

Introduktion till representationsteori

- definition av en rep
- ekvivalenta reps
- reducerbara reps, irreps
- Maschkes teorem
- Shurs lemmor
- fundamentala ortogonalitetsteoremet
- karaktärstabeller
- Clebsch-Gordan serier

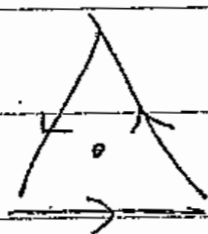


Ferdinand Frobenius, 1849-1917

REPRESENTATIONSTEORI

teorin för hur man representerar grupper i termer av matriser
(~gruppenelement) och matrismultiplikation (~"gruppmultiplikation")

Ex.



$$C_3 = \{a, b, e\}$$

$$\begin{array}{c} \nearrow \quad \uparrow \\ 2\pi/3 \quad 4\pi/3 \end{array}$$

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a \rightarrow R(2\pi/3), \quad b \rightarrow R(4\pi/3), \quad e \rightarrow R(0)$$

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Testa!

$$\text{I.ex. } R(2\pi/3)R(4\pi/3) = R(0)$$

?

Poängen?! Bana en explicit realisering
av vad vi redan vet?!

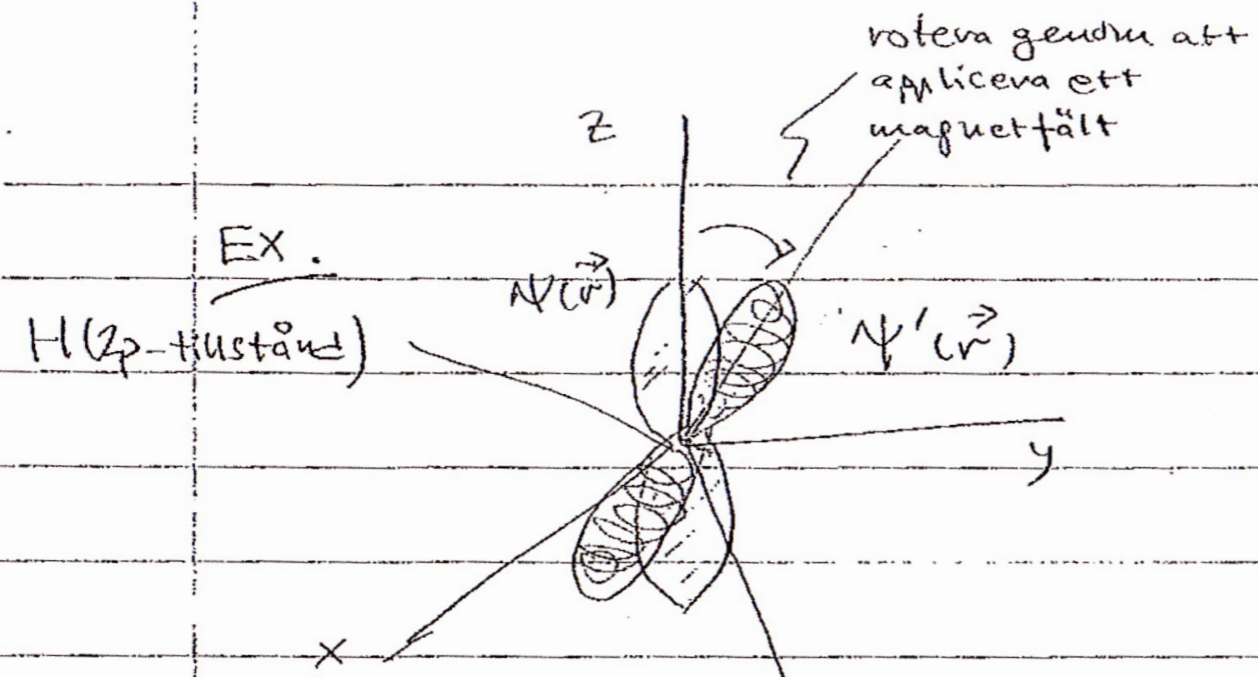
?

Poängen?! Bana en explicit realisering
av vad vi redan vet?!

Repräsentationssteget viktigt när man går till kvantmekanik!

