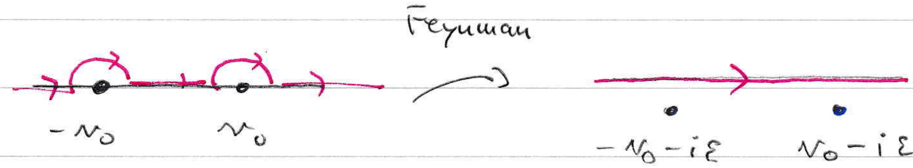
Hur välja rätt Greenfunktion?

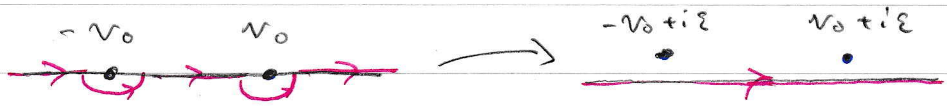
Exempel: Driven harmonisk oscillator
(från tidigare föreläsning)

$$G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega_0^2 - 4\pi^2\nu^2} e^{2\pi i \nu t} \, d\nu \qquad (1)$$

Polen vid $\nu = \pm \nu_0 = \pm \omega_0 / 2\pi$.

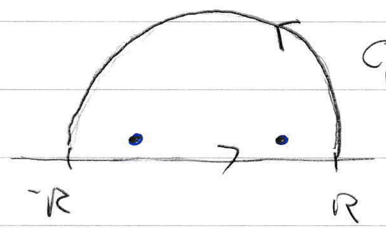
Två sätt att deformera integrationskurvan så att polerna undviks:

I. 

II. 

I och II ger två olika DEFINITIONER av $G(t)$.
Vilken definition fungerar i fysiken?

Låt oss undersöka II: Välj först $t > 0$. Inspektion av integranden i (1): Jordans lemma uppfyllt i övre halvplanet.



$$\lim_{R\to\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \ldots + \cancel{\int_{C_R} \ldots} \right) \overset{\text{Cauchy}}{=} 2\pi i \sum \mathrm{Res}[\ldots]$$

(2 13/11

"retarded"

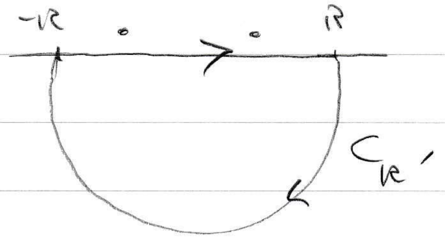
$$G(t) \xrightarrow{\pm\nu_0 \to \pm\nu_0 + i\varepsilon} G^{(r)}(t) = \lim_{\varepsilon\to0}\left(-\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi i\nu t}}{[\nu+(\nu_0-i\varepsilon)][\nu-(\nu_0+i\varepsilon)]}\,d\nu\right)$$

$$\overset{\text{Cauchy}}{=} \lim_{\varepsilon\to0}\left(-\frac{1}{4\pi^2}2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{\nu=\nu_0+i\varepsilon}[\dots] + \operatorname*{Res}_{\nu=-\nu_0+i\varepsilon}[\dots]\right)\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0}\left(-\frac{1}{4\pi^2}2\pi i\left(\frac{e^{2\pi i(\nu_0+i\varepsilon)t}}{\nu_0+i\varepsilon+\nu_0-i\varepsilon} + \frac{e^{2\pi i(-\nu_0+i\varepsilon)t}}{-\nu_0+i\varepsilon-(\nu_0+i\varepsilon)}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\omega_0}\sin(\omega_0 t), \quad t>0 \qquad (2)$$

Välj nu istället $t<0$. Jordans lemma är då uppfyllt i nedre komplexa halvplanet.



$$\lim_{R\to\infty}\left(\int_{-R}^{R}\dots + \cancel{\int_{C_R'}\dots}\right) \overset{\text{Cauchy}}{=} 0$$

inga poler innanför $[-R,R]\cup C_R'$

$$\Rightarrow G(t) = 0, \quad t<0 \qquad (3)$$

$$(2)\ \&\ (3) \Rightarrow \boxed{G^{(r)}(t) = \frac{1}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\,\Theta(t)} \qquad (4)$$

Den analoga räkningen för I ger:

"advanced"

$$G(t) \xrightarrow{\pm\nu_0 \to \pm\nu_0 - i\varepsilon} \boxed{G^{(a)}(t) = -\frac{1}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\,\Theta(-t)} \qquad (5)$$

bidrag bara då $t<0$, med $[-R,R]\cup C_R'$ inneslutande polerna $\pm\nu_0 - i\varepsilon$.

Ska vi välja $G^{(r)}$ eller $G^{(a)}$?

Lösningen till rörelseekvationen för den drivna harmoniska oscillatorn fås via Greenfunktionen:

$$x(t) = \int_0^\infty G(t-t')F(t')dt'$$

$F(t') = 0$ för $t<0$ (dvs. vi antar att drivningen av oscillatorn "kopplas på" vid $t=0$)

Låt oss testa $G \equiv G^{(a)}$!

$$x(t) = \int_0^\infty G^{(a)}(t-t')F(t')dt'$$

$$\overset{(5)}{=} -\frac{1}{\omega_0}\int_0^\infty \sin\omega_0(t-t')\Theta(t'-t)F(t')dt'$$

$$= -\frac{1}{\omega_0}\int_t^\infty \sin\omega_0(t-t')F(t')dt'$$

$\Rightarrow$ $x(t)$ beror på processer som sker <u>efter</u> t!
Icke-kausalitet! Ofysikaliskt!

Testa istället $G \equiv G^{(r)}$!

$$x(t) \overset{(4)}{=} \frac{1}{\omega_0}\int_0^t \sin\omega_0(t-t')F(t')dt'$$

$\Rightarrow$ $x(t)$ beror på processer som sker <u>före</u> t. Ok!

Sensmoral: Den retarderade Greenfunktionen $G^{(r)}$ är det korrekta valet!