Introduktion till representationsteori

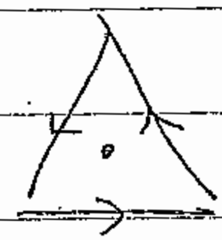
- definition av en rep
- ekvivalenta reps
- reducerbara reps, irreps
- Maschkes teorem
- Shurs lemmor
- fundamentala ortogonalitetsteoremet
- karaktärstabeller
- Clebsch-Gordan serier

Ferdinand Frobenius, 1849-1917

REPRESENTATIONSTEORI

teorin för hur man representerar grupper i termer av matriser (~gruppelement) och matrismultiplikation (~"gruppmultiplikation")

Ex.



$$C_3 = \{\underset{2\pi/3}{\underset{\uparrow}{a}}, \underset{4\pi/3}{\underset{\uparrow}{b}}, e\}$$

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a \to R(2\pi/3), \quad b \to R(4\pi/3), \quad e \to R(0)$$

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b.	b	e	a

Testa!

T.ex. $R(2\pi/3)R(4\pi/3) \overset{?}{=} R(0)$

?

Poängen ?! Bara en explicit realisering
av vad vi redan vet ?!

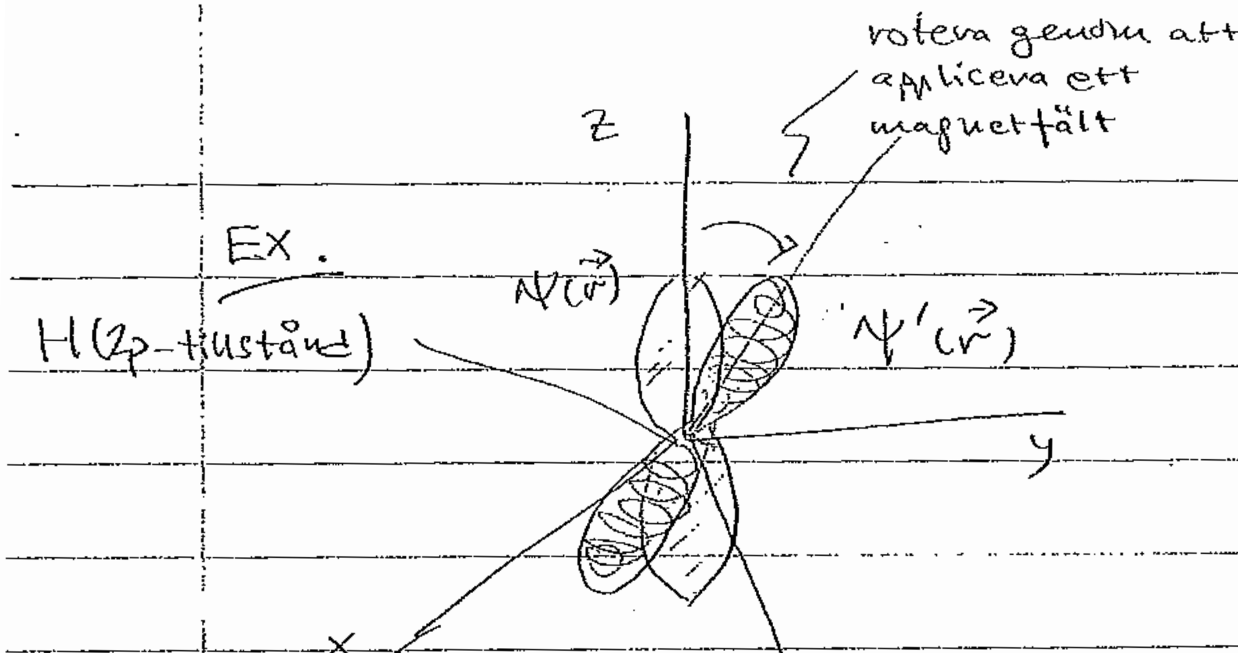
?

Poängen ?! Bara en explicit realisering av vad vi redan vet ?!

Representationsteorin <u>viktig</u> när man går till kvantmekanik!

t.o.m. nödvändig !

EX.