↑

t.o.m. nödvändig!



Rotera $H(2p)$ -orbitalen $\Rightarrow \psi(\vec{r}) \rightarrow \psi'(\vec{r})$

Rotera koordinatsystemet $\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = R\vec{r}$

$\langle R\vec{r} | \psi \rangle = \langle \vec{r} | R^{-1} | \psi \rangle$
 $\langle \vec{r}' | \psi' \rangle = \langle \vec{r} | R^{-1} | \psi \rangle$
 $\Rightarrow \langle R\vec{r} | \psi \rangle = \langle \vec{r}' | \psi' \rangle$
 $\text{ty } R^+ = R^{-1}$

$$\Downarrow$$

$$\psi'(\vec{r}') = \psi(\vec{r}) = \psi(R^{-1}\vec{r}')$$

$$\Downarrow$$

$$\langle \vec{r}' | \psi' \rangle = \psi'(\vec{r}') = \psi(R^{-1}\vec{r}')$$

↑
transformation
i konfigurations-
rummet

$$R^{-1}: |\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle$$

INDUCERAD TRANSFORMATION

I HILBERTRUMMET

kvant-
funktioner
↓

Linjära egenfunktioner för väte: $u_{nlm}(\vec{r}) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi)$
 $\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = R\vec{r} \Rightarrow u_{nlm}$ är oberoende (kvanttal till skalärer!)

m påverkas!

↑ mätet L_z (projektion på z -axeln)

$$\Rightarrow u'_{nlm}(\vec{r}) = u_{nlm}(R^{-1}\vec{r})$$

$$= \sum_{m'} D_{mm'}(R) u_{nlm'}(\vec{r})$$

↑ element: $(2l+1) \times (2l+1)$ matrix

REPRESENTATION AV 3D
ROTATIONER I HILBERTRUMMET

Representation D av en grupp

definition:

$$G = \{g_1, g_2, \dots\}$$

$$D = \{D(g_1), D(g_2), \dots\}$$

$D(g_i)$ $n \times n$ invertierbar matris \rightarrow n -dim. rep

$$g_i g_j = g_k \Rightarrow D(g_i) D(g_j) = D(g_k)$$

en representation måste bevara gruppstrukturen!

$G \rightarrow D$ är en *homomorfi*

Representation D av en grupp

definition:

$$G = \{g_1, g_2, \dots\}$$

↓ ↓ ↓ ISOMORFI (1-1) \Rightarrow D ÄR "TROGEN"

$$D = \{D(g_1), D(g_2), \dots\}$$

$D(g_i)$ $n \times n$ invertierbar matris \rightarrow n -dim. rep

$$g_i g_j = g_k \Rightarrow D(g_i) D(g_j) = D(g_k)$$

en representation måste bevara gruppstrukturen!

$G \rightarrow D$ är en *homomorfi*

Representation D av en grupp

definition:

$$G = \{g_1, g_2, \dots\}$$

↓ ↓ ↓ ISOMORFI (1-1) \Rightarrow D ÄR "TROGEN"

$$D = \{D(g_1), D(g_2), \dots\}$$

$D(g_i)$ $n \times n$ invertierbar matris \rightarrow n -dim. rep
verkar i ett komplext vektorrum V

$$g_i g_j = g_k \Rightarrow D(g_i) D(g_j) = D(g_k)$$

en representation måste bevara gruppstrukturen!

$G \rightarrow D$ är en *homomorfi*

D, D' EKIVALENTA

$$\forall g \exists S : D'(g) = S^{-1} D(g) S$$

(FULLSTÄNDIGT) REDUCERBAR REF D

Givet $D^{(1)}$ och $D^{(2)}$:

$$D(g) = D^{(1)}(g) \oplus D^{(2)}(g) = \begin{pmatrix} D^{(1)}(g) & 0 \\ 0 & D^{(2)}(g) \end{pmatrix}$$

Mer allmänt :

$$D(g) = \begin{pmatrix} D^{(1)}(g) & & & & \\ & D^{(2)}(g) & & & \\ & & D^{(1)}(g) & & \\ & & & D^{(3)}(g) & \\ & & & & D^{(k)}(g) \dots \end{pmatrix}$$

$$= 2D^{(1)}(g) \oplus D^{(2)}(g) \oplus 2D^{(3)}(g) \oplus \dots$$

Om D ej reducerbar så kallas D "IRREDUCIBEL".

