\cdot x\,dx = \int_0^1 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$

$a_{11} = \int_0^1 x\cdot x\,dx = \frac{1}{3} \qquad a_{12} = \int_0^1 x\cdot 1\,dx = \frac{1}{2}$

$a_{21} = \int x^2\cdot x\,dx = \frac{1}{4} \qquad a_{22} = \int_0^1 1\cdot x^2\,dx = \frac{1}{3}$

- $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

$$I - \lambda A = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda}{3} & -\frac{\lambda}{2} \\ -\frac{\lambda}{4} & 1 - \frac{\lambda}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$(I - \lambda A)^{-1} = \frac{1}{\det(I - \lambda A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = (I - \lambda A)^{-1}\vec{b}$$

fylla $\vec{c}$ i $(*)$ ⇒ lösning för $\varphi(x)$