Rotera H(2p)-orbitalen $\Rightarrow$ $\psi(\vec{r}) \rightsquigarrow \psi'(\vec{r})$

Rotera koordinatsystemet $\vec{r} \to \vec{r}\,' = R\vec{r}$

$$\Downarrow$$

$$\psi'(\vec{r}\,') = \psi(\vec{r}) = \psi(R^{-1}\vec{r}\,')$$

$$\Downarrow$$

$$\langle \vec{r} | \psi' \rangle = \psi'(\vec{r}) = \psi(R^{-1}\vec{r})$$

transformation i konfigurationsrummet

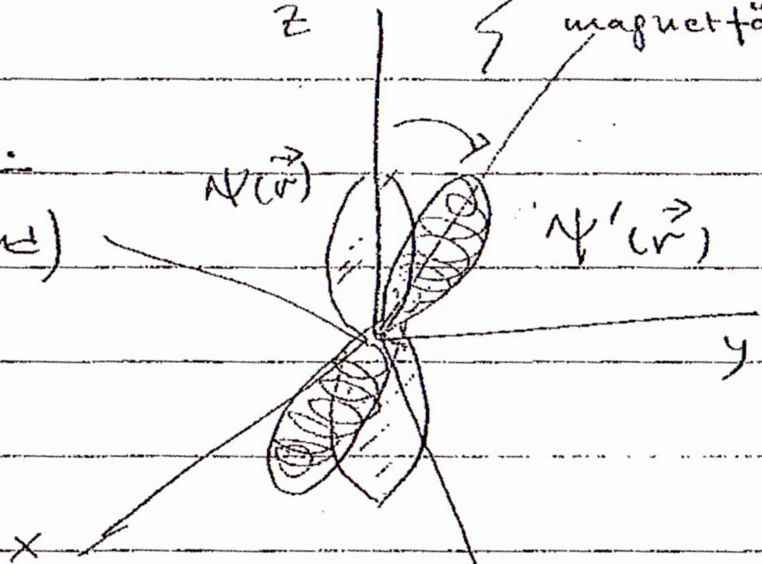
$$R^{-1} : |\psi\rangle \to |\psi'\rangle$$

INDUCERAD TRANSFORMATION I HILBERTRUMMET

Ex.

H(2p-tillstånd)

rotera genom att applicera ett magnetfält



Rotera H(2p)-orbitalen $\Rightarrow$ $\Psi(\vec{r}) \to \Psi'(\vec{r})$

Rotera koordinatsystemet $\vec{r} \to \vec{r}\,' = R\vec{r}$

$$\Downarrow$$

$$\Psi'(\vec{r}\,') = \Psi(\vec{r}) = \Psi(R^{-1}\vec{r}\,')$$

$$\Downarrow$$

$$\langle \vec{r}|\Psi'\rangle = \Psi'(\vec{r}) = \Psi(R^{-1}\vec{r})$$

transformation i konfigurationsrummet

ty $R^{+} = R^{-1}$

$$\underbrace{\langle R\vec{r}|}_{\langle \vec{r}\,'|}\Psi\rangle = \langle \vec{r}|R^{-1}|\Psi\rangle = \langle \vec{r}|\underbrace{R^{-1}\Psi}_{|\Psi'\rangle}\rangle$$

$$R^{-1} : |\Psi\rangle \to |\Psi'\rangle$$

INDUCERAD TRANSFORMATION I HILBERTRUMMET klotytfunktioner

Energiegenfunktioner för väte : $u_{n\ell m}(\vec{r}) = R_n(r)\, Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$

$\vec{r} \to \vec{r}\,' = R\vec{r}$ $\Rightarrow$ n, ℓ opåverkade (kvanttal till skalärer!)

m påverkas !

mäter L_z (projektion på z-axeln)

$$\Rightarrow u'_{n\ell m}(\vec{r}) = u_{n\ell m}(R^{-1}\vec{r})$$

$$= \sum_{m'} D^{\ell}_{mm'}(R)\, u_{n\ell m'}(\vec{r})$$

element i $(2\ell+1)\times(2\ell+1)$ matris

REPRESENTATION AV 3D ROTATIONER I HILBERTRUMMET

Representation D av en grupp

definition:

$G = \{g_1, g_2, \dots\}$

$D = \{D(g_1), D(g_2), \dots\}$

$D(g_i)$ $n \times n$ inverterbar matris $\Rightarrow$ n-dim. rep

$g_i g_j = g_k \Rightarrow D(g_i) D(g_j) = D(g_k)$

en representation måste bevara gruppstrukturen!
G $\longrightarrow$ D är en *homomorfi*

Representation D av en grupp

definition:

$G = \{g_1, g_2, \dots\}$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$ ISOMORFI (1-1) $\Rightarrow$ D ÄR "TROGEN"