Centralt problem i fysiken:

Givet en rep av en symmetrigrupp,
vilka är de *irreps* som bygger upp den?



svarar mot de "fundamentala" / "relevanta"
frihetsgraderna i det system man studerar

För att gå vidare med representationsteorin så behöver vi ett par "nyckelteorem".
Det första:

UNITARITETSTEOREMET

Varje rep är ekvivalent med en unitär rep

Bakgrund: UNITÄRA TRANSFORMATIONER bevarar
Skalarprodukter (eller mer allmänt:
"inneprodukter" $\langle v | v' \rangle$ när vi som här
finns också komplexa vektorrum $V \ni |v\rangle, |v'\rangle$)

$$(D(g)v, D(g)v') = (v, v') \equiv \langle v | v' \rangle = \vec{v} \cdot \vec{v}'$$

↑
om V är ett
reellt vektorrum

Definiera en GRUPPINVARIANT SKALÄRPRODUKT $\{v, v'\}$

$$\{v, v'\} \equiv \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle D(g)v | D(g)v' \rangle$$

Visa : $\{D(h)v | D(h)v'\} = \{v | v'\}$, $\forall h \in G$

För att gå vidare med representationsteorin så behöver vi ett par "nyckelteorem".
Det första:

UNITARITETSTEOREMET

Varje rep är ekvivalent med en unitär rep

Bevis

$$\begin{aligned}
 \{ D(h)v \mid D(h)v' \} &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle \underbrace{D(g)D(h)v}_{D(gh)} \mid \underbrace{D(g)D(h)v'}_{D(gh)} \rangle \\
 &= \frac{1}{|G|} \sum_{g' \in G} \langle D(g')v \mid D(g')v' \rangle \\
 &\equiv \{ v \mid v' \}
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow D(h)$ unitär $\forall h \in G$ (med avseende på
den gruppinvarianta
skalärprodukten)

Man kan visa att unitära reps som är reducerbara är fullständigt reducerbara



Alla reducerbara reps är fullständigt reducerbara

Maschke's theorem

Heinrich Maschke



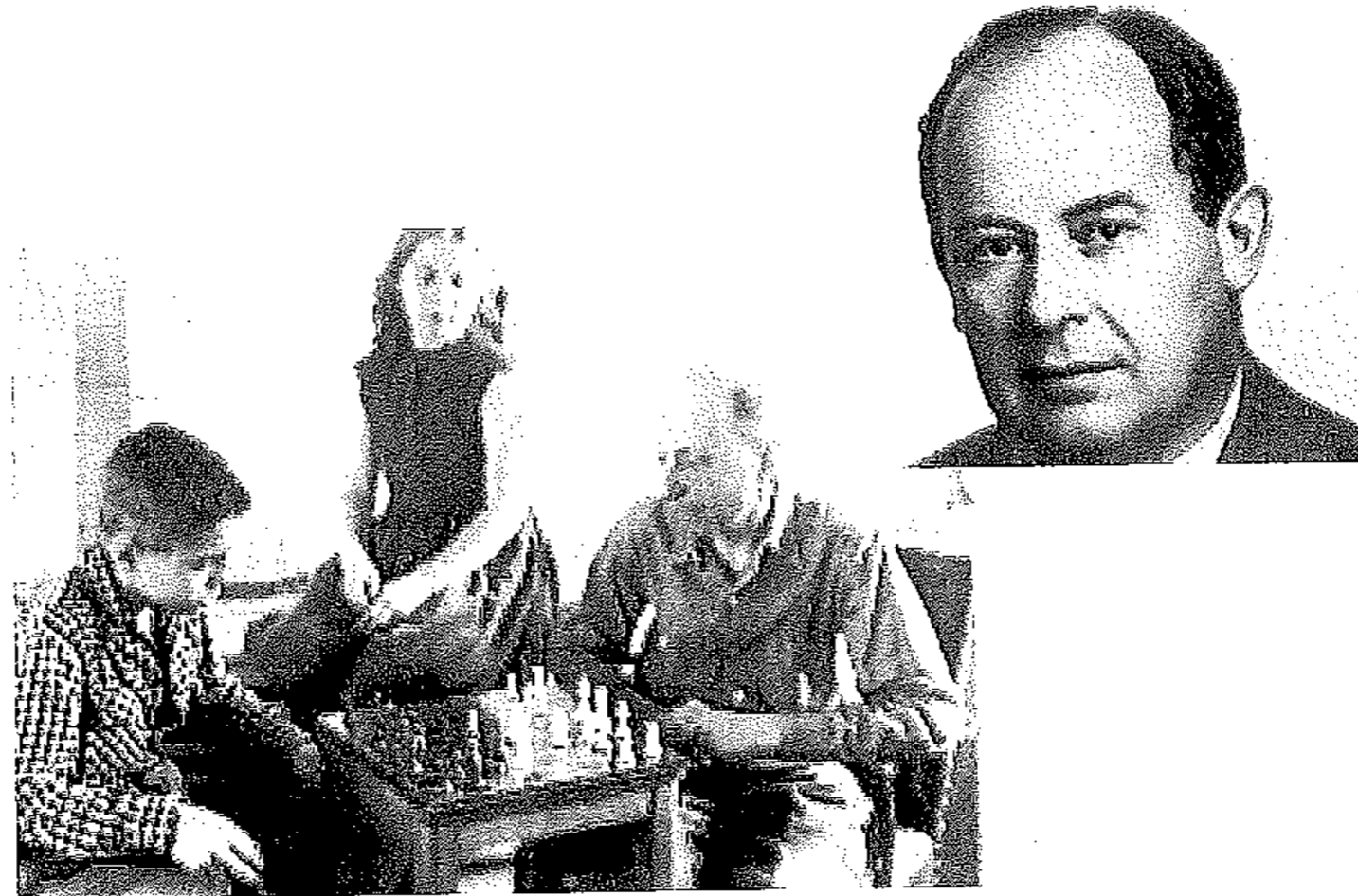
Introduktion till representationsteori

(fortsättning)

- definition av en rep
- ekvivalenta reps
- reducerbara reps, irreps
- Maschkes teorem
- Shurs lemmor
- fundamentala ortogonalitetsteoremet
- karakterstabeller
- Clebsch-Gordan serier

Issai Schur





John von Neumann tipsade Eugene Wigner om Schurs lemmor för analys av kvantmekaniska spektra. Första tillämpningen av grupp-och representationsteori i kvantmekaniken!

SCHWARTS FÖRSTA LEMMA

D invariant till G : $B D(g) = D(g) B, \forall g \in G$

($G = \{g_1, g_2, \dots\}$
 $D = \{D(g_1), D(g_2), \dots\}$)

$$\Downarrow$$

$$B = \lambda \mathbb{1}, \lambda \in \mathbb{C}$$

BEVIS

Låt V vara en " G -modul", dvs. $D(g): V \rightarrow V, \forall g \in G$
 B verkar också: $V, B: V \rightarrow V$.

Antag att $|b\rangle$ är en egenvektor till B : $B|b\rangle = \lambda|b\rangle, \lambda \in \mathbb{C}$

Enl. antagandet i lemmat så gäller då $\forall g \in G$:

$$B(D(g)|b\rangle) = (D(g)B)|b\rangle = D(g)\lambda|b\rangle = \lambda D(g)|b\rangle$$

dvs. $D(g)|b\rangle$ är också en egenvektor till B med samma egenvärde λ .

Bilda $\Gamma = \left\{ \begin{array}{l} \text{egenvektorer } |v\rangle \text{ till } B \text{ med} \\ \text{egenvärde } \lambda \end{array} \right\} \subset V$