$D = \{D(g_1), D(g_2), \dots\}$

$D(g_i)$ $n \times n$ inverterbar matris $\rightarrow$ n-dim. rep

$g_i g_j = g_k \Rightarrow D(g_i) D(g_j) = D(g_k)$

en representation måste bevara gruppstrukturen!
G $\longrightarrow$ D är en *homomorfi*

Representation D av en grupp

definition:

$G = \{g_1, g_2, \dots\}$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$ ISOMORFI (1-1) $\Rightarrow$ D ÄR "TROGEN"

$D = \{D(g_1), D(g_2), \dots\}$

$D(g_i)$ $n \times n$ inverterbar matris $\rightarrow$ n-dim. rep

verkar i ett komplext vektorrum V

$g_i g_j = g_k \Rightarrow D(g_i) D(g_j) = D(g_k)$

en representation måste bevara gruppstrukturen!

G $\longrightarrow$ D är en *homomorfi*

D, D' EKVIVALENTA

$$\forall_g \exists S : D'(g) = S^{-1} D(g) S$$

(FULLSTÄNDIGT) REDUCERBAR REP D

Givet $D^{(1)}$ och $D^{(2)}$:

$$D(g) = D^{(1)}(g) \oplus D^{(2)}(g) = \begin{pmatrix} D^{(1)}(g) & 0 \\ 0 & D^{(2)}(g) \end{pmatrix}$$

Mer allmänt :

$$D(g) = \begin{pmatrix} D^{(1)}(g) & & & & & \\ & D^{(2)}(g) & & & & \\ & & D^{(1)}(g) & & & \\ & & & D^{(3)}(g) & & \\ & & & & D^{(3)}(g) & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$= 2D^{(1)}(g) \oplus D^{(2)}(g) \oplus 2D^{(3)}(g) \oplus \dots$$

Om D ej reducerbar så kallas D "IRREDUCIBEL".

Centralt problem i fysiken:

Givet en rep av en symmetrigrupp,
vilka är de *irreps* som bygger upp den?

svarar mot de "fundamentala" / "relevanta" frihetsgraderna i det system man studerar

För att gå vidare med representationsteorin så behöver vi ett par ”nyckelteorem”.
Det första:

UNITARITETSTEOREMET
Varje rep är ekvivalent med en unitär rep

Bakgrund: UNITÄRA TRANSFORMATIONER bevarar skalärprodukter (eller mer allmänt: "inre produkter" $\langle v|v'\rangle$ när vi som här tillåter också komplexa vektorrum $V \ni |v\rangle, |v'\rangle$)

$$(D(g)v, D(g)v') = (v,v') \equiv \langle v|v'\rangle = \vec{v}\cdot\vec{v}'$$

om V är ett reellt vektorrum

Definiera en GRUPPINVARIANT SKALÄRPRODUKT $\{v,v'\}$

$$\{v,v'\} \equiv \frac{1}{[G]}\sum_{g\in G}\langle D(g)v|D(g)v'\rangle$$

Visa: $\{D(h)v|D(h)v'\} = \{v|v'\}, \ \forall h\in G$

För att gå vidare med representationsteorin så behöver vi ett par ”nyckelteorem”.
Det första:

UNITARITETSTEOREMET
Varje rep är ekvivalent med en unitär rep

Bevis

$$\{D(h)v|D(h)v'\} = \frac{1}{[G]}\sum_{g\in G} \langle \underbrace{\underbrace{D(g)D(h)}_{D(gh)}}_{\text{}} v | D(g)D(h)v'\rangle$$

$$\langle \underbrace{D(g)D(h)}_{D(\underbrace{gh}_{g'})} v \,|\, \underbrace{D(g)D(h)}_{D(\underbrace{gh}_{g'})} v'\rangle$$

$$= \frac{1}{[G]}\sum_{g'\in G} \langle D(g')v | D(g')v'\rangle$$

$$\equiv \{v|v'\}$$

$\Rightarrow$ $D(h)$ unitär $\forall h\in G$ (med avseende på den gruppinvarianta skalärprodukten)