Γ är också en G -modul ty Γ är sluten under
verkan med $D(G)$, $\forall g \in G$

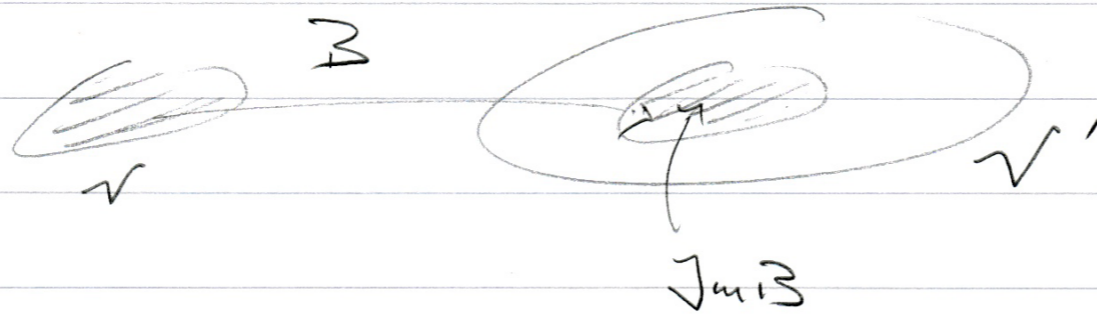
Men D är en irrep! $\Rightarrow V$ kan inte ha en delmodul!

$\Rightarrow \Gamma = V \Rightarrow B|v\rangle = \lambda|v\rangle, \forall |v\rangle \in V \Rightarrow B = \lambda \mathbb{1}$

SCHUR'S ANDRA LEMMAT

Givet $B: V \rightarrow V'$ och två inekvivalenta irreps D och D' sådana att $D: V \rightarrow V$ och $D': V' \rightarrow V'$ där V och V' är två G -moduler (dvs. D och D' är irreps till G).

Om $B D(g) = D'(g) B$, $\forall g \in G$ så följer att $B = 0$

BEVISAntag att $\dim V = n < \dim V' = n'$ Välj $|v\rangle \in V$ godtycklig vektor.

$$D(g)(B|v\rangle) = B D(g)|v\rangle$$

$$\Downarrow$$
 $\text{Im } B$ är sluten under $D(g)$, dvs. $\text{Im } B$ delmodul av V'
Men V' spänner upp en irreg av $g \Rightarrow V'$ kan inte ha delmoduler!

$\text{Im } B = V'$ omöjligt
 $n < n'$

$B = 0$
 dvs. konstruktionen
 fungerar inte!

FUNDAMENTALA ORTOGONALITETSTEOREMET

Låt $D^{(\mu)}$ och $D^{(\nu)}$ vara två irreps till G .

Då gäller $\forall g$ att representationernas matriselement uppfyller

$$\sum_{g \in G} D_{ir}^{(\mu)}(g) D_{sj}^{(\nu)}(g^{-1}) = \frac{[G]}{n_{\mu}} \delta_{ij} \delta_{rs}$$

↑
dimensionen av G -modulen U_{μ} i
vilken $D^{(\mu)}$ verkar

ISSAI SCHUR
GESAMMELTE ABHANDLUNGEN

BAND I

Herausgegeben von
A. Brauer und H. Rohrbach



SPRINGER-VERLAG
BERLIN · HEIDELBERG · NEW YORK

Bevis av ORTOGONALITÄTSTEOREMET

två G -moduler

$$A: U_\nu \rightarrow U_\mu$$



$$D^{(\nu)}: U_\nu \rightarrow U_\nu$$

(endomorfism)

$$D^{(\mu)}: U_\mu \rightarrow U_\mu$$

$D^{(\nu)}, D^{(\mu)}$ INDEPENDENTA KRÄNS OM $\mu \neq \nu$

KONSTRUKERA
$$B \equiv \sum_{g \in G} D^{(\mu)}(g) A D^{(\nu)}(g^{-1})$$

$\forall \lambda \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow D^{(\mu)}(h)B = \sum_g \underbrace{D^{(\mu)}(h)D^{(\mu)}(g)}_{D^{(\mu)}(hg)} A \underbrace{D^{(\nu)}(g^{-1})}_{g'^{-1}h}$$

$$= \sum_{g'} D^{(\mu)}(g') A D^{(\nu)}(g'^{-1}h)$$

$$= \sum_{g'} \underbrace{D^{(\mu)}(g') A D^{(\nu)}(g'^{-1})}_{B} D^{(\nu)}(h)$$

$$= B D^{(\nu)}(h)$$

$$\Rightarrow B = \begin{cases} 0 & \text{om } \mu \neq \nu \text{ Schur 2} \\ \lambda \mathbb{1} & \text{om } \mu = \nu \text{ Schur 1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow B = \sum_g D^{(\mu)}(g) A D^{(\nu)}(g^{-1}) = \lambda \frac{1}{A} \delta^{\mu\nu}$$