Man kan visa att unitära reps som är reducerbara är fullständigt reducerbara

Alla reducerbara reps är fullständigt reducerbara

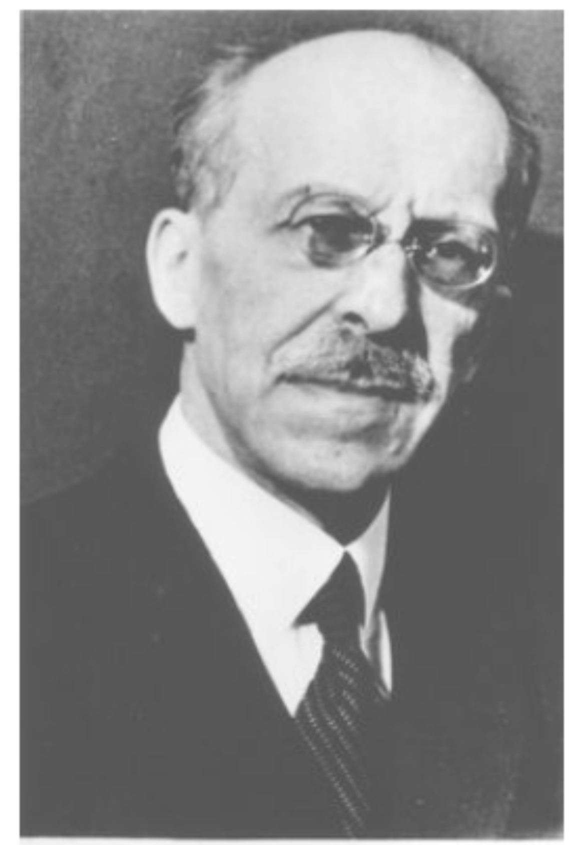
Maschke's theorem

Heinrich Maschke

Introduktion till representationsteori

(fortsättning)

Issai Schur



- definition av en rep
- ekvivalenta reps
- reducerbara reps, irreps
- Maschkes teorem
- Shurs lemmor
- fundamentala ortogonalitetsteoremet
- karaktärstabeller
- Clebsch-Gordan serier

John von Neumann tipsade Eugene Wigner om Schurs lemmor för analys av kvantmekaniska spektra. Första tillämpningen av grupp-och representationsteori i kvantmekaniken!

SCHURS FÖRSTA LEMMA

D irrep till G : $\quad BD(g) = D(g)B \, , \ \forall g \in G$

$\Big(\qquad G = \{g_1, g_2, \dots\}$

$D = \{D(g_1), D(g_2), \dots\} \Big)$

$$\Downarrow$$

$$B = \lambda \mathbb{1} \, , \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

BEVIS

Låt V vara en "G-modul", dvs. $D(g): V \to V, \ \forall g \in G$

B verkar också i V, $B: V \to V$.

Antag att $|b\rangle$ är en egenvektor till B : $B|b\rangle = \lambda |b\rangle, \ \lambda \in \mathbb{C}$

Enl. antagandet i lemmat så gäller då $\forall g \in G$:

$$B\big(D(g)|b\rangle\big) = \big(D(g)B\big)|b\rangle = D(g)\lambda|b\rangle = \lambda D(g)|b\rangle$$

dvs. $D(g)|b\rangle$ är också en egenvektor till B med samma egenvärde λ.

Bilda $\Gamma = \left\{ \begin{array}{l} \text{egenvektorer } |v\rangle \text{ till } B \text{ med} \\ \text{egenvärde } \lambda \end{array} \right\} \subset V$

Γ är också en G-modul ty Γ är sluten under verkan med $D(g)$, $\forall g \in G$

Men D är en irrep! $\Rightarrow$ V kan inte ha en delmodul!

$\Rightarrow \Gamma = V \Rightarrow B|v\rangle = \lambda|v\rangle, \forall |v\rangle \in V \Rightarrow B = \lambda \mathbb{1}$

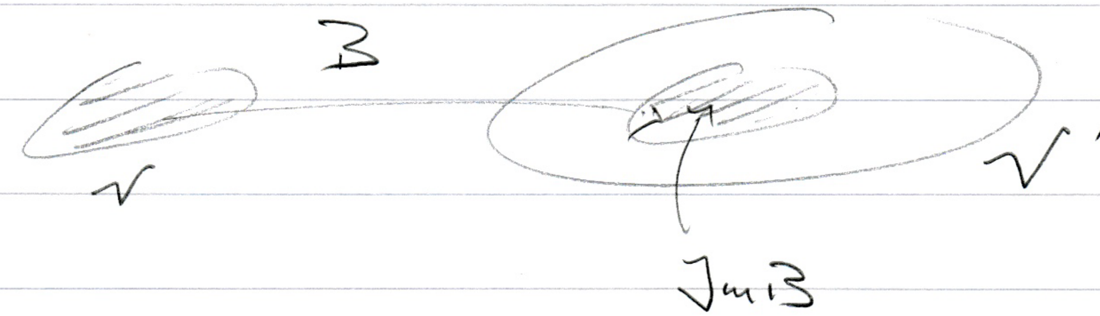
Schurs andra lemma

Givet $B : V \to V'$ och två inekvivalenta irreps D och D' sådana att $D : V \to V$ och $D' : V' \to V'$ där V och V' är två G-moduler (dvs. D och D' är irreps till G).

Om $BD(g) = D'(g)B, \ \forall g \in G$ så följer att $B = 0$

Bevis

Antag att $\dim V = n < \dim V' = n'$



Välj $|v\rangle \in V$ godtycklig vektor.

$$D'(g)\,(B\,|v\rangle) = B\,D(g)\,|v\rangle$$

$$\Downarrow$$

Im B är sluten under $D'(g)$, dvs. Im B delmodul av V'

Men V' spänner upp en irrep av G $\Rightarrow$ V' kan inte ha delmoduler!

Im $B = V'$ omöjligt ty $n < n'$

$B = 0$ (dvs. konstruktionen funkar inte!)

FUNDAMENTALA ORTOGONALITETSTEOREMET

Låt $D^{(\mu)}$ och $D^{(\nu)}$ vara två irreps till G.

Då gäller $\forall g$ att representationernas matriselement uppfyller

$$\sum_{g\in G} D^{(\mu)}_{ir}(g)\, D^{(\nu)}_{sj}(g^{-1}) = \frac{[G]}{n_\mu}\,\delta^{\mu\nu}\,\delta_{ij}\,\delta_{rs}$$

dimensionen av G-modulen U_μ i vilken $D^{(\mu)}$ verkar


ISSAI SCHUR
GESAMMELTE ABHANDLUNGEN

BAND I

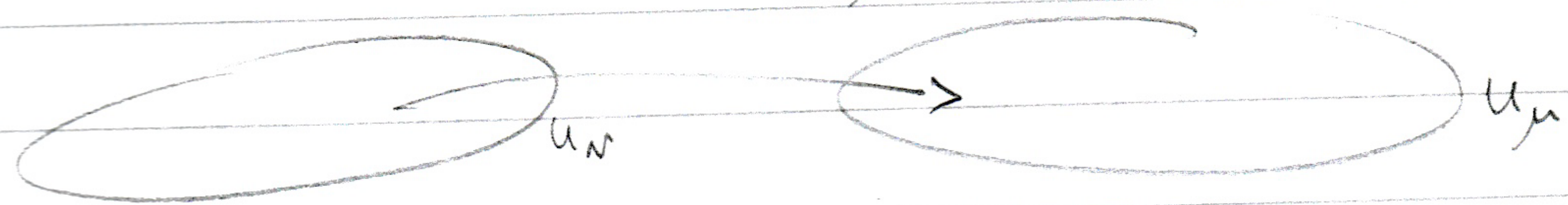
Herausgegeben von
A. Brauer und H. Rohrbach

SPRINGER-VERLAG
BERLIN · HEIDELBERG · NEW YORK

Bevis av ORTOGONALITETSTEOREMET

två G-moduler

$A: U_\nu \to U_\mu$



$D^{(\nu)}: U_\nu \to U_\nu$ $\quad$ $D^{(\mu)}: U_\mu \to U_\mu$

(endomorfism)

$D^{(\nu)}, D^{(\mu)}$ INEKVIVALENTA IRREPS om $\mu \neq \nu$

KONSTRUERA $\quad B = \sum_{g \in G} D^{(\mu)}(g) A D^{(\nu)}(g^{-1})$

VÄLJ $h \in G$

$$\Rightarrow \quad D^{(\mu)}(h) B = \sum_g \underbrace{D^{(\mu)}(h) D^{(\mu)}(g)}_{D^{(\mu)}(\underbrace{hg}_{g'})} A D^{(\nu)}(\underbrace{g^{-1}}_{g'^{-1}h})$$

$$= \sum_{g'} D^{(\mu)}(g') A D^{(\nu)}(g'^{-1} h)$$

$$= \underbrace{\sum_{g'} D^{(\mu)}(g') A D^{(\nu)}(g'^{-1})}_{B} D^{(\nu)}(h)$$

$$= B D^{(\nu)}(h)$$

$$\Rightarrow \quad B = \begin{cases} 0 & \text{OM } \mu \neq \nu \quad \text{SCHUR 2} \\ \lambda \mathbb{1} & \text{OM } \mu = \nu \quad \text{SCHUR 1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad B = \sum_g D^{(\mu)}(g)\, A\, D^{(\nu)}(g^{-1}) = \lambda_A^{(\mu)} \mathbb{1}\, \delta^{\mu\nu}$$