VÄLJ A SÅDAN ATT $A_{lm} = \int \delta_{lr} \delta_{sm}$

SVAR $\lambda_A^{(\mu)} = \lambda_{rs}^{(\mu)}$

$r \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \delta & 0 \\ \delta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
 $s \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Kolla matriselementen av B:

$$B_{ij} = \sum_g D_{ie}^{(\mu)}(g) \underbrace{A_{em}}_{\delta_{er} \delta_{sm}} D_{mj}^{(\nu)}(g^{-1})$$

$$= \sum_g D_{ir}^{(\mu)}(g) D_{sj}^{(\nu)}(g^{-1}) = \lambda_{rs}^{(\mu)} \delta^{\mu\nu} \delta_{ij} \quad *$$

VAD ÄR $\lambda_{rs}^{(\mu)}$?

matrix element
av $\frac{1}{A}$

VÄLJ $\mu = n$ OCH TAG SÄRDET, DVS. MULTIPLICERA MED δ_{ij}
(SUMMAKONVENTION!)

$$\Rightarrow B_{ii} = \sum_g D_{ir}^{(\mu)}(g) D_{si}^{(\mu)}(g^{-1})$$

→
SUMMAKONVENTION!

$$= \sum_g \underbrace{D_{si}^{(\mu)}(g^{-1}) D_{ir}^{(\mu)}(g)}_{(D^{(\mu)}(g^{-1}) D^{(\mu)}(g))_{sr}}$$

$$(D^{(\mu)}(g^{-1}) D^{(\mu)}(g))_{sr}$$

$$(D^{(\mu)-1}(g) D^{(\mu)}(g))_{sr}$$

$$\frac{1}{n} \delta_{sr} \equiv \delta_{sr}$$

trän
summan
↓

kolla nu
högerledet!

$$= [9] \delta_{sr}$$

$$\rightarrow = \lambda_{rs}^{(\mu)} \delta_{rs}$$

$$\underbrace{\delta_{ij} \delta_{ij}}_{\delta_{ii}}$$

$$= n_{\mu} \lambda_{rs}^{(\mu)} \delta_{rs}$$

↑ dimensionen hos $D^{(\mu)}$

$\equiv 1$ om $\mu = n$

$$\Rightarrow \lambda_{rs}^{(u)} = \frac{[g]}{u_\mu} \delta_{sr}$$

FUNDAMENTALA
ORTOGONALITETS TENDENSER

$$\star \Rightarrow \left(\sum_g D_{ir}^{(u)}(g) D_{sj}^{(u)}(g^{-1}) \right) = \frac{[g]}{u_\mu} \delta_{ij} \delta_{rs}$$

$$\Rightarrow \lambda_{rs}^{(\mu)} = \frac{[g]}{u_\mu} \delta_{sr}$$

FUNDAMENTALA
ORTOGONALITETSSTYCKET

$$\star \Rightarrow \left\{ \sum_g D_{ir}^{(\mu)}(g) D_{sj}^{(\nu)}(g^{-1}) = \frac{[g]}{u_\mu} \delta_{ij} \delta_{rs} \right.$$

Obs!

$$\sum_g D_{ir}^{(\mu)}(g) D_{sj}^{(\nu)}(g^{-1}) = \frac{[g]}{u_\mu} \delta_{ij} \delta_{rs}$$

$$D \text{ är en homomorf} = \left(D^{(\nu)-1}(g) \right)_{sj} = \left(D^{(\nu)*}(g) \right)_{js} \text{ ty } D(g) \text{ är unitär.}$$

Vi kan då skriva FUNDAMENTALA ORTOGONALITETSSTYCKET SOM

$$\sum_g D_{ir}^{(\mu)}(g) D_{js}^{(\nu)*}(g) = \frac{[g]}{u_\mu} \delta_{ij} \delta_{rs}$$