VÄLJ A SÅDAN ATT $A_{lm} = \delta_{lr}\delta_{sm}$

$$\begin{array}{cc} r \rightarrow & \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \\ & \uparrow \\ & s \end{array}$$

SKRIV $\lambda_A^{(\mu)} \equiv \lambda_{rs}^{(\mu)}$

KOLLA MATRISELEMENTEN AV B:

$$B_{ij} = \sum_g D^{(\mu)}_{il}(g) \underbrace{A_{lm}}_{\delta_{lr}\delta_{sm}} D^{(\nu)}_{mj}(g^{-1})$$

matris element av $\mathbb{1}$

$$= \sum_g D^{(\mu)}_{ir}(g)\, D^{(\nu)}_{sj}(g^{-1}) = \lambda^{(\mu)}_{rs}\, \delta^{\mu\nu}\, \delta_{ij} \qquad \star$$

VAD ÄR $\lambda^{(\mu)}_{rs}$?

VÄLJ $\mu = \nu$ OCH TAG SPÅRET, DVS. MULTIPLICERA MED δ_{ij}

(SUMMAKONVENTION!)

$$\Rightarrow B_{ii} = \sum_g D^{(\mu)}_{ir}(g) D^{(\mu)}_{si}(g^{-1})$$

SUMMERA!

$$= \sum_g \underbrace{D^{(\mu)}_{si}(g^{-1}) D^{(\mu)}_{ir}(g)}_{\left(\underbrace{D^{(\mu)}(g^{-1}) D^{(\mu)}(g)}_{\left(\underbrace{D^{(\mu)^{-1}}(g) D^{(\mu)}(g)}_{\mathbb{1}_{sr} \equiv \delta_{sr}}\right)_{sr}}\right)_{sr}}$$

från summan

kolla nu högerledet!

$$= [G]\, \delta_{sr}$$

$$\hookrightarrow = \lambda^{(\mu)}_{rs} \delta^{\mu\nu} \underbrace{\delta_{ij} \delta_{ij}}_{\delta_{ii}} = n_\mu \lambda^{(\mu)}_{rs} \delta^{\mu\nu} \quad = 1 \text{ om } \mu = \nu$$

↑ dimensionen hos $D^{(\mu)}$

FUNDAMENTALA ORTOGONALITETSTEOREMET

$$\Rightarrow \quad \lambda^{(\mu)}_{rs} = \frac{[G]}{n_\mu}\,\delta_{sr}$$

☆☆ $$\Rightarrow \quad \boxed{\sum_g D^{(\mu)}_{ir}(g)\, D^{(\nu)}_{sj}(g^{-1}) = \frac{[G]}{n_\mu}\,\delta^{\mu\nu}\,\delta_{ij}\,\delta_{rs}}$$

FUNDAMENTALA ORTOGONALITETSTEOREMET

$$\Rightarrow \quad \lambda^{(\mu)}_{rs} = \frac{[G]}{n_\mu}\,\delta_{sr}$$

☆ $$\Rightarrow \quad \boxed{\sum_g D^{(\mu)}_{ir}(g)\, D^{(\nu)}_{sj}(g^{-1}) = \frac{[G]}{n_\mu}\,\delta^{\mu\nu}\,\delta_{ij}\,\delta_{rs}}$$

Obs!

$$\sum_g D^{(\mu)}_{ir}(g)\, \underbrace{D^{(\nu)}_{sj}(g^{-1})} = \frac{[G]}{n_\mu}\,\delta^{\mu\nu}\,\delta_{ij}\,\delta_{rs}$$

D är en homomorfi $= \left(D^{(\nu)-1}(g)\right)_{sj} = \left(D^{(\nu)*}(g)\right)_{js}$ ty $D(g)$ är unitär.

Vi kan då skriva FUNDAMENTALA ORTOGONALITETSTEOREMET som

$$\sum_g D^{(\mu)}_{ir}(g)\, D^{(\nu)*}_{js}(g) = \frac{[G]}{n_\mu}\,\delta^{\mu\nu}\,\delta_{ij}\,\delta_{rs}$$